Qu'est-ce qu'un nombre ?

Cette leçon est en un sens superflue. Puisque Michel Le Du a fort bien traité la question, dans un ouvrage très accessible, Qu'est-ce qu'un nombre ? (Vrin, 2004).
Elle est en un autre sens nécessaire, au moins pour son auteur, du fait qu'en philosophie une connaissance est morte tant que l'on n'a pas soi-même fait un effort pour dégager une problématique et mis en œuvre une argumentation qui ne soit pas, pour soi-même et son auditoire éventuel, du baratin.

La leçon comportera deux parties.
D'abord, une exploration de la question elle-même. Le point de départ sera le constat des significations multiples et divergentes de la question... par conséquent de l'irréductibilité des points de vue philosophiques sur le nombre.
Ensuite une réflexion portant sur quelques réponses à la question parmi les plus remarquables. Et il a fallu faire un choix. Henri Bergson et Bertrand Russell ont été retenus comme philosophes de référence ! Évoqués rapidement dans la première partie, ils méritent en effet toute notre attention par leur manière radicalement opposée d'envisager la nature du nombre, au point qu'il est possible de ne pas voir en eux des contemporains, quoiqu'ils aient produit leurs réflexions à la même époque.

Première partie. Le sens de la question

A. Divergence. Reconnaître d'emblée la nature polémique de la question

La réponse à cette question n'est pas simple. D'abord parce que la signification de la question n'est pas univoque, loin de là.

En schématisant on peut dire qu'il y a deux manières de la comprendre qui s'opposent nettement.

Les uns et les autres comprennent qu'il faut en se demandant ce qu'est un nombre chercher l'origine du nombre. Qu'est-ce qu'un nombre quelconque ou bien d'où viennent tous les nombres ? « Qu'est-ce que... » ou bien « d'où viennent... » : seule la formulation diffère, l'enquête portant sur ce qui rend logiquement possible les nombres. Car les nombres ne sont pas des choses du monde, mais des objets de notre pensée. Ce ne sont aucunement des êtres ayant une réalité extérieure à nous.
Lors de cette enquête généalogique, les uns se demandent comment les nombres ont été découverts par l'humanité et les autres posent la question de leur invention par les mathématiciens, fondant la science des nombres et non pas juste les bases de la numération et du calcul !
Découverte, dans un but pratique (pouvoir compter ce troupeau, ce volume, cette durée composée de x journées) ou invention dans une visée théorique (définir rigoureusement le nombre qui n'est aucun nombre de ceci ou de cela, rendre compte de la création de nombres comme 1 ou 0, les entiers négatifs, Pi ou $\sqrt{2}$, les nombres réels, aleph 0, les nombres p-adiques, les quaternions)... la nuance est de taille ! Deux représentations du nombre s'opposent. D'une part les nombres en relation avec des choses du monde, car leur fonction première est de permettre une énumération, un décompte, un dénombrement exact et pas seulement une estimation. D'autre part, les nombres n'existant qu'à travers les relations logiques qu'ils permettent de penser, les nombres existant comme ensemble pouvant être muni d'opérations liant deux éléments de l'ensemble (ou plus).
D'une part, le nombre 8 se rapporte à la possibilité de compter les huit pièces qui se trouvent dans mon porte-monnaie. D'autre part, il tire son sens de l'appréhension intellectuelle de la paire (6, 8) et d'une opération associant à la paire un troisième terme. Par exemple l'opération de la soustraction. Dans Z+, on aura et n'aura que la possibilité d'effectuer 8-6, dont le résultat est un entier positif ; dans N en revanche, possibilité d'effectuer également 6-8, dont le résultat est un entier négatif.
Dans N*, l'opération de la soustraction ne peut être appliquée à la paire (8,8). 0 est l'invention qui permet de réaliser l'opération pour cette paire, plus une infinité d'autres du type (a, a), et qui fait

donc passer de N* à N par simple généralisation, quoi que puisse être zéro d'un point de vue métaphysique. Zéro ? Un vide qui positive ou un néant qui néantise... cela n'a pas de sens !

Un antagonisme profond, renvoyant à deux usages « stratégiques » de la raison

Ces deux représentations sont antagonistes. Elles renvoient en fait à deux usages de la raison et de notre rapport aux nombres (simple utilisation ou projection de cadres mentaux sur le réel *versus* réflexion qui s'entretient elle-même par l'attention à la logique de ses opérations et donc véritable construction théorique).
Qu'est-ce que la raison qui nous permet de penser et d'utiliser des nombres, d'effectuer des opérations sur les nombres ?
C'est bien entendu une faculté qui par abstraction superpose au réel un et mouvant des entités durables, seulement possibles, puissance cognitive qui peut donc se détourner de la contemplation des pyramides des pharaons pour se mettre à admirer les pyramides immortelles, car idéelles, des mathématiques.

Mais l'abstraction ? Qu'est-ce donc ? Si nous poursuivons notre enquête il convient de faire bien attention par delà le prodige de l'idéalisation aux deux orientations qui sont prises par l'abstraction : d'une part l'affinement et la stabilisation de la perception, le dégagement d'une forme pure à partir du divers des formes perçues ; d'autre part le travail de l'esprit non directement sur les choses mais sur les relations que les choses peuvent avoir entre elles. Dans un cas l'abstraction culmine en jugements établissant le droit contre le fait, discernant un principe d'organisation du réel, déterminant et justifiant la valeur des choses. On pourrait dire qu'elle tend alors à la construction d'une métaphysique. Dans l'autre cas, elle triomphe dans l'établissement de systèmes axiomatisés, c'est-à-dire dans la possibilité de réduire un savoir quelconque à ses composants élémentaires, à très peu de choses en vérité : quelques axiomes, plusieurs définitions opératoires et diverses formes de déductions (implication, démonstration par l'absurde, raisonnement par contraposée...).
L'une des orientations est l'idéalisme, l'autre le formalisme de la pensée. Et il existe ou existera toujours un antagonisme entre ces deux orientations ou préférences quant à l'usage de la raison.

Revenons au nombre.
Idéalisme *versus* formalisme. Pour les uns, le nombre est une quantité tirée de l'observation, une quantité abstraite du réel perçu et stabilisée par un nom ; pour les autres, c'est une classe d'entités fictives construite par l'esprit qui n'a de sens qu'à l'intérieur d'un système formel d'énoncés.
Le nombre apparaît comme une quantité. On découvre en effet dans la nature des quantités (discrètes ou continues, extensives ou intensives). Une quantité c'est une multiplicité de choses, partant quelque chose qu'on n'invente pas, mais découvre devant soi, hors de soi, perçoit, évalue vaguement ou précisément. Prenons le cas simple de la quantité discrète extensive, qui occupe de l'espace . Il y a tant de chaises dans cette classe. Comptons. Il y en trente-six. Et les nuages dans le ciel... aujourd'hui il y en a beaucoup, hier il y en avait aucun, demain peut-être y en aura-t-il trois ?
Les quantités se découvrent dans le monde. Mais nul ne découvre de classes dans la nature, seulement des choses qui se ressemblent ou qui semblent différer suivant leurs caractéristiques apparentes (qualités secondes perçues par les sens) ou leurs natures (liées à la possession de qualités premières, forme et matière) ; l'esprit construit l'idée de classe avant de l'appliquer à des choses diverses, réelles ou imaginaires, actuelles ou non. Il use pour cela de la fonction symbolique du langage, des mots de la langue. D'où la classe des choses rouges, des animaux qui ont des cornes, des jours fériés... ainsi « 36 » c'est le nom du nombre trente-six, et ce dernier n'est pas autre chose que le point commun des classes, toutes, quelle qu'elles soient, qui possèdent trente-six éléments. C'est la classe de toutes les classes à trente-six éléments.
Quantité ou classe, il n'y a pas là deux manières de s'exprimer ou de communiquer qui diffèrent mais il y a deux manières de penser le nombre qui s'opposent radicalement malgré tous les rapprochements par ailleurs possibles – le fait par exemple de considérer ou non les nombres

comme des idées, par exemple, si les uns et les autres pensent le nombre comme une abstraction, une entité séparée ou séparable des choses réelles.

Cet antagonisme épistémologique a une dimension historique mais ne s'y réduit pas.
Il apparaît à l'historien des idées que l'assimilation du nombre à une quantité déterminable objectivement car mesurable d'une manière ou d'une autre a été première. Elle est exposée aussi clairement que possible dans l'œuvre d'Euclide.
Euclide est d'abord un géomètre. Et dans ses *Eléments* il est d'abord question de lignes, d'angles, de figures puis de longueurs, d'aires, de surfaces, avant que le nombre soit abordé comme tel.
Dès le livre I, le mathématicien dégage des axiomes (ou notions communes) comme « *Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles* » ou bien « *Le tout est plus grand que la partie* ». C'est alors naturellement si on peut dire qu'on passe de l'idée de grandeur à celle de nombre, à partir du livre VII. Ce qui l'intéresse d'ailleurs est moins la question de la nature du nombre que certaines espèces de nombre, dont les nombres premiers au sujet desquels il propose quelques démonstrations remarquables (d'une part, il prouve que tout nombre entier supérieur à 1 est soit premier, soit le produit unique de nombres premiers ; d'autre part il démontre que la liste des nombres premiers est infinie).

- Définition 1, l'unité est selon quoi chacune des choses existantes est dite une.
- Définition 2, un nombre est un assemblage composé d'unités
- Définition 3, un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand. Être partie signifie ici être diviseur.
- Définition 5, un nombre est multiple d'un nombre, le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit.
- Définition 6, le nombre pair est celui qui peut être divisé en deux parties égales.
- Définition 7, le nombre impair est celui qui ne peut pas se partager en deux parties égales, ou bien celui qui diffère d'une unité du nombre pair.
- Définition 12, le nombre premier est celui qui est mesuré par l'unité seule.

Pour une appréciation de la pensée véhiculée dans les livres d'arithmétique d'Euclide :
http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1964_num_17_2_2333

Il est possible d'utiliser l'expression d'approche ou de perspective euclidienne pour désigner cette conception savante du nombre mais limitée, pas encore consciente d'oppositions fondamentales comme celle des ordinaux et des cardinaux, ne raisonnant pas encore en termes d'ensembles et d'éléments (mais en termes de tout et partie). La perspective euclidienne est déjà formalisée et donc détachée de la numération pratique. Mais elle est insuffisamment homogène pour ne pas donner l'illusion que l'arithmétique est une sorte de champ de découvertes successives, toutes importantes, aucune n'étant déterminante.

Des écoles de pensée irréductiblement opposées

S'inscrivant dans une perspective euclidienne, nombreux sont les penseurs, d'Aristote à Bergson (et au-delà), à avoir souhaité rendre compte des nombres « naturels » en se penchant sur l'histoire de leur découverte dans une perspective ni strictement historique (pour affronter la question de l'existence en droit et pas seulement en fait des nombres) ni directement génétique (pour ne pas réduire l'enquête à des considérations psychologiques jugées inessentielles). Ces penseurs sont à la recherche de l'intuition du nombre. Ils raisonnent en prenant en compte les caractéristiques idéales des nombres, en se donnant même parfois pour but d'inclure dans une même définition générale tous les types de nombre, les nombres entiers et les autres... considérant que, par principe, tout nombre doit partager avec les entiers les mêmes caractéristiques essentielles.
Écoutons Bergson, qui s'exprime sur la nature du nombre dans l'Essai sur les données immédiates de la conscience, chapitre II :

« *Tout nombre est une collection d'unités* […] *et d'autre part tout nombre est une unité lui-même, en tant que synthèse des unités qui le composent. Mais le mot unité est-il pris dans les deux cas avec le même sens ? Quand nous affirmons que le nombre est un, nous entendons par là que nous nous le représentons dans sa totalité par une intuition simple et indivisible de l'esprit : cette unité renferme donc une multiplicité, puisque c'est l'unité d'un tout. Mais lorsque nous parlons des unités qui composent le nombre, ces dernières unités ne sont plus des sommes, pensons-nous, mais bien des unités pures et simples, irréductibles, et destinées à donner la série des nombres en se composant indéfiniment entre elles. Il semble donc qu'il y ait deux espèces d'unités, l'une définitive, qui formera un nombre en s'ajoutant à elle-même, l'autre provisoire, celle de ce nombre qui, multiple en lui-même, emprunte son unité à l'acte simple par lequel l'intelligence l'aperçoit*. »
Le nombre est issu d'une intuition totalisante. Il est manipulable et décomposable par l'intelligence qui cherche et trouve la multiplicité derrière l'unité.

Moins nombreux en philosophie sont les penseurs à avoir opté pour l'autre voie. Pour que l'idée du nombre inventé par l'esprit humain s'impose contre celle du nombre découvert par la raison, il fallait sans doute que soient réunies plusieurs conditions.

- D'abord, première condition essentielle, l'exemple devait être donné par les inventeurs eux-mêmes, c'est-à-dire les mathématiciens. Le philosophe voulant rendre compte de l'invention du nombre par l'esprit humain doit être extrêmement modeste. Il ne doit donner de règles ou même de conseils pour appréhender le nombre au mathématicien. Il doit d'une certaine manière se contenter de dégager l'épistémologie implicite de la pensée du mathématicien... se rappelant qu'il est comme Socrate, un ignorant. Il se doit à lui-même de refuser le baratin, Et il doit aux autres de refuser de se lancer dans de stériles querelles. Conservant le silence au lieu, par exemple, de juger du haut de sa science ou de ses certitudes fondées en raison, que tel procédé est indigne de l'esprit humain – on se souvient de Berkeley fustigeant le calcul infinitésimal (ou différentiel) au nom de la Rigueur, dans le pamphlet <u>L'Analyste</u> (1734) où il est catégoriquement défendu de prétendre pouvoir atteindre l'infini quand on est soi-même fini. Bien sûr, dès lors qu'on se livre à la « simple » tâche de suivre le mathématicien dans la progression de ses raisonnements, en utilisant les définitions suivant leurs propriétés opératoires, on se rend compte à quel point cette tâche qui consiste à suivre le mathématicien dans ses raisonnements est exigeante et engage de la part du philosophe une herméneutique, un travail d'interprétation qui ne se réduise pas à lancer, ici, des approbations ou proférer, là, des menaces !
- Ensuite, deuxième condition qui prolonge la première mais ne s'y réduit pas, il fallait que le mouvement d'axiomatisation de l'arithmétique soit mené à bien, et ce, non pas pour que l'humanité dispose enfin de nombres rigoureusement construits – ce qui est le cas, certes, seulement à la fin du XIX^e^ siècle à partir de travaux comme ceux de Dedekind <u>Was sind und was sollen die Zahlen</u> (1888), Peano et Frege – mais pour que soit enfin reconnue la difficulté théorique de cette axiomatisation et donc le progrès qu'elle incarne dans l'ordre de la raison théorique. Penser le nombre comme classe suppose qu'on adopte à l'égard de la raison l'idée que ce n'est pas une faculté mais une puissance qui se développe. Elle se développe organiquement pourrait-on dire en conquérant successivement divers cadres théoriques ou structures, en forgeant des axiomatiques, en inventant des manières de penser (le raisonnement par récurrence, par exemple) et en se satisfaisant de moins en moins de l'évidence.
- Enfin, dernière condition, il fallait qu'une approche métaphysique du nombre soit totalement et définitivement dépassée. Il fallait que la métaphysique comme science des principes éternels soit enfin considérée comme illusoire, comme nulle et non avenue, morte de sa belle mort... il s'agit bien sûr du renoncement à l'idée de nombres divins, éternels, anhypothétique, un adieu au Nombre pythagoricien pouvant créer le monde dans son ordre voire sa réalité même. Le Nombre devenant purement et simplement un élément du folklore de la philosophie archaïque ou de la pensée pré-scientifique. Insistons une dernière fois sur cette

idée décisive ; Il fallait, suivant cette condition psychologique comme historique, que l'être humain assume seul son statut prométhéen de créateur, d'inventeur des nombres. C'est lui qui crée la réalité du nombre, et pas le Nombre qui aurait créé le réel.

