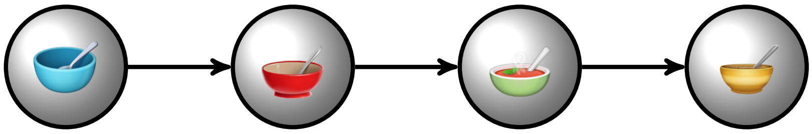
La catégorie Quatre

Alain Busser

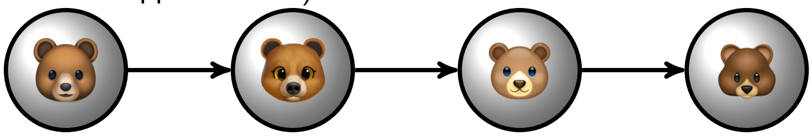
9 décembre 2023

La catégorie Quatre est celle des graphes orientés connexes sans cycle ayant exactement trois arêtes. Voici trois objets de cette catégorie :

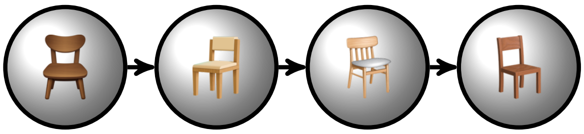
- Quatre bols :



- Quatre ours (celle de droite s'appelle Petite) :

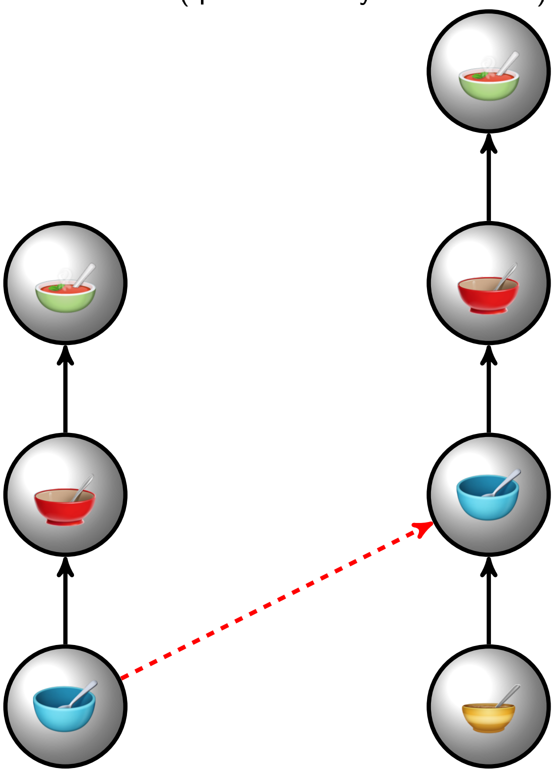


- Quatre chaises :

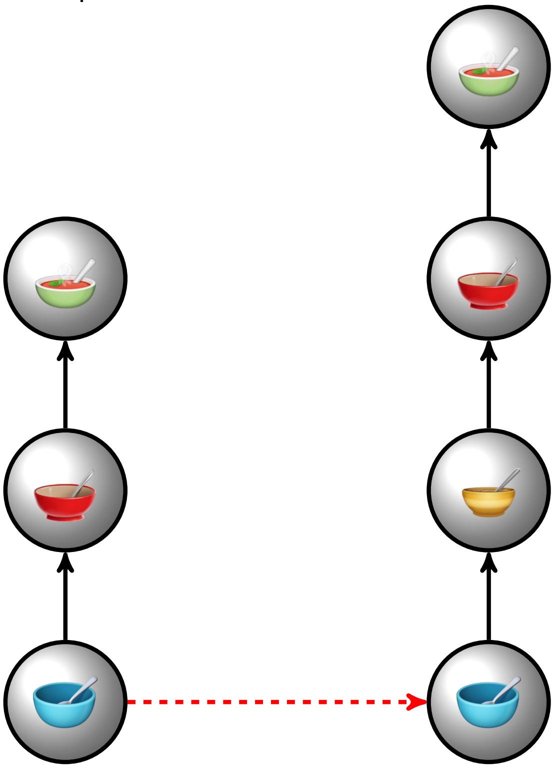


Il y a 4 foncteurs de la catégorie Trois vers la catégorie Quatre :