Une des premières fois dans l'histoire de la philosophie, l'Introduction à la philosophie mathématique de Bertrand Russell (1919) présente cette approche rénovée du nombre comme invention des hommes au cours des siècles, les mathématiciens formant une société élaborant progressivement un langage pour pouvoir s'accorder sur l'essentiel. Les trois premiers paragraphes du second chapitre de ce grand livre témoignent de la prise conscience des erreurs répétés des anciens, comme quoi plus rien ne sera comme avant :
« *Qu'est-ce qu'un nombre ? Cette question a été souvent posée, mais c'est seulement à notre époque qu'elle a reçu une réponse correcte. C'est Frege qui l'a donnée dans le*s Grundlagen der Arithmetik. *Bien que très court, peu difficile, et de la plus haute importance, cet ouvrage passa presque inaperçu, et la définition de la notion de nombre qu'il renferme demeura pratiquement inconnue jusqu'à sa redécouverte par l'auteur de ces lignes, en 1901 (dans les* Principles of Mathematics).
La première chose à faire, dans le cadre de cette recherche, est de clarifier ce qu'on peut appeler la grammaire de notre enquête. Alors qu'ils s'efforçaient de définir le nombre, les philosophes se sont souvent occupés de définir la pluralité : or ce sont là deux idées tout à fait distinctes. Être un nombre*, est ce qui caractérise les nombres, comme* homme *caractérise les êtres humains. Une pluralité de choses n'est pas une instance de la notion de nombre, mais d'un nombre particulier. Un groupe de trois hommes par exemple est une instance du nombre 3, et le nombre 3 une instance du concept de nombre ; mais le groupe de trois n'est pas une instance du concept de nombre. Ce point peut sembler élémentaire et indigne d'être noté, et pourtant il s'est avéré trop subtil, à quelques exceptions près, pour les philosophes.*
Un nombre particulier n'est pas la même chose qu'une collection contenant ce nombre d'objets : le nombre trois n'est pas la même chose que le trio constitué de Brown, Jones et Robinson. Le nombre 3 est quelques chose que tous les groupes de trois ont en commun, et qui les distingue des autres collections. Un nombre est une caractéristique de certaines collections, précisément de celles qui ont ce nombre d'éléments.
Plutôt que de parler de « collection », nous dirons ordinairement « classe » ou parfois « ensemble ».»

B. Passage du bon sens à la raison pour parvenir à la détermination de l'essence du nombre

Efforçons-nous d'éviter l'affrontement direct des systèmes et représentations. Et essayons d'affiner notre jugement, en nous penchant sur des raisons alléguées, quelques raisonnements produits pour cerner la nature du nombre.

Étude d'une définition non polémique, à destination de l'honnête homme

Si l'on y prend garde, des penseurs comme d'Alembert, dans son Encyclopédie méthodique, tome II Les mathématiques (1789) adoptaient déjà un point de vue critique sur la nature du nombre. Ou plutôt adoptaient déjà une perspective dans laquelle le nombre n'est pas une découverte fondamentale de l'esprit humain mais bien une invention...
Vérifions-le par une lecture attentive. Dans sa définition, d'Alembert présente d'abord le nombre comme caractéristique de certaines collections, avec Euclide, puis évoque la thèse de Newton (p. 465) sensiblement différente.
« *Nombre : se dit vulgairement dans l'arithmétique d'une collection ou assemblage d'unités ou de choses de la même espèce.*
M. Newton définit plus précisément le nombre non pas une multitude d'unités, comme Euclide, mais le rapport abstrait d'une quantité à une autre de la même espèce, que l'on prend pour l'unité ;

d'après cette idée, il divise les nombres en trois espèces, savoir, nombres entiers, c'est-à-dire qui contiennent l'unité un certain nombre de fois exactement et sans reste, comme 2, 3, 5 etc., les nombres rompus ou fractions, et les nombres sourds ou incommensurables. (...)»
D'Alembert oppose ainsi une définition « vulgaire » à une définition savante La première ne retenant guère du nombre que son pouvoir de quantifier, en s'appliquant à des choses différentes indifféremment de leurs différences. C'est le nombre « *collection de* » ou simple « *multitude d'unités*» en supposant que l'on décide que les choses comptées sont bien des unités, ayant toutes un point commun. Par exemple, la collection de mes vêtements qui ont au moins comme point commun que d'être à moi, dans ma penderie. La seconde définition présente le nombre comme une abstraction. Ce n'est pas une quantité quelconque mais un quelconque rapport entre deux quantités. Ce rapport suppose l'usage d'un terme de comparaison, « *unité* » de base, ou quantité qu'on « *prend pour* » référence lors d'une mesure. Arbitrairement. Souverainement.
La création de cette « unité » jouant pour le nombre le rôle que joue une métrique pour la mesure est l'attestation du caractère inventé du nombre, produit par l'acte du mathématicien. Invention qui étant ce qu'elle est en raison du vouloir du mathématicien peut toujours être différente, soit qu'on change de langage pour dire le nombre (adoptant une base d'écriture du nombre, le binaire ou la base douze), soit même qu'on change la nature des nombres pour correspondre à certains types de problèmes (produisant des nombres qui sont des fractions pour déterminer des partages, par exemples des parts d'héritage).
Dans le reste de la définition de son Encyclopédie, comportant plus de quatre pages, notre mathématicien-philosophe remonte le temps et évoque le nombre comme quantité, suivant l'opinion des anciens (p. 466). Il ajoute alors dans sa foulée quantité de précisions sur les différentes types de nombre (pairs, impairs, premiers, composés, parfaits, carrés, cubiques, triangulaires, oblongs, cardinaux, ordinaux, proniques, sursolides...) (pp. 466-468). Enfin, il termine par l'évocation de nombres qui ne sont « nombre » que par synonymie, les nombres de Pythagore (pp. 468-469) censés être les constituants de la réalité. D'Alembert qualifie de folie la « *théologie arithmétique* » du célèbre penseur de l'antiquité.
http://books.google.fr/books?id=JuzmAAAAMAAJ&pg=PA466&lpg=PA466&dq=nombre+quantité&source=bl&ots=7u3bpOW3QP&sig=NY4CaXZ7Bc-laTZvfYtx0VmrSOI&hl=fr&sa=X&ei=YWVeUp-1NI7v0gXm8oEw&ved=0CDsQ6AEwAjgU#v=onepage&q=nombre%20quantité&f=false

Collection ou rapport abstrait ?

Que se passe-t-il quand on troque une définition aisée à comprendre « *collection ou assemblage d'unités ou de choses de la même espèce* » pour une définition un peu moins facile à comprendre mais sans doute plus réfléchie « *rapport abstrait d'une quantité à une autre de la même espèce, que l'on prend pour l'unité* » ?
Gagne-t-on seulement en rigueur ?

Ce que l'on peut dire avec d'Alembert (et quantité d'autres qui l'ont suivi, Laplace, Euler, E. Develey...) est qu'on ne se contente pas de substituer une définition courte et incomplète à une définition plus complète. Il y a bien un changement de perspective. Avec la perspective euclidienne sur le nombre on envisage un processus d'abstraction concernant des choses du monde idéalisées pour être comptabilisées ou assemblées en un tout, alors qu'avec Newton l'abstraction concerne un rapport, une opération de l'esprit. Reprenons le passage essentiel de cette définition, le nombre est un « *rapport abstrait d'une quantité à une autre* » : il peut avoir une origine purement arithmétique ou bien géométrique. Il peut avoir partie liée à une opération comme le calcul intégral, une origine algébrique.
Ce changement de perspective pourrait encore être interprété, au risque peut-être de tomber alors dans la surinterprétation. Interprété de la manière suivante : à une définition permettant à la foule de s'accorder sur ce que veut dire le mot « nombre » on passerait à une définition ne remplissant pas

cette fonction d'explicitation mais une autre, celle de l'exemplification ! Ce que veut nous dire d'Alembert c'est que la création des nombres est un processus fécond, non pas parce que celui qui sait produire des nombres peut en créer une infinité de même nature mais parce qu'il peut en créer de diverses natures ! La définition est en un sens opératoire. Elle permet en effet de répondre à la question de l'essence en montrant quel usage est effectivement fait des nombres. Par le rapport qui le constitue, le nombre entier permet des divisions sans reste entre certains entiers, le nombre fractionnaire, quant à lui, permet des divisions entre tous les entiers. Et le nombre incommensurable est une construction qui provient du rapport qui existe entre carrés et leur racine, quand les carrés ne sont pas commensurables avec elles.
Le choix des trois exemples, dans l'ordre historique mais aussi génétique de leur création (N, ensemble des entiers naturels, Q, ensemble des rationnels, R ensemble des réels – en adoptant le symbolisme des mathématiques aujourd'hui enseignées) n'est pas anodin. D'Alembert nous fait comprendre en les incluant dans sa définition que l'invention des nombres est une sorte d'aventure qui s'appuie sur le progrès des mises en relation entre les nombres déjà existants, elles-mêmes de plus en plus complexes.

Le nombre est issu d'une audace croissante de l'esprit, repoussant de plus en plus, palier après palier, les obstacles psychologiques à la généralisation des opérations sur les couples de nombres, approfondissant par degré sa maîtrise des quantités discrètes ou bien continues.

C. La variété des nombres

Après l'évocation du zoo des variétés de nombre par d'Alembert, une interrogation, à nous léguée par Aristote et ses successeurs, s'impose, qui s'énonce ainsi : un nombre est-ce par rapport à un autre nombre une chose du même genre ou bien une chose de la même espèce ?
Pour comprendre cette interrogation apparemment curieuse, il est nécessaire de rappeler la classification naturelle des noms auquel Aristote recourt habituellement (mais surtout lorsqu'il s'agit du vivant...). Il existe des noms propres, désignant des individus singuliers ; des noms communs désignant tous les individus faisant partie d'une même espèce ; et des noms regroupant dans une même désignation, celle du genre, toutes les espèces apparentées. L'abstraction suit donc un gradient, en s'élevant d'abord de l'individu unique à l'espèce, espèce qui unifie en passant outre les différences individuelles puis en s'élevant de l'espèce unique au genre, genre unifiant les espèces, en abolissant par la pensée leurs différences spécifiques. Il y a ainsi, liée au langage qui découpe le réel et l'ordonne en grandes unités de signification, trois catégories ontologiques, celle de l'individu, de l'espèce et du genre.
Qu'en est-il du nombre ?
1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. sont-ce des individus d'une même espèce ? Ou bien sont-ce des espèces d'un même genre ?

Un peu de taxonomie, la vaste famille des nombres

Ce qui va suivre n'est peut-être qu'une suite de sophismes, mais mérite néanmoins d'être exposé et, avant d'être rejeté, d'être soumis à l'appréciation critique. L'esprit ressent en effet avec le nombre une sorte de besoin métaphysique et se plaît à user d'analogies.

Il semble que les nombres soient des individus, tous différents, mais faisant partie d'une même espèce. À l'instar de différentes pièces de monnaie de valeur différente, en fonction de leur poids de matière précieuse (le denier valant 2 quinaires car pesant deux fois plus que le quinaire, le quinaire valant 2 sesterces, car pesant deux fois plus que le sesterce).
Mais la comparaison du nombre avec des objets matériels n'est pas sans poser problème. Car si l'on établit maintenant une analogie avec d'autres monnaies, l'as de bronze, le sesterce d'argent et le *solidus* d'or, on a plutôt à l'idée que les nombres pourraient être d'espèces différentes ! Composant

ensemble non une même espèce mais un même genre !
Répondre justement à la question posée nécessite de revenir, dans un premier temps – avant de faire jouer la contradiction – à des textes précisant la nature du nombre, à l'instar des livres de la Métaphysique, tout en sachant que ceux-ci font la plupart du temps référence à d'autres textes, pour nous perdus, comme les cours de Platon sur la théorie du nombre. On peut s'aider de nombreux commentaires, comme ceux d'Averroès ou de Thomas d'Aquin... à moins que ceux-ci, en introduisant une perspective sensiblement différente, historiquement datée, ne compliquent la réponse au lieu de la simplifier.

Dans le cadre de cette étude, nous nous efforcerons d'aller à l'essentiel, quitte à caricaturer certaines positions. Mélangeons donc lecture de quelques textes de référence et commentaires même très tardifs.
Deux raisonnements se dégagent assez nettement.
D'une part, il convient de réfléchir à ce que nous considérons comme l'unité. Il y a l'Unité, principe ontologique du nombre. Et, l'unité logique de chaque nombre, composée d'unités plus petites. 2, c'est II ; 3 c'est 2+1 ou III ; etc. Alors « un » comme Unité n'est pas un nombre, mais un genre en soi. Et l'ensemble des nombres générées par l'esprit humain (1, 2, 3,...) à partir de lui sont un même genre.

D'autre part, il faut tenir compte de la variété des nombres. Comme continue à le faire sciemment Leibniz, dans son opposition aux idées simplificatrices de Locke exposées dans son Essai concernant l'entendement humain (1690) ! L'empiriste déclarait « *les différents modes des nombres ne sont capables d'aucunes autres différences que du plus ou du moins* ». La réplique du Livre II, chapitre XVI des Nouveaux Essais sur l'entendement humain (1703) tombe : les nombres sont « *non seulement différents en grandeurs mais encore dissemblables. Un nombre pair peut être partagé en deux également et non pas un impair. Trois et six sont nombres triangulaires, quatre et neuf sont carrés, huit est cube etc*. » Et plus loin Leibniz ajoute perfidement « *Mais je ne m'étonne pas qu'on se trompe là-dessus, parce que communément on n'a pas d'idée distincte du semblable et dissemblable* ».
Les nombres ne sont pas seulement nombreux mais encore variés, dissemblables, peut-être infiniment pour un entendement infini !
Il y a ces nombres pairs ou impairs, triangulaires, carrés ou cubes... et plein d'autres encore. Un nombre premier comme 7 n'est pas semblable à un nombre qui ne l'est pas, comme 6 ou 8, qu'ils soient plus grands ou plus petits que lui. On en conclut qu'il y a un genre regroupant toutes ces espèces de nombres, 2, 3, 4, 5, 6 etc.

Repenser la découverte ou l'invention des nombres

Ces discussions qui n'ont rien de strictement mathématique reposent moins sur des idées concernant la nature purement logique **du** nombre que sur les valeurs et propriétés spéciales **des** nombres.
Si les nombres sont nombreux et variés ou dissemblables, c'est qu'ils possèdent diverses valeurs : le nombre 1 ayant par exemple valeur d'unité pour le métaphysicien qui le considère alors comme un principe du nombre plutôt qu'un nombre commun. Une propriété quelconque, le fait d'être un nombre pair ou premier, ou cube etc. peut également être considérée comme ce qui donne de la valeur à un nombre donné. Si, par peur de la confusion qu'introduisent fatalement l'idée de valeur dans l'ordre de la pure logique et le raisonnement par analogie, nous renonçons à défendre plus avant la vérité de ce genre de conclusions sur la nature des nombres, nous risquons de passer à côté d'idées qui sont intéressantes.

Comment interpréter de manière générale la variété des nombres ? Faut-il l'interpréter comme le signe de la richesse du réel comprenant une foule d'objets incroyables pour le vulgaire et même souvent le savant ? Ou bien faut-il l'interpréter comme l'effet de la formidable puissance de conception de l'esprit humain, de son génie propre ?

La production des nombres comme normes

D'abord, la réalité ontologique du nombre apparaît comme indiscutable mais également comme très problématique. La nature des nombres est nécessaire ; on est poussé à penser qu'en droit l'ensemble de leurs propriétés serait décidable (mettons Gödel de côté... car cela n'a pas de sens de faire intervenir sa démonstration d'indécidabilité avant même que n'existe un système logique cohérent comme celui de Frege ou de Russell).
Le nombre est-il en lui-même une découverte de l'esprit humain ?
La première vérité sur le nombre semble être qu'il existe ou qu'il subsiste. Et qu'il est découvert par l'être humain parce que, précisément, il est quelque part potentiellement avant que d'exister pour nous, dans nos calculs ou bien dans nos énoncés sur le monde.

Considérons le début des *Remarks on the Foundations of Mathematics* de Wittgenstein (cité par A. Ayer, 1985) qui met en relief le caractère étrange de l'inférence logique, en questionnant ce que veut dire « *inférer ce qui suit réellement* » ? et en prenant l'exemple de la stabilité du résultat d'une addition :
« *Mettez deux pommes sur une table nue ; veillez à ce que personne ne s'en approche et à ce que rien ne fasse bouger la table ; placez à présent deux autres pommes sur la table ; comptez maintenant les pommes qui se trouvent là. Vous vous êtes livrés à une expérience. Le résultat est probablement 4. (Nous devrions présenter le résultat de la manière suivante : lorsque, dans telles ou telles circonstances, quelqu'un place d'abord deux pommes sur une table, puis deux autres, le plus souvent aucune ne disparaît et aucune n'est ajoutée.) Et des expériences analogues peuvent être conduites, aboutissant au même résultat, avec toutes sortes de corps solides. C'est ainsi que nos enfants apprennent le calcul ; car on leur fait poser trois haricots puis trois autres, et on leur fait ensuite compter ce qu'il y a là. Si le résultat était une fois 5, une autre fois 7 (disons parce que, comme nous devrions le dire maintenant, l'un se trouve parfois ajouté, l'un parfois disparaît de lui-même, alors la première chose que nous dirions serait que les haricots n'étaient pas bons pour enseigner le calcul. Mais si la même chose se produisait avec des bâtonnets, des doigts, des lignes et la plupart des autres choses, ce serait la fin de tout calcul. «* Mais n'aurions-nous pas toujours 2+2=4 ? *» cette phrase serait devenue inutilisable.* »

On voit bien avec cette façon de traiter l'exemple que les propositions mathématiques sont essentiellement normatives. Les nombres ne sont donc pas des objets simples, des états de choses ou des faits, pour reprendre les catégories du Tractatus logico-philosophicus mais ce sont des normes !

La production de vérités sur les nombres

Si le nombre est lui-même en tant que norme, toujours opposé au simple fait empirique, une invention, qui doit tout à ceux qui le pensent et qui n'est donc que ce qu'ils arrivent à penser lorsqu'ils le pensent, les propriétés des nombres qui en font des espèces dissemblables pourraient en revanche être des découvertes un jour réalisées par l'esprit humain ou pouvant être réalisées en droit !
Après avoir considéré attentivement le nombre, il est venu à l'idée de quelqu'un, une première fois dans toute l'histoire, qu'il existe deux types de nombres, les nombres premiers et les autres. Et cette idée n'est pas moins objective, partageable par tous, que subjective, portée par un sujet. Une autre première fois historique est à considérer. Bientôt un curieux arrive en effet à produire une démonstration sur ces nombres premiers, prouvant qu'il n'existe pas de plus grand entier premier ou qu'il doit en exister une infinité. Par les démonstrations qu'il élabore, ce mathématicien semble découvrir une vérité éternelle...

Il existe une infinité de nombres entiers. Voici la démonstration originale d'Euclide, Éléments, Livre IX, proposition 20 :
« *Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée.* »
Démonstration :
« Soient les nombres premiers proposés A, B, C. Je dis que les nombres premiers sont plus nombreux que A, B, C.
En effet, que soit pris le plus petit [nombre] mesuré par A, B, C, et que ce soit DE et que l'unité DF soit ajoutée à DE. Alors ou bien EF est premier ou bien non.
D'abord qu'il soit premier ; donc sont trouvés les nombres premiers A, B, C, EF plus nombreux que A, B, C.
Mais alors que EF ne soit pas premier ; il est donc mesuré par un certain nombre premier (VII.32). Qu'il soit mesuré par le [nombre] premier G. Je dis que G n'est pas le même que l'un quelconque des A, B, C. En effet, si c'est possible, qu'il le soit. Or A, B, C mesurent DE ; donc G mesurera aussi DE. Mais il mesure aussi EF : il mesurera aussi l'unité DF restante tout en étant un nombre ; ce qui est absurde. G n'est donc pas le même que l'un des A, B, C. Et il est supposé premier.
Donc sont trouvés les nombres premiers A, B, C, G, plus nombreux que la multitude proposée des A, B, C.
Ce qu'il fallait démontrer. »
Si A, B, C, G sont « *trouvés* » plus nombreux que A, B, C, c'est que G serait une « découverte » de la raison. Il n'en est rien. Car G n'est pas un nombre mais une invention de nombre. Quand Euclide affirme que « *sont trouvés les nombres premiers A, B, C, G, plus nombreux que la multitude proposée des A, B, C* », il sous-entend que par un raisonnement équivalent sont trouvés les nombres premiers A, B, C, D, G, plus nombreux qu'une autre multitude proposée, celle des A, B, C et D. Et ainsi de suite. G est bien non un nombre découvert mais un raisonnement inventé (combinant une preuve par l'absurde et une induction mathématique) répétable aussi souvent qu'on veut, utilisable à volonté.

Il n'existe pas de plus grand nombre premier entier ! Exprimons la démonstration dans un langage moderne. Supposons qu'il en existe un, que nous notons « n ». Alors il est possible de multiplier tous les nombres entiers entre eux jusqu'à n, et d'ajouter 1. On obtient ainsi un nombre entier premier plus grand que n ! L'existence de n est donc contradictoire. La raison ne permet pas de découvrir le nombre entier qui soit le plus grand d'entre eux. Mais ce n'est pas parce qu'elle rencontre des limites de fait, parce que notre intelligence est limitée. La raison peut en effet produire un nombre premier plus grand que tout nombre premier qu'on voudra. Il serait donc faux de dire qu'elle a seulement découvert cette impossibilité du plus grand nombre premier ; elle l'a également inventée.
Seuls les faits sont découverts, pas les possibilités ou impossibilités, qui sont inventées par la raison !
L'esprit fait naître un nombre possible (et même une infinité de nombres) qui a (qui ont) telle propriété identifiée (ou telles propriétés), bien qu'il ne connaisse pas encore ce nombre (ces nombres) subjectivement et soit même incapable de le (les) produire ! Parfois la production du (des) nombres s'avère impossible... comme quoi ce pouvoir de faire naître des nombres n'est pas illimité, ni affaire de fantaisie. Il existe donc une vérité subjective mais aussi objective, nécessaire voire éternelle, du nombre en tant que nombre inventé par l'esprit humain !

Des interprétations encore divergentes

Imaginons une transformation qui affecte les nombres en se basant sur leur écriture. Imaginons par exemple, avec Peter Conway, un train de puissances : pour les nombres d'au moins deux chiffres, appliquons p règle de transformer en exposant un de leurs chiffres sur deux en commençant par le chiffre des unités dans le cas des nombres ayant un nombre de chiffres pairs et par le second chiffre dans l'autre cas. Ainsi 78 devient 7^8, soit . 153 devient $1^5 3$ ou bien 1x3=3. La plupart des nombres se transforment en un autre nombre. Mais 2592 se transforme en $2^5 9^2$ qui est égal à 2592. Je viens ainsi d'inventer la classe des nombres résistants à l'écriture en train de puissances. Et je peux émettre une conjecture, au choix :

- « il existe une infinité de nombres entiers résistants »
- « il existe un seul nombre entier résistant, 2592 »
- « il n'existe que 2 nombres entiers résistants, 2592 et 24 547 284 284 866 560 000 000 000 »

La dernière conjecture est due à Neil Sloane (cf. Jean-Paul Delahaye, « la persistance des nombres » 2013).

Ce genre de réflexion peut conduire à une réflexion comme celle d'Hilary Putnam sur l'introduction en mathématiques de démarches expérimentales. Il débouche sur des affrontements entre les plus grands penseurs dès lors qu'il s'agit d'épistémologie, d'interpréter le sens même de l'abstraction, de l'idéalisation ou de la mise en équation des idées mathématiques.

Un épistémologue du XX^e siècle qui se qualifie lui-même d'objectiviste, Karl Popper, à postuler l'existence de mondes, dont le monde 3, qui est celui des théories scientifiques, quand le monde 1 est celui des objets matériels et le monde 2 celui des représentations mentale. C'est dans le monde 3, doté d'autonomie, que les nombres existent. Apparemment, ils y existent avant que quiconque ne les pense, puisque le monde 3 est irréductible au monde 2 et fondamentalement distinct du monde 1, mondes des choses confuses et évanescentes. C'est encore dans ce monde 3 qu'il est toujours vrai qu'il existe une infinité de nombres premiers. Que c'est vrai avant que l'esprit humain n'arrive à le démontrer ou avant même qu'un être humain ne conçoive l'existence de ces nombres qui sont de la famille des nombres « premiers » ! Tout se passe comme si les nombres et autres objets mathématiques étaient découverts par les mathématiciens, mais – convient-il d'ajouter – que sont bien inventés les moyens pour appréhender ces objets (moyens logiques, instruments de preuve, méthodes opératoires... tout ce qui relève de l'accès au monde 3).

Insistant sur le fait que toute découverte en mathématiques repose en réalité sur une invention, une équivalence d'équations inventée par la raison humaine, Wittgenstein dénie quant à lui toute existence (ou non existence) à ces soi-disant découvertes. Comme une suite de trois 7 dans le développement décimal de Pi. Soit ils existent dans un calcul, soit il n'y a pas de sens à dire qu'ils pourraient exister. « *Le mathématicien est un inventeur non un découvreur* », *Remarks on the Foundations of Mathematics*

Alain Connes, fameux mathématicien, lauréat de la médaille Fields, n'hésite pas en revanche à se dire réaliste, platonicien. D'après lui toute invention mathématique ne fait que d'ouvrir la voie pour atteindre une vérité éternelle, indépendante de celui qui la pense et la fait exister pour lui, dans sa tête. L'invention qui fait gloire à l'esprit humain est en réalité secondaire !

Pour plus de précisions sur le monde 3, lire Frédéric Fabre « Refaire le monde 3 »
http://www.dblogos.net/er/index.php?article=ok&titre=txt3.php

L'invention de paradoxes sur les nombres

Cette réalité ontologique des nombres apparemment indépendante de nous n'est pas d'évidence une réalité qui ne doive rien à l'esprit humain ni à sa capacité propre de penser certaines vérités, d'accorder certaines conclusions comme étant nécessaires... voire de produire du sens. On le remarque nettement quand de la démonstration naît un paradoxe que nous ne voudrions pas accepter tellement il apparaît contraire au bon sens !
Galilée, dans son Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles, (1638) nous en donne un merveilleux exemple :

Salviati : *Si je dis que les nombres pris dans leur totalité, en incluant les carrés et les non-carrés, sont plus nombreux que les carrés seuls, j'énoncerais, n'est-ce pas une proposition vraie*.
Simplicio : *Très certainement.*
Salviati : *Si je demande maintenant combien il y a de nombres carrés, on peut répondre sans se tromper, qu'il y en a autant que de racines correspondantes, attendu que tout carré a sa racine et toute racine son carré, qu'un carré n'a pas plus de racine, et une racine pas plus d'un carré.*
Simplicio : *Exactement.*
Salviati : *Mais si je demande combien il y a de racines, on ne peut nier qu'il y en a autant que de nombres, puisque tout nombre est la racine d'un carré ; cela étant, il faudra donc dire qu'il y a autant de nombres carrés qu'il y a de nombres, puisqu'il y a autant de racine, et que les racines représentent l'ensemble des nombres ; et pourtant nous disions au début qu'il y a beaucoup plus de nombres que de carrés, étant donné que la plus grande partie des nombres ne sont pas des carrés.*

La démonstration est imparable : il y a autant de nombres carrés que de nombres, même si tous les nombres ne sont pas, loin de là, des carrés !
La grande différence avec la démonstration euclidienne de l'infinité des nombres premiers est que la conclusion ne peut être acceptée sans interprétation de son sens ! La raison a apparemment produit une conclusion monstrueuse. Comment légitimer cet « enfant » ? Poursuivons la lecture de l'œuvre de Galilée :
Simplicio : *Qu'en conclure dans ces conditions ?*
Salviati : *À mes yeux la seule issue possible est de dire que l'ensemble des nombres est infini, que le nombre des carrés est infini, et le nombre de leurs racines pareillement ; que le total des carrés n'est pas inférieur à l'ensemble des nombres, ni celui-ci supérieur à celui-là, et, finalement que les attributs "égal", "plus grand" et "plus petit" n'ont pas de sens pour les quantités infinies, mais seulement pour les quantités finies.*

Tout aussi objective que la précédente conclusion, car forgée par la raison et inattaquable par la raison, la vérité obtenue n'en reste pas moins très subjective et incertaine, pouvant avoir aux yeux des uns et des autres telle ou telle « *issue* ».
Or celle qui saute aux yeux de Galilée n'est absolument pas celle que peut retenir le mathématicien aujourd'hui. En effet, cette façon d'opposer les collections finies et infinies est typiquement une solution *ad hoc* à un problème théorique, demeurant en suspens. Ce n'est guère qu'un artifice de langage. Là encore un renversement de perspective est possible.
Que faire ? Non pas opérer une distinction sur des objets considérés comme définis mais revenir sur leur définition. Dans notre cas, il s'agit de rien moins que de redéfinir l'infini (et le fini) ! Un ensemble sera dit infini dès lors qu'une bijection peut-être établi entre son tout et une de ses parties – un ensemble sera en revanche dit fini quand ce n'est jamais possible. Certes cette définition du nombre cardinal infini ruine une demande d'Euclide les plus évidentes, précédemment évoquée, « *Le tout est plus grand que la partie* ». Mais elle n'est pas folle pour autant. Elle n'est pas non plus commode pour sortir d'un mauvais pas ou seulement utile pour esquiver le paradoxe contenu dans la démonstration de Galilée. En tout point elle est conforme à l'esprit des mathématiques, qui préfère une définition opératoire à une définition d'essence (en l'occurrence négative, l'infini étant défini comme la grandeur plus grande que toute grandeur finie).
Bertrand Russell, en particulier, insiste dans son œuvre sur la nécessité du renversement à accomplir. Ce renversement de perspective est économe en moyens, fécond de surcroît car produisant les nombres finis ou infinis de manière homogène, faisant disparaître par contrecoup les discussions interminables et indécidables sur les espèces d'infinis, actuel ou potentiel.

Transition. Rendre compte de tous les nombres ?

On peut en venir à une idée pragmatique, raisonnable, concernant la valeur de nos perspectives sur le nombre et des définitions auxquelles elles aboutissent nécessairement, en toute cohérence rationnelle.

Trois façons d'apprécier les théories se combineraient :

- est-ce que la définition permet de rendre compte des nombres aujourd'hui les plus communs ? i.e. les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 du pavé numérique des ordinateurs
- est-ce que la définition permet de rendre compte de nombres plus étranges, pour une raison ou une autre, comme ¾, √2, π, ∞ ? nombres qui peuvent être extraits de la liste des caractères spéciaux d'un traitement de texte de base.
- est-ce que la définition permet de rendre compte de l'existence d'autres nombres encore, dont souvent on ne connaît pas l'existence quand on n'est pas un mathématicien ? Par exemple les nombres complexes, comme 5i. Ou bien aleph 0, aleph 1.

Mais pour ne pas manquer de respect à l'égard des pensées les plus vénérables et tout réduire à l'affrontement truqué de deux Grandes Perspectives au cours de l'histoire, nous n'appliquerons pas brutalement ces trois critères.
Il s'agira plutôt d'approfondir notre compréhension des deux idées du progrès de nos connaissances, celle qu'on doit à l'esprit métaphysique parfois fort savant en mathématiques et celle liée à la pensée scientifique, formelle ou expérimentale, peut-être toujours empreinte de métaphysique.

Deuxième partie. Approfondissements

Dans cette seconde partie nous nous concentrerons sur deux œuvres, celle de Bergson et celle de Russell.

Nous ne les mettrons pas sur le même plan. Toutes les deux sont très estimables. L'une est sans doute préférable à l'autre, à partir du moment où on arrive à les comprendre l'une et l'autre. À chacun de se faire une idée !
Ce qui semble assuré, car issu de l'expérience, c'est que les deux œuvres ne mobilisent pas de la part de leur lecteur les mêmes ressources.
L'une fait explicitement fonctionner des images, des images de collections. Elle déploie son arsenal de raisons pour vaincre des préjugés et épouser l'acte de l'esprit qui découvre le nombre, le met en œuvre et en informe la réalité (si l'on peut s'exprimer ainsi). L'intuition est ainsi requise, qui seule peut saisir le réel, l'immédiatement certain, regarder en face les évidences sans en être comme aveuglée. L'autre en revanche réduit le nombre à l'élémentaire, ne daigne pas même se soucier d'évidences, ni d'idées certaines acquises par l'expérience, ni de principes immédiatement ou instinctivement mis en œuvre par l'intelligence. Ce discours épistémologique dépouille ainsi l'enquête sur la réalité du nombre de tout contenu psychologique pour ne considérer que les relations logiques qui sont littéralement l'essence du nombre, à la fois sa possibilité subjective et sa nécessité objective.