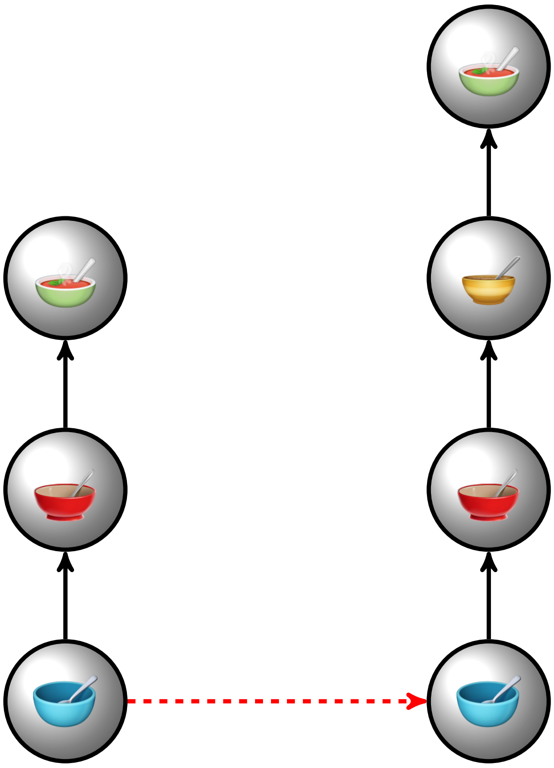
- insertion du bol jaune avant tous les autres (que McCarthy notait `cons`) :



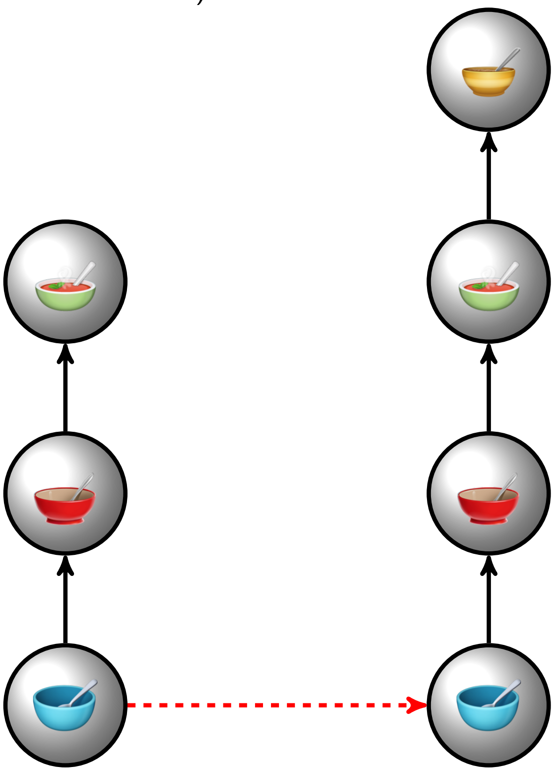
- insertion du bol jaune juste après le premier bol :



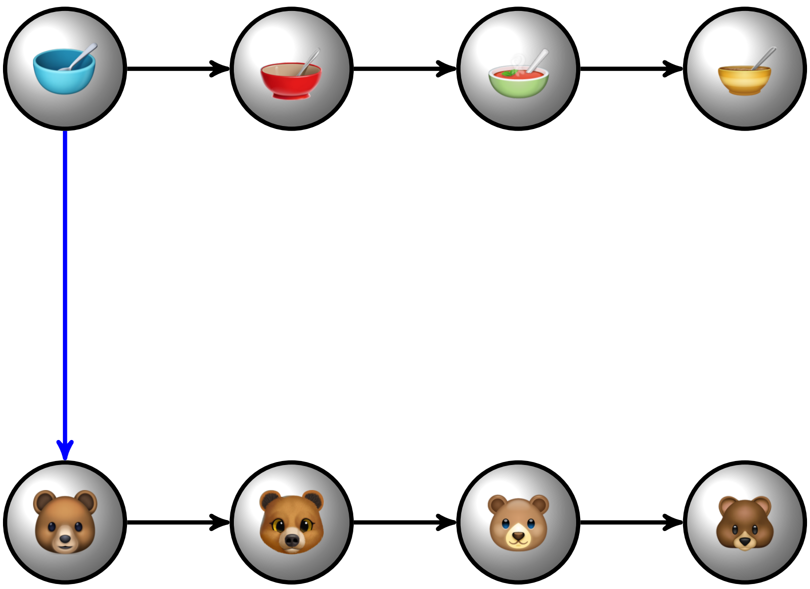
- insertion du bol jaune en avant-dernier :