Deux aveux maintenant semblent s'imposer, puisqu'il a été question d'expérience, d'expérience de lecture.

N'étant pas spécialement doué pour l'intuition j'ai tendance à douter que d'autres le soient. Et à douter que l'espèce humaine tout entière soit dotée de ce formidable sixième sens[1]... Un peu comme un aveugle qui ne peut arriver à comprendre ce que sont les couleurs malgré tous ses efforts, toute sa bonne volonté.
J'interprète donc l'intuition comme une sorte de talent qui est d'autant plus vif que l'esprit se croit obligé de contredire une opinion durablement établie ou un préjugé peut-être indéracinable. L'intuition d'un philosophe se réveillerait au moment précis où il lui faut parvenir à contrer certaines idées déplaisantes. Il s'agirait de transmettre un enthousiasme, une fougue, en suggérant à un lecteur certaines images ou bien encore en gagnant sa confiance pour pouvoir procéder à certaines analogies, toujours risquées.
Cette hypothèse nous fournit le fil directeur de notre lecture du chapitre II de l'Essai sur les données immédiates de la conscience : suspecter dans chaque affirmation de Bergson ou presque une visée polémique, chercher quels peuvent être les adversaires de Bergson, les identifier le plus précisément possible, faire valoir la thèse métaphysique défendue comme une sorte de réponse anticipée à toutes les objections qui en retour pourraient être faite.

Étant passablement ignorant aussi bien en logique qu'en mathématiques, ne comprenant souvent que de manière superficielle les démarches ou les méthodes utilisées, l'œuvre de Russell me pose un autre type de problème. Être le plus prudent permet sans doute de suivre ses méandres mais pas de porter un jugement critique sur ce qui a été effectué. Il m'est permis d'apprécier la cohérence du propos, quand Russell s'abaisse à me parler, en vulgarisant sa pratique. Mais il m'est strictement impossible d'apprécier la consistance du discours ainsi produit, je veux dire par là que seul il m'est impossible d'évaluer la pertinence de l'ensemble de la démarche.
Je devrai donc recourir à l'avis de spécialistes pour mettre en perspective la thèse de Russell, une fois le travail de décryptage effectué, une fois le second chapitre de l'Introduction à la philosophie

1 Ce refus de l'intuition bergsonienne est loin d'être isolé. On le retrouve par exemple chez un lecteur de Bergson qui apprécie grandement l'ensemble de l'oeuvre, Gabriel Marcel. Cf. L'immédiat chez H. Bergson et G. Marcel, de Sumiyo Tsukada, éd. Peeters-Louvain, 1995

des mathématiques lu avec autant de rigueur que possible.

Pour suivre Bergson je lirai ses textes comme autant de témoignages d'un esprit polémique à l'œuvre, qui s'efforce de « faire œuvre » en imposant des idées sur le nombre, mais aussi sur le temps et l'espace, sur l'inerte et le vivant, sur l'intelligence et la vie spirituelle d'un moi profond ; pour Russell en revanche, je réserverai l'appréciation de la dimension polémique des textes à une ultime partie, qui sera détachée de l'exposition proprement dite des idées exprimée dans la philosophie mathématique russellienne.
Avec Bergson ce qui sera cherché sont des raisons de ne pas adhérer à certaines idées sur le nombre. De ne pas rejoindre les empiristes mais également la position kantienne, l'apriorisme.
Comment s'élever à une position sage, en partant de si bas, de la pensée commune, du sens commun ? Sans verser dans les précipices qui s'ouvrent à droite et à gauche...
Avec Russell, ce qui sera mis en avant est au contraire le doute. Directement. Les nombres sont-ils vraiment découverts ou inventés par la raison humaine ? Russell engage sa réflexion à la suite de Dedekind, le plus farouche défenseur de l'idée suivant laquelle les mathématiques sont une merveilleuse invention de la raison humaine. Mais aussi dans la foulée de Frege qui se méfie de telles affirmations suggérant par trop une création du nombre à partir de rien.
Pour s'opposer à la perspective de la découverte du nombre, convient-il de parler de création du nombre par l'esprit humain. Pour détordre, ne serait-ce pas tordre excessivement dans l'autre sens ?

I. Le nombre de Bergson

Un nombre métaphysique... la pensée de Bergson sur le nombre est effectivement une sagesse du nombre, pas une épistémologie à proprement parler ! Le nombre bergsonien est raisonnable, pour ne pas être ou n'être que rationnel !

Une définition artisanale ou artistique

Partant des données immédiates de la conscience, Bergson aborde dans l'Essai sur les données immédiates de la conscience successivement et conjointement diverses questions, celle de l'intensité des sensations et autres états psychologiques, puis celle de l'idée de durée et de la multiplicité des états de conscience, enfin celle de la liberté, si nous reprenons les sous-titres des trois parties qui composent l'ouvrage.
Bergson traite la question de la nature du nombre au début du chapitre II de l'Essai. Remarquons d'emblée qu'il ne produit pas vraiment de définition du nombre. Il se contente de reprendre une définition ordinaire, simpliste, à savoir « *une collection d'unités* », et d'en améliorer la formulation, avec l'usage d'un mot technique, « *synthèse* », utilisé dans l'expression « *synthèse de l'un et du multiple* ».
S'il procède ainsi c'est qu'il suppose que cette définition a sa vérité propre, celle du sens commun qui n'a pas d'autres visées que l'accord de la plupart des hommes raisonnablement instruits.
Voici en effet ce qu'il écrit au tout début du chapitre :
« *On définit généralement le nombre une collection d'unités ou, pour parler avec plus de précision, la synthèse de l'un et du multiple. Tout nombre est un, en effet, puisqu'on se le représente par une intuition simple de l'esprit et qu'on lui donne un nom ; mais cette unité est celle d'une somme ; elle embrasse une multiplicité de parties qu'on peut considérer isolément. Sans approfondir pour le moment ces notions d'unité et de multiplicité, demandons-nous si l'idée de nombre n'impliquerait pas la représentation de quelque autre chose encore*. »

Le terme de « synthèse » renvoie à deux choses, un acte psychique (spirituel plus que cognitif) d'abord mais aussi quelque chose d'autre, en fait une possibilité logique. L'acte et la puissance ?
Condition de la représentation du nombre, l'acte est reconnaissance de l'unicité d'un objet de pensée.

Intuition ou appréhension du « 3 » ou pensée de « 30 » ou saisie de n'importe quel autre nombre, unique, nécessairement différent de tous les autres... et identifié comme tel dans le système de différences qu'est la langue.
La possibilité est celle d'une double opération, l'unification du multiple en une totalité ou, à l'inverse, la décomposition de la totalité en ses multiples éléments. Cette totalité est une unité qui demeure fragile. Une unité qui « *embrasse* » une multiplicité, car il s'agit de l'unité d'une somme. Unité logique pouvant à volonté être faite ou défaite, synthèse et analyse étant toujours également possibles.
Il y a sans doute non pas deux synthèses, l'une révélant le nombre dans sa vérité (l'intuition de l'unicité) et l'autre produisant le nombre dans son unité apparente (la sommation ou unification du multiple). Mais plutôt une synthèse variant en intensité. Forte ou ferme, elle réalise définitivement le nombre, dévoile sa nécessité, sa beauté mathématique. Moins forte, plus faible mais non moins rigoureuse, elle se contente, de réaliser une synthèse additive provisoire, d'opérer la réunion de ses parties pour un temps néanmoins aussi long qu'on voudra.

Une première joute lourde de conséquences

Bergson ne se contente pas d'améliorer la définition du sens commun. Il produit dans la foulée une première critique plus structurée, afin sans doute de ne pas laisser passer ce qui peut effectivement être considéré comme un sophisme du matérialisme. Voire comme le péché originel de la pensée relativiste, empiriste ou matérialiste.
Cette critique est celle du discours théorique qui ne ferait pas la distinction du nombre mathématique et du nombre empirique, du nombre et du « nombre de ». Quand je réponds à la question « combien de moutons dans votre champ ? » et qu'on me répond « 50 », on répond en fait par un nombre et non pas en donnant un nombre d'animaux... même s'il s'agit d'une collection de cinquante animaux.
Voici le passage :
« *Il ne suffit pas de dire que le nombre est une collection d'unités ; il faut ajouter que ces unités sont identiques entre elles, ou du moins qu'on les suppose identiques dès qu'on les compte. Sans doute on comptera les moutons d'un troupeau et l'on dira qu'il y en a cinquante, bien qu'ils se distinguent les uns des autres et que le berger les reconnaisse sans peine ; mais c'est que l'on convient alors de négliger leurs différences individuelles pour ne tenir compte que de leur fonction commune. Au contraire, dès qu'on fixe son attention sur les traits particuliers des objets ou des individus, on peut bien en faire l'énumération, mais non plus la somme. C'est à ces deux points de vue bien différents qu'on se place quand on compte les soldats d'un bataillon, et quand on en fait l'appel. Nous dirons donc que l'idée de nombre implique l'intuition simple d'une multiplicité de parties ou d'unités, absolument semblables les unes aux autres.* »

Ce texte est fait pour approfondir les premières idées exprimées sur la synthèse. Des idées incomplètes peuvent très bien suggérer de fausses conclusions, et dégénérer en théories fausses, confuses. Il faut donc mettre rapidement en lumière l'essentiel, le vrai principe psychologique du nombre ou ses principes s'il y en a plusieurs.
La synthèse du nombre requiert une saisie de la multiplicité comme unité. Cette saisie est « somme ». Or pour qu'une addition ait du sens il faut qu'elle additionne des choses semblables (pas ces choses différentes que sont le poids du bateau, la hauteur du mât et le nombre de mouettes sur le poids dans le problème de l'âge du capitaine). Une somme, comme réunion de parties équivalentes ou décrétées semblables (ce ou signalant allusion au conventionnalisme), nonobstant les différences matérielles observables (la non ressemblance des moutons que le berger compte). L'unicité du nombre est idéale ; l'unité du nombre est réunion de l'homogène. Idéalisation.
Quand l'appel est fait dans une compagnie il ne s'agit pas vraiment de compter mais d'énumérer, dit Bergson en feignant e croire qu'il n'y a qu'une manière d'énumérer. Car il s'agit pour lui d'une seule visée, identifier immédiatement le (les) soldat(s) qui manque(nt) à l'appel, pas savoir qu'il en

manque un (plusieurs), n'importe lequel (lesquels) parmi les 210 hommes. Quand l'appel est fait par le sergent, celui-ci lit sa liste, passe de nom en nom. S'il n'en manque pas, il y en a bien 210. Mais 210 est alors un nombre de soldats tous différents, non interchangeables, tous doté d'un matricule qui les singularise. Et l'opération que le sergent effectue est plus du type « un de plus à l'appel » que la réitération de l'opération +1. Un de plus, ce matricule là ; pas +1 soldat anonyme. Ignorant volontairement l'usage simple d'une liste sans ordre permettant un dénombrement d'une collection, Bergson présente (involontairement?) l'énumération n'est évidemment plus une opération arithmétique mais un procédé mécanique d'appel.
Il n'en reste pas moins que Bergson n'a peut-être pas identifié avec la somme l'opération logique première logiquement dans la construction du nombre.

Il est sans doute nécessaire de rapprocher ce texte de ce que dit Aristote de la nature du nombre et d'en tirer une réflexion supplémentaire sur la nature de l'abstraction réclamée par la synthèse additive ou l'acte d'identification de la multiplicité comme Unité, la synthèse forte.
Considérant divers systèmes de mesures de grandeurs (longueurs, surfaces, durées, vitesses, poids) de son époque mais aussi la mesure en général ou la capacité à dénombrer de l'humanité, Aristote précise en effet dans les livres de la Métaphysique que le nombre est un mais n'est pas une substance, qu'il n'a donc en quelque sorte d'existence que par l'effort de l'esprit humain de compter diverses choses. Il discute abondamment des thèses de Platon et des sophistes, de Pythagore aussi. Son enquête porte essentiellement sur la détermination du principe du nombre. Aristote identifie finalement ce principe au livre X, chapitre 1, §9. C'est l'Unité !
« (...) *par-dessus tout, l'Unité est ce qui constitue la mesure première des choses en chaque genre, et éminemment, dans le genre de la quantité ; car c'est de là que la notion d'Unité s'est étendue à tout le reste, puisque c'est par la mesure que la quantité se révèle. La quantité, en tant que quantité, se fait connaître, soit par l'unité, soit par le nombre ; et c'est par l'unité qu'un nombre quelconque est connu. Par conséquent, toute quantité, en tant que quantité, est appréciée au moyen de l'unité ; et le primitif qui fait connaître la quantité est précisément l'unité même. Voilà pourquoi c'est l'unité qui est le principe du nombre, en tant que nombre.* »
http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/metaphyque10.htm
Aristote pense que pour répondre à la question "qu'est-ce qu'un nombre ?" il faut impérativement dégager un principe, suivant le projet d'ensemble consigné dans les Seconds analytiques (I, 10, 76b) où il affirme que le savoir doit être la maîtrise de trois choses, d'une part d'un objet précis d'investigation, d'autre part des propriétés de cet objet, enfin des principes grâce auxquels ces propriétés peuvent être démontrées. Le savoir du nombre réclame des principes.
Bergson en cherche lui aussi, des principes sans lesquels la raison n'est qu'un slogan vide de sens, et il en trouve lui aussi, même si ce n'est pas exactement la même chose. Il n'utilise d'ailleurs pas le terme, mais emploie le verbe « impliquer » pour mettre en lumière une relation d'antécédent à conséquent qui ne peut être mise en doute, qui vaut nécessairement.

Le premier principe de la synthèse numérique est l'unité rendue indéfiniment transposable, substituable à une autre unité ou ajoutable à une somme en cours de réalisation. La faute des empiristes modernes est et a toujours été de croire pouvoir se passer de principes ! Ils ont voulu bâtir le savoir directement sur le réel et non sur une métaphysique !

Remarque : la lecture de Deleuze est curieuse, qui dit que Bergson poursuit dans ces pages l'appréhension du nombre comme cardinal et non comme ordinal. C'est apparemment tout le contraire qui se produit. Il dénie au sergent la saisie du nombre de soldats par un procédé qui ne doive en fait rien au décompte, puisqu'il s'agit d'établir une correspondance terme à terme entre des collections (la liste, les soldats alignés dans la caserne).
La lecture de Deleuze, « *le nombre est une multiplicité* » :
http://www.le-terrier.net/deleuze/20bergson.htm

Un développement polémique

Bergson a lui-même identifié deux ennemis plus redoutables, comme en témoigne la conclusion de l'Essai. Premier ennemi dont la valeur permet un duel de l'esprit : Kant, le représentant de la pensée critique, relativiste ; second ennemi, exigeant une réplique cinglante : les empiristes anglais, par exemple la pensée de John Stuart Mill, dont la philosophie peut être considérée au mieux comme une radicalisation de l'esprit relatif initié par le kantisme, et au pire comme une pure provocation, une forme de nihilisme.

La critique de Kant est très nette, et vive, dans ce qui va suivre.
Rappelons pour mémoire l'idée kantienne de nombre, telle qu'exprimée dans son texte le plus célèbre et le plus connu, la Critique de la raison pure *Analytique transcendantale* [B 182]:
« *L'image pure de toutes les grandeurs pour le sens extérieur est l'espace, et celle de tous les objets des sens en général est le temps. Le schème pur de la grandeur considéré comme un concept de l'entendement est le nombre, qui est une représentation embrassant l'addition successive de l'unité à l'unité (l'homogène). Le nombre n'est donc autre chose que l'unité de la synthèse du divers d'une intuition homogène ne général, du fait que je produis le temps lui-même dans l'appréhension de l'intuition.* »».