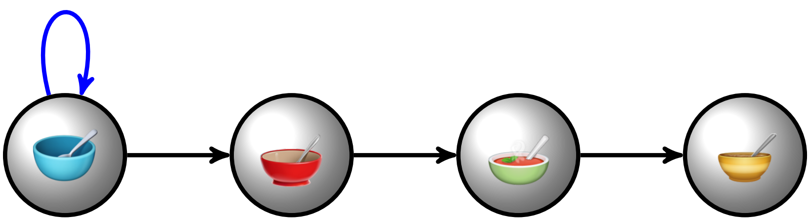
- ajout du bol jaune à la fin (foncteur choisi ici) :



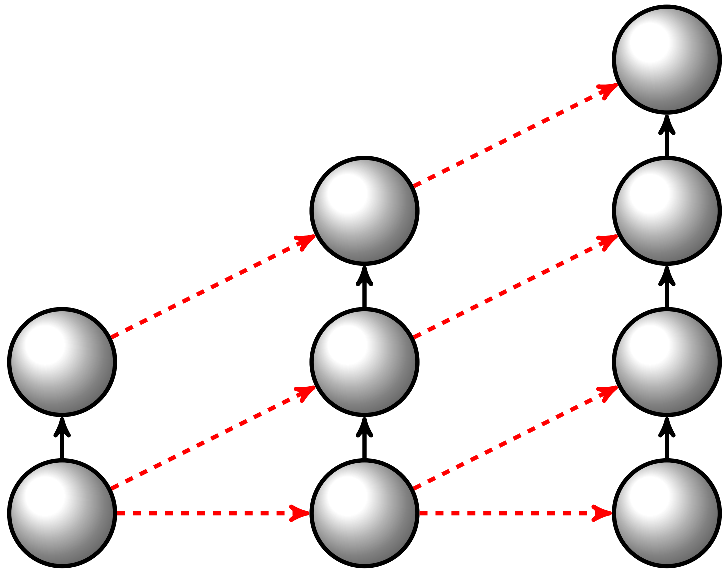
Entre deux objets de la catégorie Quatre, il ne peut y avoir qu'un morphisme. En effet, pour préserver la structure du graphe, il est nécessaire que le départ d'un objet (le bol bleu) soit associé au départ de l'autre objet (Maman ours) et que l'arrivée du premier objet (le bol jaune) soit associée à l'arrivée du second objet (la Petite ourse). Mais comme le bol rouge est le suivant du bol bleu, et Papa ours le suivant de Maman ours, le bol rouge est nécessairement associé à Papa ours, et de même, le bol vert associé à Bébé ours :