À nouveau, Bergson procède en analysant l'imagination et en reconnaissant un principe psychologique du nombre à l'œuvre dans l'acte de l'esprit effectuant l'idéalisation – maintenant l'espace comme milieu homogène dans lequel l'unité comme être duplicable, ajoutable à volonté, va pouvoir faire l'objet d'une appréhension. Ce second principe de la synthèse numérique porte sur l'addition elle-même qui se retrouve idéalisée, quand le premier principe idéalisait la chose à compter (le nombre nombré dans la terminologie d'Aristote). Et il s'agit d'éviter la confusion qui s'empare de nous à l'idée d'avoir à répéter une suite numérique pour obtenir une somme. Répéter, pour un sujet, c'est un procédé qui nécessite une inscription dans le temps ! Mais la répétition du nombre est idéale. Ce n'est pas une synthèse successive. Le temps dans lequel elle s'inscrit n'est aucunement de la durée, c'est du temps purement hypothétique, ordonné en pensée... ou si l'on préfère du temps homogène, pas moins qu'un plan sur lequel se dispose des figures, s'alignent des points, se dessinent des droites.
Voici l'idée générale. Le temps nécessaire à la synthèse n'est pas vraiment du temps mais de l'espace. La synthèse additive repose sur l'appréhension non d'un écoulement mais d'une simultanéité.

Je mets en gras certains passages que je juge essentiels pour expliquer la pensée de Bergson, repérer son usage de l'analogie et suivre sa pente polémique. Celle-ci est très nette ; ainsi je mets en rouge les conclusions anti-kantiennes de ce texte. Et je rajoute diverses précisions ou simples constats en guise de commentaire, par exemple une indication sur la manière dont Bergson discute de l'illusion en faisant intervenir un nombre ordinal.

« (…) *Supposons tous les moutons du troupeau identiques entre eux ; ils diffèrent au moins par la place qu'ils occupent dans l'espace ; sinon, ils ne formeraient point un troupeau. Mais laissons de côté les cinquante moutons eux-mêmes pour n'en retenir que l'idée. Ou nous les comprenons tous dans la même image* [unité synthétique], *et* ***il faut bien par conséquent que nous les juxtaposions dans un espace idéal*** *; ou nous répétons cinquante fois de suite l'image d'un seul d'entre eux* [multiplicité], *et* ***il semble alors que la série prenne place dans la durée plutôt que dans l'espace****. Il n'en est rien cependant. Car si je me figure tour à tour, et isolément, chacun des moutons du troupeau, je n'aurai jamais affaire qu'à un seul mouton. Pour que le nombre en aille croissant à mesure que j'avance* [le nombre est causé par l'activité de compter et ne peut être alors qu'un entier naturel], *il faut bien que je retienne les images successives et que je les juxtapose à chacune des unités nouvelles dont j'évoque l'idée : or c'est dans l'espace qu'une pareille juxtaposition s'opère, et non dans la durée pure.* ***On nous accordera d'ailleurs sans peine que***

toute opération par laquelle on compte des objets matériels implique la représentation simultanée de ces objets, et que, par là même, on les laisse dans l'espace. *Mais cette intuition de l'espace accompagne-t-elle toute idée de nombre, même celle d'un nombre abstrait ?*

Pour répondre à cette question, il suffira à chacun de passer en revue les diverses formes que l'idée de nombre a prises pour lui depuis son enfance [histoire du nombre depuis l'antiquité, pas du tout enquête sur la genèse psychologique du nombre... qui invaliderait totalement cette fiction en opposant des périodes de l'intellect, non conservant puis conservant. Cf. Piaget, Sagesse et illusion de la philosophie, pp. 146-149]. ***On verra que nous avons commencé par imaginer une rangée de boules, par exemple, puis que ces boules sont devenues des points, puis enfin que cette image elle-même s'est évanouie pour ne plus laisser derrière elle, disons-nous, que le nombre abstrait.*** *Mais à ce moment aussi le nombre a cessé d'être imaginé et même d'être pensé ;* ***nous n'avons conservé de lui que le signe, nécessaire au calcul, par lequel on est convenu de l'exprimer*** [réduction du symbolisme à une opération permettant d'économiser des ressources de mémoire, lui dénuant toute fécondité propre ; ne soyons pas étonné que l'exemple fourni va être celui d'objets comme 12 et 24 et pas celui d'une opération, comme celle qu'indique le signe + ou une opération logique comme celle du signe =]. *Car on peut fort bien affirmer que 12 est la moitié de 24 sans penser ni le nombre 12 ni le nombre 24 : même, pour la rapidité des opérations, on a tout intérêt à n'en rien faire. Mais, dès qu'on désire se représenter le nombre, et non plus seulement des chiffres ou des mots, force est bien de revenir à une image étendue. Ce qui fait illusion sur ce point, c'est l'habitude contractée de compter dans le temps, semble-t-il, plutôt que dans l'espace. Pour imaginer le nombre cinquante* [image d'un cardinal]*, par exemple, on répétera tous les nombres à partir de l'unité* [énumération d'une liste de noms de nombre] *; et quand on sera arrivé au cinquantième* [ordinal]*, on croira bien avoir construit ce nombre dans la durée, et dans la durée seulement. Et il est incontestable qu'on aura compté* [il n'y a pas eu le moindre décompte, s'il y a juste énumération] *ainsi des moments de la durée, plutôt que des points de l'espace ; mais la question est de savoir si ce n'est pas avec des points de l'espace qu'on aura compté les moments de la durée. Certes, il est possible d'apercevoir dans le temps, et dans le temps seulement, une succession pure et simple, mais non pas une addition, c'est-à-dire une succession qui aboutisse à une somme. Car si une somme s'obtient par la considération successive de différents termes, encore faut-il que chacun de ces termes demeure lorsqu'on passe au suivant, et attende, pour ainsi dire, qu'on l'ajoute aux autres : comment attendrait-il, s'il n'était qu'un instant de la durée ? et où attendrait-il, si nous ne le localisions dans l'espace ? Involontairement, nous fixons en un point de l'espace chacun des moments que nous comptons, et c'est à cette condition seulement que les unités abstraites forment une somme. Sans doute il est possible, comme nous le montrerons plus loin, de concevoir les moments successifs du temps indépendamment de l'espace* [par une série de sensations sans ordre de succession] *; mais lorsqu'on ajoute à l'instant actuel ceux qui le précédaient, comme il arrive quand on additionne des unités, ce n'est pas sur ces instants eux-mêmes qu'on opère, puisqu'ils sont à jamais évanouis, mais bien sur la trace durable qu'ils nous paraissent avoir laissée dans l'espace en le traversant. Il est vrai que nous nous dispensons le plus souvent de recourir à cette image, et qu'après en avoir usé pour les deux ou trois premiers nombres, il nous suffit de savoir qu'elle servirait aussi bien à la représentation des autres, si nous en avions besoin* [sorte de confiance analogue à l'induction mathématique]. *Mais toute idée claire du nombre implique* ***une vision*** *dans l'espace* [comme dans la subitisation, mais pour elle seule] *; et l'étude directe des unités qui entrent dans la composition d'une multiplicité distincte va nous conduire, sur ce point, à la même conclusion que l'examen du nombre lui-même.*»

Le reste du texte ajoute un troisième principe, la discontinuité, pour sceller le sort du pseudo principe qu'est le temps.

Ce passage repose sur une métaphore, celle de la synthèse additive qui s'effectuerait en quelque sorte « *par saccades* ». Le nombre est mentalement une réunion d'unités. Mais cette réunion n'est aucune fusion définitive ou irréversible. Ses parties ont tendance à se confondre, quand l'esprit relâche son attention. Mais la divisibilité se maintient, l'espace n'est-il pas par nature indéfiniment divisible ?

Il est permis de penser que l'auteur retrouve aussi son premier adversaire dans ces lignes, s'en prenant à nouveau aux empiristes. L'enjeu porte en effet maintenant sur la puissance de l'esprit à défaire ce qu'il a fait, à modifier un résultat (analysant ce dont il vient de faire la synthèse, fractionnant ce dont il a établi l'unité, etc.), à recourir à des méthodes alternatives, bref à s'affranchir définitivement des images dans lesquelles la pensée se retrouverait figée si elle n'était animée d'un pouvoir de s'abstraire de toute impression sensible.

« ***On ne saurait contester que la formation ou construction*** [deux termes complémentaires pour une idée confuse : pas la construction du nombre à partir d'une axiomatique, mais sa découverte comme forme abstraite, non dans le monde, mais dans des images] ***d'un nombre implique la discontinuité*** [le terme est lui aussi volontairement confus, ne renvoyant à rien qui ressemble de près ou de loin à l'idée mathématique de discontinuité... ni de continuité, il ne s'agit pas et ne peut s'agir d'évoquer la puissance du continu, les nombres réels, de l'opposer à la puissance de N]. *En d'autres termes, ainsi que nous le disions plus haut, chacune des unités avec lesquelles je forme le nombre trois paraît constituer un indivisible pendant que j'opère sur elle, et je passe sans transition de celle qui précède à celle qui suit. Que si maintenant je construis le même nombre avec des demis, des quarts, des unités quelconques, ces unités constitueront encore, en tant qu'elles serviront à former ce nombre, des éléments provisoirement indivisibles, et* ***c'est toujours par saccades, par sauts brusques pour ainsi dire, que nous irons de l'une à l'autre****. Et la raison en est que, pour obtenir un nombre, force est bien de fixer son attention* [toujours le même regard pouvant produire synthèses ou analyses]*, tour à tour, sur chacune des unités qui le composent. L'indivisibilité de l'acte par lequel on conçoit l'une quelconque d'entre elles se traduit alors sous forme d'un point mathématique, qu'un intervalle vide d'espace sépare du point suivant. Mais,* ***si une série de points mathématiques échelonnés dans l'espace vide exprime assez bien le processus par lequel nous formons l'idée de nombre, ces points mathématiques ont une tendance à se développer en lignes à mesure que notre attention se détache d'eux, comme s'ils cherchaient à se rejoindre les uns les autres.*** *Et quand nous considérons le nombre à l'état d'achèvement, cette jonction est un fait accompli : les points sont devenus des lignes, les divisions se sont effacées, l'ensemble présente tous les caractères de la continuité. C'est pourquoi le nombre, composé selon une loi déterminée, est décomposable selon une loi quelconque. En un mot, il faut distinguer entre l'unité à laquelle on pense et l'unité qu'on érige en chose après y avoir pensé, comme aussi entre le nombre en voie de formation et le nombre une fois formé. L'unité est irréductible pendant qu'on la pense* [acte]*, et le nombre est discontinu pendant qu'on le construit* [puissance] *: mais dès que l'on considère le nombre à l'état d'achèvement, on l'objective : et c'est précisément pourquoi il apparaît alors indéfiniment divisible. Remarquons, en effet, que nous appelons subjectif ce qui paraît entièrement et adéquatement connu, objectif ce qui est connu de telle manière qu'une multitude toujours croissante d'impressions nouvelles pourrait être substituée à l'idée que nous en avons actuellement. Ainsi un sentiment complexe contiendra un assez grand nombre d'éléments plus simples ; mais, tant que ces éléments ne se dégageront pas avec une netteté parfaite, on ne pourra pas dire qu'ils étaient entièrement réalisés, et, dès que la conscience en aura la perception distincte, l'état psychique qui résulte de leur synthèse aura par là même changé. Mais rien ne change à l'aspect total d'un corps, de quelque manière que la pensée le décompose, parce que ces diverses décompositions, ainsi qu'une infinité d'autres, sont déjà visibles dans l'image, quoique non réalisées : cette aperception actuelle, et non pas seulement virtuelle, de subdivisions dans l'indivisé est précisément ce que nous appelons objectivité. Dès lors,* ***il devient aisé de faire la part exacte du subjectif et de l'objectif dans l'idée de nombre. Ce qui appartient en propre à l'esprit, c'est le processus indivisible par lequel il fixe son attention successivement sur les diverses parties d'un espace donné ; mais les parties ainsi isolées se conservent pour s'ajouter à d'autres, et une fois additionnées entre elles se prêtent à une décomposition quelconque : ce sont donc bien des parties d'espace, et l'espace est la matière avec laquelle l'esprit construit le nombre, le milieu où l'esprit le place****.*

En vert j'ai aussi souligné deux passages problématiques. Dans ceux-ci Bergson redéfinit ce qu'il entend par subjectivité et objectivité, avant de quitter la question du nombre pour aborder des problèmes relatifs à la multiplicité. Comme l'unité (mais pas l'énumération) elle s'entend en deux sens. Il y a la multiplicité quantitative propre du nombre qui est manipulable, décomposable à l'envie. Et la multiplicité qualitative. Dès lors que je compare deux durées je dois faire intervenir quelque chose d'autre qu'une différence de longueur, objective, à savoir une différence de nature. Cette différence pour subjective qu'elle soit n'est pas moins positive. Il entre en effet de l'intensité dans l'appréhension de la durée. Celle-ci est une variation qualitative d'une série de sensations. Les moments qui composent une durée s'interpénètrent, se fondent en une unité subjective, alors que les nombres de la synthèse additive se juxtaposent pour former une unité simplement subjective.

Sans grande surprise, la fin du texte relativise l'exploit des mathématicien. L'arithmétique n'étant « *à vrai dire* » qu'un développement rigoureux des effets d'une intuition que le vulgaire réalise déjà à la perfection !

À vrai dire, c'est l'arithmétique qui nous apprend à morceler indéfiniment les unités dont le nombre est fait [concession à Newton... ou à d'autres, Archimède ? les pythagoriciens ?, pour évoquer les nombres]. *Le sens commun est assez porté à construire le nombre avec des indivisibles* [retour au seul entier, via cette « construction » vulgaire]. *Et cela se conçoit sans peine, puisque la simplicité provisoire des unités composantes est précisément ce qui leur vient de l'esprit, et que celui-ci prête plus d'attention à ses actes qu'à la matière sur laquelle il agit.* ***La science se borne à attirer notre regard sur cette matière : si nous ne localisions déjà le nombre dans l'espace, elle ne réussirait certes pas à nous l'y faire transporter*** [le nombre est déjà conçu dans sa caractéristique essentielle, de synthèse, avant d'être pensé par le mathématicien, expert de l'usage des nombres mais pas inventeur de celui-ci]. ***Il faut donc bien que, dès l'origine nous nous soyons représenté le nombre par une juxtaposition dans l'espace****. C'est la conclusion à laquelle nous avions abouti d'abord, en nous fondant sur ce que toute addition implique une multiplicité de parties,* ***perçues simultanément****.* »

Le dernière verbe utilisé dans ce début de chapitre sur le nombre est percevoir. La multiplicité quantitative est d'abord perçue. Une opération arithmétique suppose une perception antérieure dont elle découle entièrement, une intuition sensible. La force de l'esprit est de se tenir prêt à idéaliser ce sensible, à actualiser la synthèse numérique, à s'élever à la considération du nécessaire.

Des questions en suspens, il demeure une pluralité d'interprétations possibles

D'autres lectures sont possibles. Moins rapides sur certains passages, sans doute moins hostiles à la perspective défendue.
Mais je doute franchement qu'on puisse lire différemment le début du chapitre 2, avec son projet explicite de définir le nombre comme une construction mentale, certes comprise mais pas avec assez de rigueur par l'opinion commune. C'est pourtant ce que fait une autre très curieuse lecture de ces textes sur le nombre, dans une thèse récente sur la signification de l'œuvre de Bergson, en particulier son troisième chapitre :
http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/69/03/62/PDF/Miravete_Sebastien_-_.pdf
L'auteur reconnaît la justesse des critiques de Russell (et de François Heidsieck) quand il s'agit de dénoncer la réduction du nombre à une quantité ou à substituer à l'idée de nombre une image de la multiplicité, comme celle d'une collection d'objets identiques. Mais il ne les considèrent pas comme touchant leur cible... Bergson lui-même éviterait ce genre de confusion en faisant jouer une opposition entre le nombre suivant l'opinion commune et le nombre abstrait. Le premier serait un mixte de durée et d'espace. Seul le second serait de l'espace pur. Et il serait aussi irréductible à la quantité de collections empiriques que le nombre cardinal des mathématiciens. Et il ne supposerait

aucune intuition seulement subjective, pouvant le faire être un dans une image, de la part du sujet qui le pense.

En guise de transition, il est intéressant de lire soi-même, sans y apporter de jugement péremptoire sur les fautes de lecture commises, le texte de Russell où celui-ci formule son opposition sans concession au bergsonisme. La conception rhétorique du nombre bergsonien, d'après Bertrand Russell, "*The Philosophy of Bergson*"

Bergson's theory of space occurs fully and explicitly in his Time and Free Will, and therefore belongs to the oldest parts of his philosophy. In his first chapter, he contends that greater and less imply space, since he regards the greater as essentially that which contains the less. He offers no arguments whatever, either good or bad, in favor of this view ; he merely exclaims, as though he were giving an obvious reductio ad absurdum *: "*As if one could still speak of magnitude where there is neither multiplicity nor space !" (p. 9). *The obvious cases to the contrary, such as pleasure and pain, afford him much difficulty, yet he never doubts or re-examines the dogma with which he starts.*

*In his next chapter, he maintains the same thesis as regards number. "*As soon as we wish to picture number o ourselves,*" he says, "*and not merely figures or words, we are compelled to have recourse to an extended image*" (p. 78), and "*every clear idea of number implies a visual image in space*" (p. 79). These two sentences suffice to show, as I shall try to prove, that Bergson does not know what number is, and has himself no clear idea of it. This is shown also by his definition : "*Number may be defined in general as a collection of units, or, speaking more exactly, as the synthesis of the one and the many*" (p. 75).*

In discussing these statements, I must ask the reader's patience for a moment while I call attention to some distinctions which may at first appear pedantic, but are really vital. There are three entirely different things which are confused by Bergson in the above statements, namely : (1) number, the general concept applicable to the various particular numbers ; (2) the various particular numbers ; (3) the various collections to which the various particular numbers are applicable. It is this last that is defined by Bergson when he says that number is a collection of units. The twelve apostles, the twelve tribes of Israel, the twelve months, the twelve signs of the zodiac, are all collections of units, yet no one of them is the number 12, still less is it number in general, as by the above definition it ought to be. The number 12, obviously, is something which all these collections have in common, but which they do not have in common with other collections, such as cricket elevens. Hence the number 12 is neither a collection of twelve terms, nor is it something which all collections have in common ; and number in general is a property of 12 or 11 or any other number, but not of the various collections that have twelve terms or eleven terms.

*Hence when, following Bergson's advice, we "*have recourse to an extended image*" and picture, say, twelve dots such as are obtained by throwing double sixes at dice, we have still not obtained a picture of the number 12. The number 12, in fact, is something more abstract than any picture. Before we can be said to have any understanding of the number 12, we must know what different collections of twelve units have in common, and this is something which cannot be pictured because it is abstract. Bergson only succeeds in making his theory of number plausible by confusing a particular collection with the number of its terms, and this again with number in general.*

The confusion is the same as if we confused a particular young man with youth, and youth with the general concept "period of human life," and were then to argue that because a young man has two legs, youth must have two legs, and the general concept "period of human life" must have two legs. The confusion is important because, as soon as it is perceived, the theory that number or particular numbers can be pictured in space is seen to be untenable. This not only disproves Bergson's theory as to number, but also his more general theory that all abstract ideas and all logic are derived from space ; for the abstract 12, the common property of all dozens as opposed to any particular dozen, though it is never present to his mind, is obviously conceivable and obviously capable of being pictured in space.

But apart from the question of numbers, shall we admit Bergson's contention that every plurality of separate units involves space ? Some of the cases that appear to contradict this view are considered by him, for example successive sounds. When we hear the steps of a passer-by in the street, he says, we visualize his successive positions ; when we hear the strokes of a bell, we either picture it swinging backwards and forwards, or we range the successive sounds in an ideal space (Time and Free Will, p. 86). But these are mere autobiographical observations of a visualizer, and illustrate the remark we made before, that Bergson's views depend upon the predominance of the sense of sight in him. There is no logical necessity to range the strokes of a clock in an imaginary space : most people, I imagine, count them without any spatial auxiliary. Yet no reason is alleged by Bergson for the view that space is necessary. He assumes this as obvious, and

proceeds at once to apply it to the case of times. Where there seem to be different times outside each other, he says, the times are pictured as spread out in space; in real time, such as is given by memory, different times interpenetrate each other, and cannot be counted because they are not separate.
The view that all separateness implies space is now supposed established, and is used deductively to prove that space is involved wherever there is obviously separateness, however little other reason there may be for suspecting such a thing. Thus abstract ideas, for example, obviously exclude each other : whiteness is different from blackness, health is different from sickness, folly is different from wisdom. Hence all abstract ideas involve space ; and therefore logic, which uses abstract ideas, is an offshoot of geometry, and the whole of the intellect depends upon a supposed habit of picturing things side by side in space. This conclusion, upon which Bergson's whole condemnation of the intellect rests, is based, so far as can be discovered, entirely upon a personal idiosyncrasy mistaken for a necessity of thought, I mean the idiosyncrasy of visualizing successions as spread out on a line. The instance of numbers shows that, if Bergson were in the right, we could never have attained to the abstract ideas which are supposed to be thus impregnated with space; and conversely, the fact that we can understand abstract ideas (as opposed to particular things which exemplify them) seems sufficient to prove that he is wrong in regarding the intellect as impregnated with space.

Un bref commentaire de ce texte,
http://ebox.nbu.bg/berg2/sk7.html

II. Le nombre de Russell

Jean-Toussaint Desanti (1968) adresse ainsi à l'épistémologue une mise en garde salutaire : «*La mathématique produit elle-même* ***son propre sol*** *et il n'existe pas pour elle d'autre sol que celui qu'elle a produit et reproduit sans cesse...il ne sert à rien de creuser le sol de la mathématique pour découvrir* ***le sous-sol originaire secret*** *et mathématiquement muet sur lequel elle serait née. Jamais on ne se trouvera confronté à l'événement de l'origine radicale : elle ne se montre que dans le produit et du dedans*. »
Cet avertissement est sans doute utile avant de lire les textes de Russell sur la nature et l'origine du nombre, bien que ce dernier ne puisse être suspecté de mysticisme. L'utilisation du rasoir d'Occam pour retirer et bannir définitivement du discours philosophique les idées ou opinions métaphysiques est une constante de son œuvre. Point chez lui d'origine radicale ou de fondation de sens à partir du donné originaire ! Mais un travail de construction du concept. Ne lui reprochons pas, si nous avons été impressionnés par l'élan bergsonien et la force de l''intuition, sa sécheresse de ses déductions et son ignorance des vérités plus profondes que le véritable philosophe réussit à saisir !
Il ne s'agit que de la reconnaissance de la production par la mathématique de son « *propre sol* ». L'analyse fondant la philosophie mathématique vise à découvrir pour chaque notion les idées primitives dont elle dérive.

Dans un article consacré aux relations qu'entretenaient Russell et Whitehead, Guillaume Durand (2008) apporte cette précision sur la méthode suivie pour appréhender le nombre dans sa vérité mathématique :
« *Le modèle mathématique de la méthode est la théorie des coupures de Dedekind, qui consiste à définir un nombre irrationnel par la série des nombres rationnels qui l'approchent comme une limite. On considère cette série particulière comme logiquement équivalente à cette limite qu'elle définit de manière univoque. Il faut souligner aussi l'analogie entre la définition par B. Russell — dans les* Principles of Mathematics *— du nombre cardinal comme ensemble de classes et la construction whiteheadienne du point dans « La Théorie relationniste de l'espace ». Dans les deux cas, l'enjeu est d'éviter toute inférence métaphysique : tant que le nombre cardinal est* inféré *à partir des collections, au lieu d'être* construit *en termes de collections, il demeure une entité métaphysique douteuse. On évite l'inférence en définissant le nombre cardinal comme la classe de toutes les collections également nombreuses.* »
Durand insiste lui-même sur l'opposition des deux démarches, celle qui infère et celle qui construit

le nombre.

21. La définition du nombre de l'Introduction à la philosophie mathématique

Pour Russell, un nombre cardinal est une classe, la « *classe de toutes les collections également nombreuses* » affirme Durand. Une classe de classe, par conséquent. Voyons à notre tour ce que dit exactement Russell.

L'entier naturel comme objet d'enquête

Le premier chapitre porte sur la suite infinie des nombres naturels. Russell y évoque l'arithmétisation des mathématiques (idée que tout théorème d'analyse peut être exprimé sous forme d'un théorème sur les nombres naturels) et la logicisation de l'arithmétique (volonté de combler les lacunes de l'axiomatique des nombres naturels en exposant un système de définitions et d'axiomes nécessaires et cohérents). Il se situe ainsi clairement dans la ligne programmatique de Dedekind et de bien d'autres, pour qui les mathématiques ordinaires, celles qu'on apprend à l'école, sont également éloignées des mathématiques supérieures, rigoureuses, et des bases élémentaires du savoir mathématique, logiquement insuffisantes.
Il existe en fait un véritable hiatus entre les mathématiques scientifiques et les connaissances de mathématiques que nous arrivons à mobiliser, avec plus ou moins de succès et de conviction. Ainsi, celui qui entend parler de la suite des nombres naturels pense habituellement à la suite 1, 2, 3, 4, 5 etc. et pas à la suite 0, 1, 2, 3, 4, 5,..., n, n+1... oubliant le zéro ! Il y pense idéologiquement, pourrait-on dire. Et s'il s'empresse de chercher des principes du nombre avec à l'esprit une telle référence « objective », excluant implicitement un nombre aussi important que le premier « nombre naturel », 0 et non 1, c'est sans doute qu'il n'est pas encore en mesure de distinguer raison et imagination. Ou bien, s'il a lui même poussé ses études jusqu'au lycée, c'est qu'il n'a pas encore bien compris le degré de rigueur atteint par la raison du mathématicien, d'Euclide à nos jours. Le mathématicien, est avide non de principes éternels portant sur l'unité des « entiers » mais de postulats logiques comme ceux fournis par les définitions des termes élémentaires de la langue qu'est l'arithmétique : « 0 », « nombre » ou « successeur ». Épurés, complétés et simplifiés, ces principes sont ceux de l'axiomatique de Peano (ou de Frege, ayant effectué une recherche similaire) à laquelle le philosophe est obligé de se référer pour être objectif, c'est-à-dire pour dire quelque chose non de son idée du nombre mais du nombre des mathématiciens qui pour faire œuvre de science doivent parler la même langue.

Le problème du nombre est bien en un sens un problème linguistique. À quoi correspond le nom « nombre » dans la réalité ? Quel est le sens du mot dans divers contextes d'énonciation ? A-t-il un sens fondamental, peut-il prendre divers sens à partir de ce sens fondamental ?

S'il était précédemment possible de référer l'enquête de Bergson à une conception aristotélicienne, ce n'est plus le cas avec Russell. Il est néanmoins possible de le référer à une ou d'autres conceptions, primitives par rapport à elle. Conception(s) critique(s) qui sans peut-être avoir abouti partage(nt) néanmoins avec elle une même conception de l'abstraction, une même exigence de rigueur fondée en raison.
Cournot, par exemple, est un très point de référence. Retenant de Descartes l'idée d'une mathématique pure basée sur les deux idées d'ordre et de grandeur, appréhendant l'arithmétique comme la science des combinaisons et donc comme le travail de l'esprit non sur des idéalités mais des couples idéels (voire des combinaisons à trois éléments ou plus), pensant la synthèse mathématique comme construction symbolique nécessaire, il établit l'existence de « *rapports naturels* » entre les objets du mathématicien et les constructions du logicien (Enchaînements, p. 10). L'idée de nombre suppose une autre idée, purement logique. Ou plutôt « *l'idée de nombre et l'idée d'association ou de groupements par genres sont deux idées corrélatives, dont l'une implique*

l'autre. L'une est le point de départ des mathématiques ; l'autre sert de base à l'édifice de la logique des écoles. »
Le logicisme n'est pas une lubie de mathématiciens voulant pousser à l'extrême l'exigence de rigueur propre aux sciences formelles. C'est la prise en considération des affinités structurelles qui existent entre les mathématiques d'une part et la logique d'autre part. S'il s'empare de l'idée naïve de nombre... c'est qu'avec cette idée on n'a affaire encore à aucun nombre, mais à des mots dénués de sens. Il faut bien faire exister le nombre comme idée, et en découvrir la logique interne !

De l'idée de collection à la notion de classe de classe

Un nombre est-ce bien une classe de classes ? Si nous nous rappelons maintenant le début du chapitre II de l'Introduction à la philosophie mathématique nous y retrouvons l'idée de « *collections également nombreuses* », avec l'exemple du nombre 3. Mais il n'est pas encore question de classe de collections. Le propos est d'abord volontairement plus vague. On nous dit que : « *Le nombre 3 est quelques chose que tous les groupes de trois ont en commun, et qui les distingue des autres collections.* » Observation qui permet à Russell de passer à la formulation de sa définition primitive du nombre encore assez imprécise elle aussi : « *Un nombre est une caractéristique de certaines collections, précisément de celles qui ont ce nombre d'éléments.* »
Nous venons d'employer le terme « vague » pour qualifier l'observation initiale et le terme « imprécis » pour qualifier la définition primitive. Il s'agit en effet d'une démarche très progressive, nécessitant de ne pas brûler d'étapes. D'abord l'idée de nombre se présente à nous dans des contours encore à déterminer, d'où 'emploi des expressions « *quelque chose en commun* » ou bien « *une caractéristique de certaines collections* » qui appellent le doute et incitent à la réflexion... Nous qui nous nous demandons si le nombre est inventé ou bien découvert, n'en retirons aucun premier indice pour nous mettre sur la voie. Les collections sont sans conteste perçues donc découvertes dans le monde, mais ce quelque chose commun aux nombres qui serait caractéristique du nombre est-il perçu ou conçu ? Est-il lui-même découvert ou inventé par l'esprit ?
Au début du chapitre II nous partons donc bien d'une définition de nom et non d''idée et par cette première étape se dévoile comme un programme de recherche : quelle est cette caractéristique ? Identifions ce quelque chose en expurgeant de la représentation que nous pouvons nous en faire tout ce qui en elle peut demeurer confus !

Russell produit une réflexion sur la nature même des définitions, en extension (par énumération) ou en intention (en mentionnant une propriété définissante). On dira que Russell prend sont temps pour arriver à sa définition définitive... mais il lui faut obligatoirement faire jouer cette distinction de la définition en extension et en intention. Il le faut pour éviter une généralisation abusive ou ne pas oublier certains nombres dans une pseudo définition inférée de l'observation de quelques collections qui viennent immédiatement à l'esprit (un tas de trois cailloux, les quatre côtés d'un carré, une main...). En effet, il est inconcevable de fournir pour tous les nombres une définition en extension, comme on pense légitime de le faire pour les nombre 3, 4 ou 5 ou d'autres qui sont des nombres de collections assez peu nombreuses (un million 10^6, un billion 10^{12}, un trillion 10^{18}... voire un nonillion 10^{54}, nombres donnés en exemple par Leibniz dans les Nouveaux essais pour expliquer la logique et la puissance du symbolisme mathématique). Pour tous les nombres auxquels on refuse habituellement de penser car ils ne veulent rien dire pour nous, il faut fournir une définition en intention. Il le faut impérativement pour appréhender le nombre d'une collection contenant un nombre infini d'éléments sans avoir à dire « ainsi de suite », collection infinie comme l'est la collection des nombres naturels elle-même et comme le sont bien d'autres collections !

L'idée qui s'impose est en fait de définir un nombre à partir de cette propriété définissante « avoir le même nombre d'éléments que telle collection », propriété incluse dans l'idée de classe. « *Il est clair qu'un nombre est une manière de mettre ensemble certaines collections, précisément celles qui ont ce nombre d'éléments* » (p. 56) que ces collections soient vides, non vides, finies ou infinies !

L'esprit ne semble exiger rien d'autre, rien de moins et rien de plus, même si l'idée de collection reste floue ou le terme de « classe » est équivoque – Russell ne l'utilisant jamais sans précaution, lui consacrant le chapitre XVII, l'avant dernier de son Introduction.
Le plus urgent est de définir l'expression « avoir le même nombre d'éléments que ». Il ne s'agit de rien moins que d'une opération, l'opération élémentaire du dénombrement, qui consiste à établir une équivalence entre deux ensembles, et pour ce faire à réaliser une bijection (relation bi-univoque ou « de un à un ») entre les éléments de l'un et ceux de l'autre.
Puisque la relation du mariage est bijective, associe un marié unique à une mariée unique, je peux savoir que l'ensemble des mariés est équivalent à celui des mariées... ou qu'il y a le même nombre de mariés que de mariées, quel que soit par ailleurs ce nombre que je n'ai nul besoin de compter ! Le nombre de mariés et de mariées est logiquement indépendant de tout comptage.
D'où une nouvelle définition : « *le nombre d'une classe est la classe des classes qui lui sont équivalentes* »... qui s'oppose dans l'esprit à l'idée du sens commun suivant laquelle c'est l'inverse qui est vrai, à savoir que des classes sont équivalentes quand elles ont le même nombre d'éléments qu'on vient de compter ! D'où une définition du nombre enfin satisfaisante : « *Un nombre est quoi que ce soit qui soit le nombre d'une classe.* » (p. 63). Définition correcte qui n'est aucunement circulaire si « le nombre d'une classe » renvoie à l'établissement d'une équivalence, partant à la réalisation d'une bijection. Définition suffisante pour penser tout nombre, quelle que soit l'opération sur des paires de nombre à laquelle il correspond.
Je peux établir une relation bijective entre l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des nombres pairs.