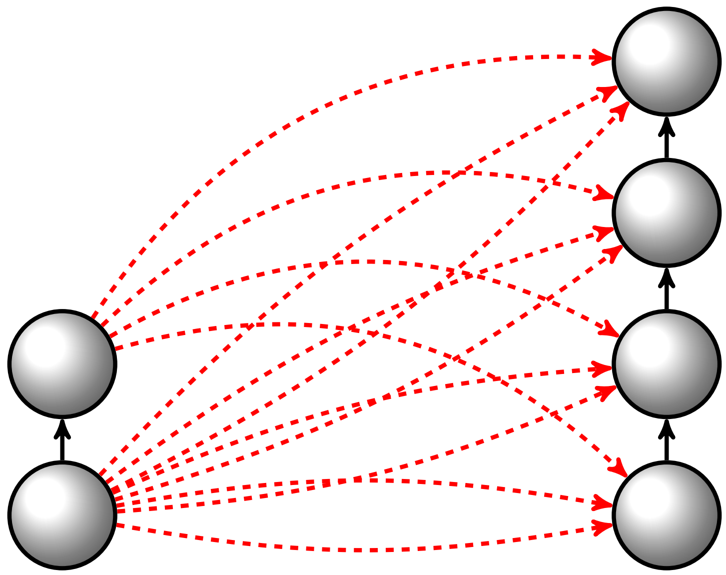
De même il n'y a qu'une identité pour un objet de la catégorie Quatre :



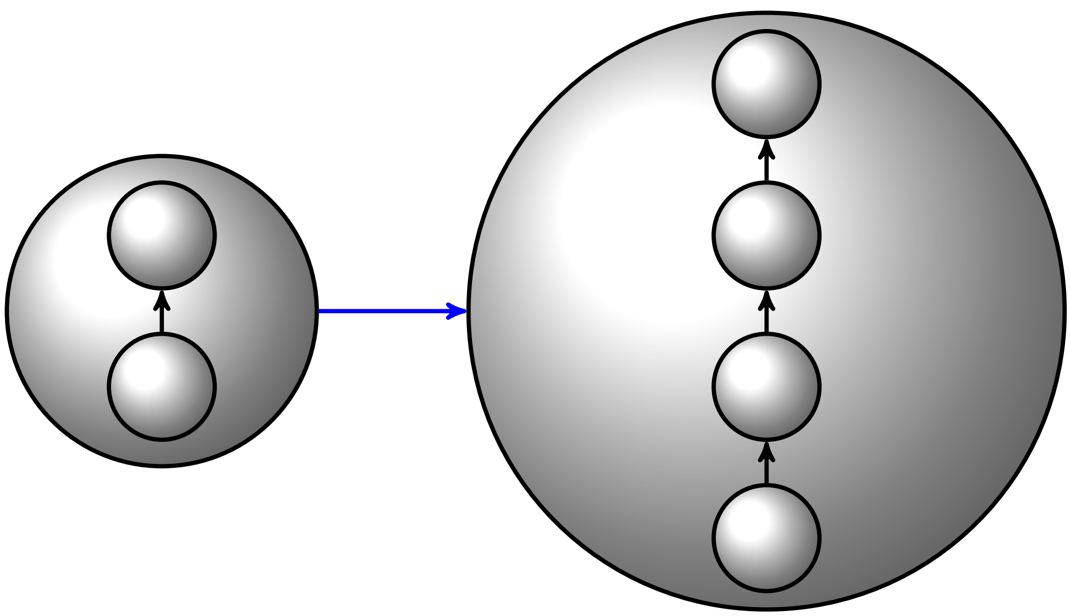
On a vu précédemment qu'il y a 3 foncteurs allant de la catégorie Deux vers la catégorie Trois, et ci-dessus qu'il y a 4 foncteurs allant de la catégorie Trois vers la catégorie Quatre. On en déduit alors par composition l'existence de 12 foncteurs allant de la catégorie Trois vers la catégorie Quatre : en composant l'un des 3 foncteurs allant de Deux vers Trois, par un des 4 foncteurs allant de Trois vers Quatre,