0, 1, 2, 3, 4, 5, ...
0, 2, 4, 6, 8, 10...

Il y a donc le même nombre d'entiers naturels que de nombres pairs ! Je peux le savoir alors que je peux procéder à aucun comptage...

Les espèces de nombres définies dans l'Introduction

Fournir une définition en extension correspond au fait de découvrir un objet, certainement pas de l'inventer. Une définition en intention est-elle inventée pour autant ? On pourrait en douter si la caractéristique était en quelque sorte issue d'une intuition ou perçue. Mais ce n'est pas le cas, « avoir le même nombre d'éléments que » est conçu par une relation de un à un. Le génie du mathématicien est d'avoir compris le caractère suffisant de cette relation effectivement première en un sens logique, car plus simple et plus générale que toute autre.

La fécondité de l'idée de nombre est illustrée dans la suite de l'Introduction par les exemples que nous retrouvons des nombres fractionnaires, chapitre 3, des nombres rationnels, réels et complexe, chapitre 7 ou des nombres transfinis, cardinaux infinis, chapitre 8.
La méthode d'investigation qui consiste à remonter à l'antécédent logique primitif aboutit au nombre ordinal (ou nombre-de-relation) après la détermination objective de l'idée d'ordre, chapitre 4, et des différentes relations qu'elle peut impliquer, relation carrée par exemple, ou bien les trois relations asymétrique, transitive, connexe qui sont nécessaires pour produire des suites.

Pour ce qui nous intéresse tout spécialement il est utile de souligner avec Russell (pp. 137-142 puis 142-151) l'erreur commune qui consiste à penser dans le cas de la genèse des nombres une sorte d'extension progressive, chaque classe de nombre apparaissant rétrospectivement comme un cas particulier de la classe de nombre supérieure, plus étendue ou englobante. Les nombres naturels serait un cas particulier d'entiers, les entiers des cas particuliers de nombres fractionnaires, etc. jusqu'aux réels qui seraient un cas particulier de nombres complexes. Mais il n'en est rien, car définir des nombres, fractionnaires, réels ou complexes, ce n'est pas rajouter une caractéristique supplémentaire à un ensemble déjà conçu mais produire pour elle sa caractéristique propre.
C'est particulièrement net dans le cas des réels qui, par leur nature, sont infiniment plus nombreux

que les entiers. Le nombre des réels étant la puissance du continu !

Penser un nombre comme étant un nombre réel, c'est l'identifier comme « *segment de la suite des rationnels rangés par ordre de grandeur* » (p. 151)... ce n'est évidemment pas recourir à une intuition plus fine de la nature des incommensurables ! Nul ne découvre accidentellement ou intuitivement le nombre réel, ni *a fortiori* le nombre complexe. Le hasard peut faire découvrir une méthode de calcul, dans une certaine mesure s'entend. L'audace peut amener à l'effectuation d'une opération impossible avec des nombres « connus », comme Euler utilisant $\sqrt{-1}$ pour résoudre des équations. Mais tout cela, tout ce bricolage, a lieu bien avant l'arithmétisation et la logicisation des mathématiques.

22. Le temps des critiques

Nous ferons maintenant jouer trois critiques, toutes aussi sévères quoique très différentes dans l'esprit. Il faut bien comprendre en effet qu'il ne s'agit pas de simples polémiques mais de véritables tentatives de dialogue avec la position logiciste de Russell.

Nos trois critiques, Piaget, Poincaré et Wittgenstein, reconnaissent un caractère fondateur ou novateur à l'entreprise du logicien-mathématicien qu'est Russell (en compagnie de Whitehead pour la rédaction des Principia) mais n'adhèrent pas à l'épistémologie qu'il croit devoir professer à la suite de ces travaux.
Leur propre interprétation de l'épistémologie interne des mathématiques diffère sur un point essentiel. Pour Piaget il s'agit de réfuter le point de vue de Sirius que suppose la définition russellienne du nombre et distinguer des périodes ou stades dans la vie de l'esprit. Pour chacune le nombre a une réalité psychologique propre. Pour Poincaré il faut mettre en doute la nécessité logique du nombre en la rattachant à la démarche d'ensemble des mathématiques qui est d'être la création d'un langage utile aux autres sciences. Il n'existerait pas de vérité du nombre en soi mais une vérité instrumentale et conventionnelle du nombre. Pour Wittgenstein la définition russellienne souffre d'un défaut originaire. Si Russell a cru pouvoir combattre la métaphysique en se détachant de ses certitudes *a priori*, sa victoire est en fait illusoire. Il continue malgré lui à faire de la métaphysique ou à alimenter un discours de ce type, vide de sens. L'existence du nombre, sa nécessité ou bien son universalité, n'ont pas à être discuté. Cela n'a pas de sens de vouloir fonder les nombres en raison ou les réfuter en raison. De même, l'entreprise qui viserait à justifier les règles du jeu d'échec n'a strictement aucun sens. Le nombre naît d'opérations sur des couples d'objets idéaux. On tombe dans un dilemme comparable à celui de l'œuf et de la poule, dès lors qu'on se demande qui est le premier du nombre ou des opérations qui lui sont liées !

Une critique psychologique liée à une autre compréhension du problème de l'origine du nombre, la démarche expérimentale de Piaget

Les recherches du psychologues sur l'apprentissage du nombre par l'enfant n'ont pas moins d'intérêt que celles de l'historien du nombre récapitulant la construction de l'arithmétique au cours des siècles. Il faut bien comprendre toutefois que l'origine psychologique du nombre n'est pas davantage que l'origine historique la clé de la question de son origine logique, pouvant permettre de fixer la nature nécessaire du nombre tout en rendant compte de sa variété.
Jean Piaget, pionnier dans l'enquête sur la construction cognitive du nombre, ne manque pas lui-même de préciser de manière critique ce que le type d'enquête positive qu'il mène avec ses collaborateurs sur l'apprentissage du nombre à divers âges peut apporter à la réflexion philosophique.

Voyons d'abord les buts et protocoles de son enquête ainsi que les les résultats obtenus (en nous limitant au résumé fait par Piaget dans Sagesse et illusions de la philosophie, 1965).

Dans une confrontation au projet husserlien d'une constitution d'une eidétique du nombre (chapitre III, pp. 142-145), c'est-à-dire d'une intuition de la vérité intemporelle du nombre tiré de l'activité du sujet pensant, Piaget souligne deux « *malentendus* » à dissiper. D'une part, pour éviter le psychologisme et la confusion du fait et du droit qui s'ensuit, le psychologue doit considérer l'arithmétique à laquelle il a directement accès par introspection comme une simple arithmétique naturelle divergeant du modèle logique achevé, conçu par le logicien, Frege, Peano ou Russell. Toute idée limitée de l'arithmétique promeut une idée limitée du nombre. Et détourne le chercheur d'une « *étude interdisciplinaire des filiations psychologiques concrètes et des généalogies formelles* » (p. 143). D'autre part, pour éviter une sorte de cercle vicieux, le psychologue doit surtout abandonner la pure fiction d'un sujet psychologique s'élevant au-dessus de sa conscience mondaine et accédant par lui-même à des vérités éternelles dans des intuitions transcendantales. La réduction phénoménologique permettant la saisie des essences est un tour de passe-passe ; en tant qu'elle produit des vérités éternelles, la logique est formelle et ne repose que sur elle-même, pas sur l'extraordinaire puissance de l'esprit humain ! Le psychologue doit entendre ce qu'affirment de l'axiomatique un Cavaillès, et tant d'autres : « *Dire que l'intuition est vraie suppose une justification normative, que l'intuition elle-même ne fournit pas, n'étant que l'expression de la nécessité éprouvée par un sujet. Bref, ou bien la logique est suspendue à l'intuition d'un sujet transcendantal, et elle n'est plus absolue (ce qu'on désirait qu'elle soit), ou bien elle est absolue, et il n'est plus besoin d'une intuition transcendantale* » (p. 145)

Revenons donc aux faits et pas aux choses mêmes ! Piaget privilégie l'observation d'opérations très simples, et non de calculs mettant en jeu diverses techniques opératoires, chez des enfants pour qui la permanence de l'objet est acquise. Le chercheur présente diverses collections d'objets, de différentes manières, changent la disposition des éléments ou bien encore réunit et sépare plusieurs collections. Chaque fois il questionne l'enfant observé sur son appréhension de la quantité. Ainsi le psychologue se met en quête de la « *structuration des opérations logico-mathématiques comme telles* » (p. 146) à divers âges. La visée de ces observations est de repérer le passage d'une pensée concrète faisant systématiquement intervenir la réversibilité des actions à une pensée abstraite envisageant la réversibilité des opérations logiques. Pensée pouvant immédiatement concevoir que si $2+3 = 5$ alors $5 = 3+2$ mais aussi $5 - 3 = 2$. Sans cette réversibilité mentale, faisant abstraction de l'ordre temporel d'écriture et plongeant l'opération dans le temps bidirectionnel de l'implication logique, il n'y a pas pour l'enfant véritablement de nombre possédant une unité. Il n'y a pas de possibilité de composition additive.
La plupart des enfants de cinq ans pensent que quand on prend un tas de 10 jetons et qu'on le sépare en deux tas de 4 et 6 jetons on obtient plus de jetons, car il y a un tas de plus !
Vers sept ans, la conservation du nombre est en revanche acquise. Cela veut dire que l'opération logique a acquis son autonomie temporelle (ou atemporelle) et son objectivité propre (universelle) par rapport à l'action physique proprement dite, celle de réunir des objets matériels de manière contingente dans une temporalité orientée.
La réversibilité est établie expérimentalement comme la condition de possibilité cognitive du lien de nécessité logique. Piaget affirme alors (p. 148) : « *il n'y a là bien entendu que l'une des phases de l'épuration des concepts et de la formation des opérations et le processus ne fait ensuite que s'accentuer avec la constitution d'opérations formelles libérées bien davantage encore de leur contenu spatio-temporel.* » Et il développe une théorie évolutionniste du sujet connaissant, ou « *sujet épistémique* » (p. 149) : « *la découverte de la réversibilité opératoire marque la constitution du sujet épistémique qui se libère de l'action propre au profit des coordinations générales de l'action, c'est-à-dire de ces formes permanentes de réunion, d'emboîtement, d'ordination, de correspondances, etc. qui relient les actions les unes aux autres et constituent ainsi leur substructure nécessaire* ».
Évitant soigneusement de réduire l'abstraction à une seule opération, soi-disant spatiale, la juxtaposition dans un milieu homogène par principe, Piaget est anti-bergsonien au possible. La

réversibilité psychologique qu'il étudie est, tout comme l'équivalence logique de Russell, une stabilisation de l'imagination dans des formes utiles, absolument pas un schématisme *a priori* de l'entendement humain. Rien d'inné, rien d'intuitif dans cette acquisition de la notion de nombre ! La raison est une structuration de nos représentations communes une fois celles-ci tournées vers la forme même des choses, l'invariance du nombre d'objets composant certaines collections par exemple.
Plus loin, Piaget prend la peine de revenir sur la notion de structure ou l'idée d'une structuration formelle (p. 150) pour prévenir d'éventuelles querelles avec les phénoménologues : « *La notion de structure ne se réduit nullement à une simple formalisation due à l'esprit de l'observateur : elle exprime au contraire, à travers des formalisations auxquelles elle se prête par ailleurs, des propriétés constitutives de l'être structuré. Elle joue donc, mais sur le terrain ouvert à la vérification et au calcul, le rôle qu'on souhaiterait attribuer à la connaissance « eidétique »*(...) »

Au chapitre IV puis au suivant se nouent les bases d'un dialogue avec le mathématicien ou bien le logicien. La question est de savoir si, dès lors qu'on envisage la structuration de la pensée logico-mathématique de l'enfant comme étant achevée la psychologie n'a plus rien à dire au philosophe penché sur la saisie de la nature du nombre.
D'une part, son étude du fonctionnement psychique, de la cognition, est toujours requise car l'esprit n'est en rien réductible à un modèle cybernétique ou au fonctionnement d'une machine. Le nombre n'est rien pour une calculatrice qui ne fait aucune opération ! Il faut en effet toujours distinguer le fonctionnement de l'esprit et celui de la machine (pp. 184-185). La machine repose sur la mise en œuvre de causalité ; seul l'esprit établit des correspondances entre des significations ! 2+3 = 5 est une implication logique pas une réunion d'ordre causal. Un sujet pensant s'assimile de telles opérations. Il ne se contente jamais d'intérioriser en première personne (sous le mode de la certitude) une association d'idées objectives car en troisième personne (des vérités en soi impersonnelles).
D'autre part, en tant que sciences humaines et pas théorie dogmatique des facultés, la psychologie n'a rien à craindre des philosophes faisant eux-mêmes effort pour comprendre d'autres sciences, que ce soient les mathématiques, la physique ou la biologie, de ces véritables philosophes qui se mettent en mesure d'en saisir l'épistémologie implicite. D'où l'ouverture du chapitre V sur le « *problème des faits* »: « *Que les philosophes abordent les questions de normes, rien de plus naturel, car si l'on cherche à remonter aux problèmes de principes et de fondements, la discussion des normes s'impose nécessairement. La logique est la science de la vérité formelle, c'est entendu, et à l'égard d'une démonstration logistique on ne peut que s'incliner. Mais il reste à coordonner ces normes formelles avec l'ensemble des problèmes et il est donc naturel que la réflexion s'attache à ces questions de coordinations* ».
Piaget semble prêt à s'incliner devant les réflexions d'un Russell (et de tous les autres avec lesquels il élabore l'épistémologie des mathématiques)... mais il ne semble pas prêt à affirmer que l'*Introduction à la philosophie mathématique*, par exemple, résolve tous les problèmes ni n'aborde même les plus importants ! Les faits issus d'observations scientifiques, les considérations de psychologie génétique, demeurent indispensables pour réfléchir notamment la pédagogie ou mettre en application des programmes de remédiation à des difficultés d'apprentissage particulières. Car il ne suffit jamais de savoir comment les sujets qui apprennent les mathématiques devraient normalement penser... il faut bien partir de la manière dont ils pensent effectivement.

Une critique mathématique de la position de Russell, la pensée « anti-formaliste » de Poincaré

Contrairement à celle qui vient d'être exposée, la critique produite par Poincaré de la tentative russellienne, logiciste, est virulente. Elle s'expose jusque dans un ouvrage de 1912, Les mathématiques et la logique, à la veille de la mort du grand mathématicien.
Mais, répétons-le, il faut surtout bien comprendre que nous avons là un débat fait de critiques et de

réponses aux critiques sur fond de connivence ! Comment expliquer autrement la poursuite du dialogue, si ce n'est en alléguant le respect mutuel ?
Après avoir pris connaissance de la pensée de Russell, Poincaré rédige une réplique dans La Science et l'hypothèse (1902). Russell contre-attaque dans la revue *Mind* en 1905, avec un article décapant. Poincaré fait jouer un droit de réponse dans la même revue en 1906.