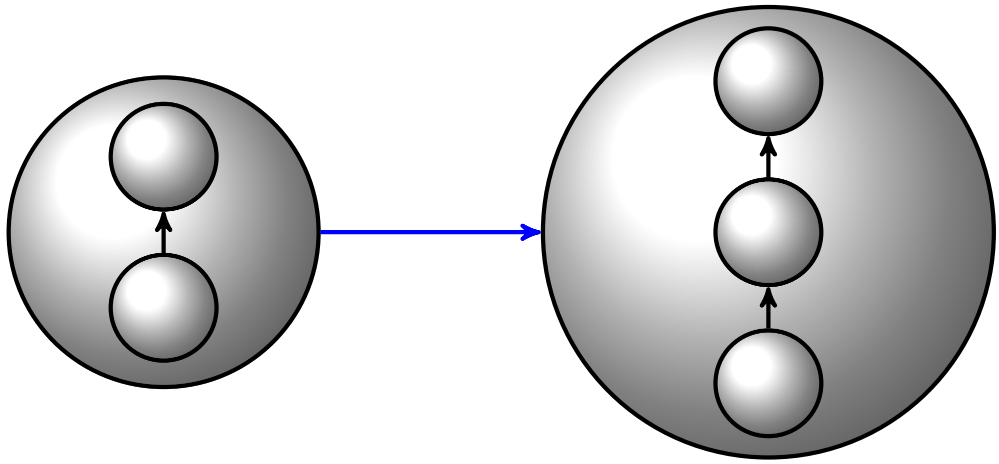
on obtient l'un de ces 12 foncteurs :



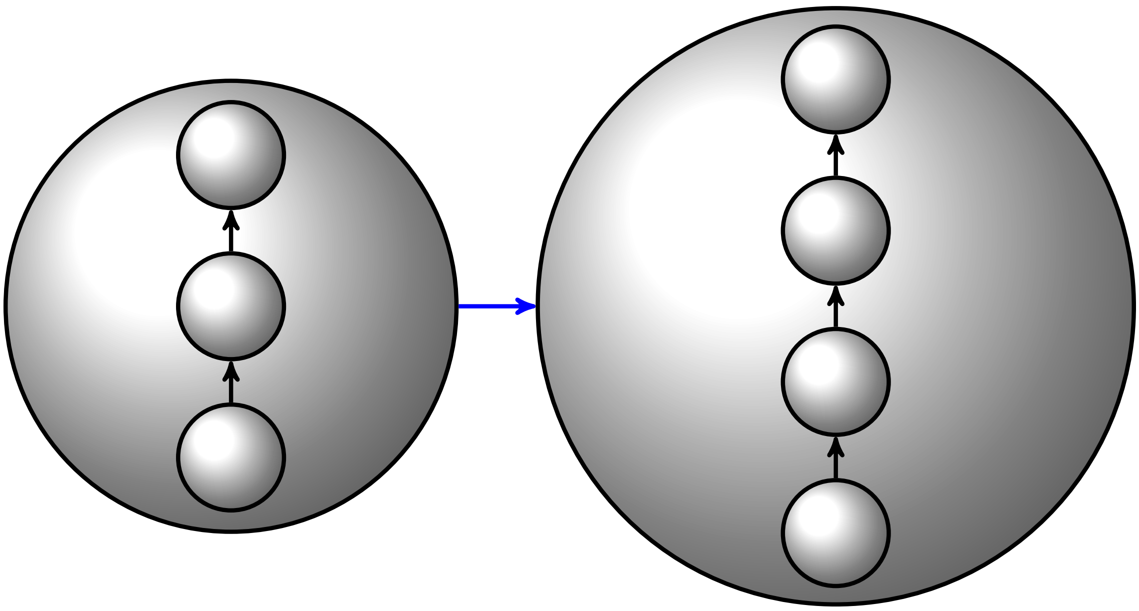
On peut éviter de dessiner tous ces 12 foncteurs en les représentant par une seule flèche allant de la catégorie Deux vers la catégorie Quatre :



et si on a dessiné en bleu cette flèche, c'est parce que comme on l'a construite en composant un foncteur



par un foncteur

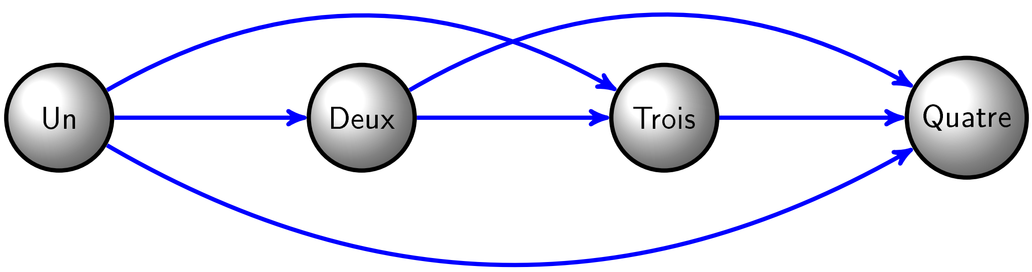


ce qui en fait, *de facto*, un morphisme entre deux nombres. Plus précisément,

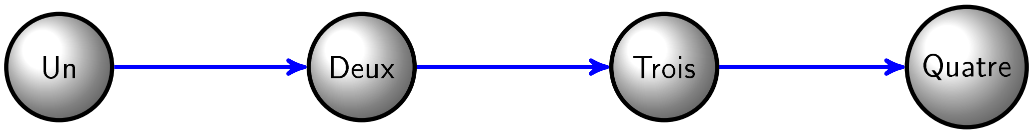
- tout morphisme entre deux objets de la catégorie Quatre est une identité de la catégorie Quatre, considérée comme un objet,
- tout foncteur entre la catégorie Deux et la catégorie Quatre est un morphisme entre ces deux catégories, considérées comme des objets.

Les catégories Un, Deux, Trois et Quatre deviennent alors des objets d'une nouvelle catégorie. Les morphismes entre ces objets (qui sont, rappelons-le, des foncteurs entre les catégories représentées par ces objets) modélisent la relation « est plus petit que ».

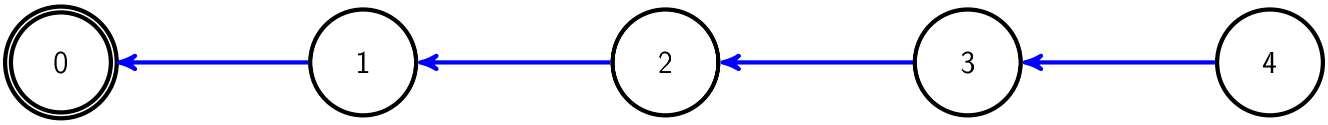
Voici un extrait de cette nouvelle catégorie, comprenant les objets Un, Deux, Trois et Quatre ainsi que les morphismes entre ces objets :



Mais comme ces flèches bleues sont des morphismes, il est inutile de les dessiner toutes. On peut se contenter du minimum :



Ceci définit une catégorie Nombre dont les objets sont Un, Deux, Trois, Quatre etc et dont les morphismes sont les arêtes du graphe représentant la relation « inférieur ou égal » notée $\leq$ ou $\leqslant$. La représentation minimale de ce graphe (en ne dessinant que les arêtes indispensables) est ce que Dedekind appelait *Kette*[1], que l'on peut traduire par *chaîne*, et qui n'est pas sans rappeler la définition des jeux entiers positifs par Conway :



Prendre de la distance a permis de passer de

- la catégorie Un, la catégorie Deux etc avec des foncteurs entre ces catégories, à
- la catégorie Nombre dont les objets sont les catégories Un, Deux etc et dont les morphismes sont les foncteurs évoqués ci-dessus.

Dès lors, une question intéressante est « et si on recommençait ? ». Autrement dit, y a-t-il des catégories autres que Nombre, avec des foncteurs vers la catégorie Nombre ? Un exemple probablement intéressant, est le cercle, dont le groupe de Poincaré est constitué des entiers (relatifs) ce qui explique le fait que l'électron ait un spin. Cet exemple suggère que l'affirmation de Kronecker (un compatriote et contemporain de Dedekind) selon laquelle les nombres entiers sont l'œuvre de Dieu, pourrait avoir une explication par la physique théorique : les entiers existent dans l'infiniment petit avec le spin des particules, et dénotent le nombre de tours à faire sur soi-même pour se retrouver dans l'orientation initiale.

1. *Was sind, und sollen, die Zahlen*, 1888