Insistons d'abord sur les points de convergence, la reconnaissance de l'arithmétique comme pensée pure, devant souscrire à une exigence de rigueur formelle sans faille. Poincaré contrairement à Russell adopte sans complexe l'idée que les mathématiques ne sont non pas de simples découvertes mais sont des inventions prodigieuses de l'esprit humain. Russell en effet hésite à ne pas faire intervenir l'influence d'un état pré-mathématique où s'élaborerait empiriquement une pré-notion du nombre. De plus, il ressent quelques scrupules à parler comme Dedekind de pure création du nombre ou à présenter les fictions logiques comme issues du seul cerveau humain.
Le premier en revanche n'hésite pas à parler de la « *puissance créatrice de l'esprit*» (p. 48), affirmant que celle-ci est inépuisable, au chapitre *La grandeur mathématique et l'expérience* de la Science et l'hypothèse. D'après le mathématicien français cette puissance s'est peu à peu développée au cours des âges, de telle sorte que les premières productions du génie humain ont vite été jugées insatisfaisantes et ont fait l'objet de véritables re-créations. Dans l'histoire du nombre en particulier, il y eut des phases d'expansion, comme celles qui présidèrent à l'invention des fractions ou bien des incommensurables (p. 47) mais aussi des phases de refondation, comme celle qui permit de passer de la découverte de ces incommensurables à leur définition rigoureuse, c'est-à-dire à leur véritable invention par l'esprit humain, sous l'impulsion des travaux de Dedekind, § *Définition des incommensurables*, pp. 49-51. Une chose aussi simple que le nombre se complexifie donc en permanence, devenant, pour le mathématicien paradoxalement de plus en plus simple ou rigoureux ou objectif, dans une définition plus vraie car « *exempte de contradiction* » (p. 48). La simplicité est sans doute quelque chose de très subjectif. Toute définition est simple dès lors que je la comprends ! Il ne faudrait pas se perdre en arguties sur ce point précis. La simplicité conquise au cours de l'histoire du nombre correspond au fait que l'évidence première, nos préjugés et nos certitudes irrationnelles, ne sont en fait jamais simples ! Poincaré affirme ainsi au chapitre précédent de la Science et l'hypothèse, sur la *Nature du raisonnement mathématique* : « *C'est donc au début de l'arithmétique que nous devons nous attendre à trouver l'explication que nous cherchons, mais il arrive justement que c'est dans la démonstration des théorèmes les plus élémentaires que les auteurs des traités classiques ont déployé le moins de précision et de rigueur. Il ne faut pas leur en faire un crime ; ils ont obéi à une nécessité ; les débutants ne sont pas préparés à la véritable rigueur mathématique ; ils n'y verraient que de vaines et fastidieuses subtilités ; on perdrait son temps à vouloir trop tôt les rendre plus exigeants ; il faut qu'ils refassent rapidement, mais sans brûler d'étapes, le chemin qu'ont parcouru lentement les fondateurs de la science.*
Pourquoi une si longue préparation est-elle nécessaire pour s'habituer à cette rigueur parfaite, qui, semble-t-il, devrait s'imposer naturellement à tous les bons esprits ? C'est là un problème logique et psychologique bien digne d'être médité. » (pp. 34-35).

L'ouvrage majeur de Poincaré, débute par une première partie intitulée *Le nombre et la grandeur*, titre qui suffit à nous faire comprendre qu'il n'y aura dans toute l'œuvre aucune confusion entre les deux notions, aucun glissement de l'un à l'autre. De même, Poincaré sépare catégoriquement le nombre de la mesure, toute grandeur n'étant pas mesurable – opposant au passage différents ordres, celui de la grandeur mathématique et celui de la grandeur physique, celui du continu mathématique et celui du continu physique, à une ou plusieurs dimensions. En cela il rejoint doublement la perspective de l'Introduction à la philosophie mathématique.
Dans le résumé du second chapitre (p. 55), il en vient à dire que le nombre, comme le point ou d'autres objets mathématiques élémentaires, n'est pour l'esprit humain qu'un symbole dans un système particulier de symboles ; symbole toutefois « *particulier* » car absolument dépourvu de

contradictions – contrairement au signe de la langue ordinaire – et motivé, car conçu pour s'appliquer à la résolution de problèmes spécifiques, pratiques ou théoriques, légués par d'autres sciences, la physique tout particulièrement. √2 est ainsi depuis Dedekind le symbole d'un système de classement.
Le nombre réel en général est un symbole dans ce système particulier de symboles qu'est le continu mathématique d'ordre deux !

Voici, plus en détail, la manière dont Poincaré restitue la définition du nombre incommensurable par Dedekind (p. 50) :
« *On peut répartir d'une infinité de manières les nombres commensurables en deux classes, en s'assujettissant à cette condition qu'un nombre quelconque de la première classe soit plus grand qu'un nombre quelconque de la seconde classe.*
Il peut arriver que parmi les nombres de la première classe, il y en ait un qui soit plus petit que tous les autres ; si, par exemple, on range dans la première classe tous les nombres plus grands que 2 et 2 lui-même, et dans la seconde classe tous les nombres plus petits que 2, il est clair que 2 sera le plus petit de tous les nombres de la première classe. Le nombre 2 pourra être choisi comme symbole de cette répartition.
Il peut se faire, au contraire, que parmi les nombres de la seconde classe, il y en ait un qui soit plus grand que tous les autres ; c'est ce qui a lieu, par exemple, si la première classe comprend tous les nombres plus grands que 2, et la seconde tous les nombres plus petits que 2 et 2 lui- même. Ici encore, le nombre 2 pourra être choisi comme symbole de cette répartition.
Mais il peut arriver également que l'on ne puisse trouver ni dans la première classe un nombre plus petit que tous les autres, ni dans la seconde un nombre plus grand que tous les autres. Supposons, par exemple, que l'on mette dans la première classe tous les nombres commensurables dont le carré est plus grand que 2 et dans la seconde tous ceux dont le carré est plus petit que 2. On sait qu'il n'y en a aucun dont le carré soit précisément égal à 2. Il n'y aura évidemment pas dans la première classe de nombre plus petit que tous les autres, car quelque voisin que le carré d'un nombre soit de 2, on pourra toujours trouver un nombre commensurable dont le carré soit encore plus rapproché que 2.
Dans la manière de voir de M. Dedekind, le nombre incommensurable √2, n'est autre chose que le symbole de ce mode particulier de répartition des nombres commensurables ; et à chaque mode de répartition correspond ainsi un nombre commensurable ou non, qui lui sert de symbole. »
La science et l'hypothèse, version de 1914 :
http://www.univ-nancy2.fr/poincare/bhp/hp1914sh.xml

Une critique philosophique virulente de la démarche de Russell, la pensée « conventionnaliste » de Wittgenstein

Quoique très proche à certains égards de la position de Russell, Wittgenstein s'en démarque par quelques idées qui vont très vite prendre de grandes conséquences.

Volontiers sceptique, moins théoricien que critique, ne partageant pas l'idéal d'une réduction des mathématiques à la logique afin de lui assurer une assise inattaquable, Wittgenstein considère le projet logiciste comme vain, y compris s'il pouvait arriver un jour à réaliser ses fins ? Ce dont il doute. Il conçoit en effet les mathématiques non comme une totalité, pouvant être évaluée de l'extérieur, mais comme un système voire comme un jeu entièrement régi par ses propres règles, pour lesquels il est illusoire de procéder à un travail de justification. Tractatus logico-philosophicus [6.2] « *Les mathématiques sont une méthode logique. Les propositions des mathématiques sont des équations, donc des pseudos-propositions.* » Ou encore [6.234] « *Les mathématiques sont une méthode de logique.* » et [6.2341] « *L'essentiel de la méthode mathématique consiste à travailler avec des équations. C'est sur cette méthode que repose en effet l'évidence de chaque proposition mathématique* ». Un système comme celui des mathématiques, est déterminé de l'intérieur. Car c'est

un monde.
Prenons un objet quelconque du système de l'arithmétique, les nombres. Le philosophe peut considérer sa tâche comme remplie avec la détermination de l'usage ou de la grammaire du mot « nombre » tel qu'il est de fait utilisé dans le discours et les raisonnements des mathématiciens ; la philosophie n'a que faire d'une définition du nombre s'il n'a rien de plus à comprendre ni surtout rien à justifier. L'idée de valeur du nombre par exemple n'a pas de sens !

Avant de rencontrer Russell, Wittgenstein avait médité le projet de Frege et considérait le projet de fondation des mathématiques sur des bases logiques comme un projet devant aboutir à la création de pseudo-objets logico-mathématiques, comme le nombre enfin intégralement explicité ou fondé en raison. Lorsqu'il le quitta, en raison de la survenue de la guerre, il rédigea le Tractatus logico-philosophicus où, s'en prenant à l'entreprise logiciste, il refusait déjà, par exemple, la définition des nombres à l'aide de la propriété héréditaire "b est le successeur de a", car il y a un « *cercle vicieux* », proposition [4.1273]. Dans ce cercle on cherche à définir le sens par la forme, mais n'arrive qu'à confondre l'un et l'autre. La thèse du Tractatus [4.1272] est que les mots comme "nombre" ou "fonction" ou même "faits", « *désignent des concepts formels et ils sont représentés dans le symbolisme logique par des variables et non par des fonctions ou des classes (comme le pensaient Frege et Russell). Des expressions telles que «* 1 est un nombre *», «* il n'y a qu'un zéro *» et d'autres analogues sont dénuées de sens* »

Il adopte ainsi une idée en quelque sorte extrême, refusant la prétention de l'épistémologue à donner du sens à ce qui n'en a que comme « variable » d'un système formel, déniant par conséquent au nombre une réalité extérieure non pas à la pensée humaine mais à l'établissement d'équivalences, à la mise en œuvre d'opérations comme l'addition ou la multiplication.
[6.021] *Le nombre est l'exponent d'une opération.*
[6.022] *Le concept de nombre n'est rien d'autre que ce qu'il y a de commun à tous les nombres, la forme générale du nombre.*
Le concept de nombre est le nombre variable. Et le concept de l'égalité des nombres et la forme générale de toutes les égalités de nombres.
[6.03] *La forme générale du nombre entier est* $[0, \xi, \xi+1]$

Après avoir inventé le nombre, l'être humain devrait l'utiliser, pourrait l'admirer s'il a du temps à perdre, mais il ne devrait pas chercher à découvrir son sens sous peine de courir après une chimère ! Le nombre n'est pas véritablement une construction ayant sa propre stabilité ou une production de l'esprit humain ayant par rapport à lui la moindre autonomie. Il n'existe que de manière illusoire, à travers le système de règles qui lui permettent de ne pas être contradictoire.
http://www.lscp.net/persons/sackur/docs/Sackur2005.pdf

La critique faite dans le Tractatus est constamment reprise par Wittgenstein, la modifiant progressivement, trouvant des arguments dans un ensemble de remarques non publiées. Vaste critique unifiée et restituée par Jacques Bouveresse,dans « Philosophie des mathématiques et thérapeutique d'une maladie philosophique : Wittgenstein et la critique de l'apparence "ontologique" dans les mathématiques » (1967).
La dénonciation de l'illusion de la signification du nombre est l'idée cardinale d'où découle le jugement d'inutilité émis par Wittgenstein à l'égard des travaux épistémologiques de Russell et des efforts pour remonter à un principe même seulement logique du nombre :

> « En ce qui concerne l'arithmétique courante, nous nous persuadons assez aisément que le professeur de calcul nous parle du nombre 2 à peu près au sens où le professeur de géographie nous parle de la mer du Nord et que, lorsque nous apprenons à compter, que ce soit sur nos doigts, au moyen de bâtons ou dans un système de numération à base quelconque, nous acquérons ou développons à chaque fois une certaine familiarité avec un système unique d'entités bien déterminées, la suite des nombres naturels, dont s'occupe précisément l'arithmétique élémentaire. Wittgenstein, pour sa part, ne cesse de dénoncer l'erreur commune,

selon lui, qui consiste à croire que, dans le cas d'un substantif comme, par exemple, « le sens » , nous devions rechercher et finalement exhiber quelque chose dont nous soyons autorisés à dire: « *c'est cela le sens* » (cf. le Cahier bleu). C'est, selon toute apparence, une idée de ce genre qui a amené Frege et Russell à se croire obligés de répondre à la question: « Qu'est-ce que le nombre 2 ? » (cf. Wittgenstein's Lectures in 1930-33, p. 7, ce que Wittgenstein reproche à Frege, c'est de vouloir préserver, derrière la diversité des signes (| |, 2, II, etc.) et la diversité des "sens" (*Sinne*) (1 + 1, 6 : 3, √4, etc.) une identité de "signification" (*Bedeutung*) ou d' "objet" (*Gegenstand*), comme le nombre 2).
Il ne faut pas oublier que le sens d'un mot est déterminé d'une manière générale par les règles de son usage et que, dans le cas des signes numériques comme dans celui des pièces du jeu d'échecs, nous en avons assez dit sur le « sens » lorsque nous avons exposé la ou les techniques de manipulation des symboles. Wittgenstein insiste longuement sur le fait que ce qui est essentiel dans le passage d'un système de numération à un autre, par exemple du système incommode des bâtons à la notation décimale, est l'apprentissage d'une technique entièrement nouvelle (Bemerkungen, I, 155) qui a sa « *vie propre* » (*Ibid*., II, 51), qu'entre les diverses techniques de calcul les questions de priorité et de hiérarchie sont en fait dénuées de sens et que les efforts accomplis par Russell dans les Principia pour accéder, au moyen de la technique logique, à une sorte d'essence pré-technique de la mathématique représentent une impressionnante, mais inutile dépense d'énergie.
Si, au lieu de changer simplement de système de numération, nous changeons de système de nombres, c'est-à-dire procédons à ce qu'on est convenu d'appeler les « *extensions successives de la notion de nombre* », nous ne faisons encore que créer de nouveaux jeux mathématiques, plus compliqués et plus « *intéressants* » à certains égards que les précédents, mais qui ne leur sont pas plus supérieurs que, pour reprendre une formule de Wittgenstein, le « *système de projection* » qui envoie « 2 + 3 » sur « 5 » n'est « inférieur » à celui qui envoie « 11 + 111 » sur « 11111 » (Wittgenstein's Lectures in 1930-33, p. 8). Une nouvelle technique de calcul nous fournit un nouveau mode d'expression et nous ne pouvons rien faire de plus absurde, selon Wittgenstein, que d'essayer de décrire le nouvel appareil que nous nous donnons au moyen des anciennes expressions (cf. Bemerkungen, II, 12. Pour Wittgenstein, on n'insistera jamais assez, par exemple, sur le fait que le nombre réel 2 est quelque chose de totalement différent du rationnel 2 et de l'entier naturel 2). Cela signifie évidemment que les comparaisons (légitimes) que nous pouvons établir entre les divers jeux mathématiques doivent être dépouillées de toute intention « *réductrice* » (ce qui fait en principe d'une entreprise comme l'« arithmétisation de l'analyse » une pure absurdité...).
Comparer entre eux des jeux appartenant à une même « *famille* », c'est faire ressortir des invariants, des analogies, des différences etc., mais il ne faut pas oublier que tout jeu digne de ce nom se suffit parfaitement à lui-même : il n'en « *fonde* » pas plus d'autres que ceux-ci ne le « *complètent* ». Aussi importe-t-il, dans les mathématiques plus que partout ailleurs, de se guérir de cette maladie philosophique de la réduction à l'unité, de cette hérésie 'socratique' que dénonce le Cahier Bleu (pp. 48-59). Lorsque je dis qu'un nombre fractionnaire, à la différence d'un nombre cardinal, n'a pas de successeur immédiat, je ne fais que confronter deux jeux ; c'est, dit Wittgenstein, à peu près comme si je faisais remarquer qu'aux dames il y a un coup qui consiste à passer par-dessus un pion et qui n'existe pas aux échecs (cf. Bemerkungen, I, Anhang II, 13). »

http://cahiers.kingston.ac.uk/vol10/cpa10.9.bouveresse.html ou bien
http://cahiers.kingston.ac.uk/pdf/cpa10.9.bouveresse.pdf

23. Une réconciliation possible des perspectives ? L'article de Worms sur la trinité Bergson-Husserl-Russell

Lecture de Frédéric Worms, « Bergson entre Russell et Husserl : un troisième terme ? » (2000).

Avertissement : il s'agit de ma part d'une simple paraphrase... ma plus grande audace a été de produire un découpage de l'article en trois parties ! Je ne cache pas que je me suis livré à cette lecture par sentiment d'obligation. Et une fois le travail achevé je n'ai pas eu l'impression d'avoir appris grand chose.

Worms adopte dans son article une position conciliante. Il ne cherche pas à nier la diversité irréductible des positions. Il s'agit en effet de faits historiques : Husserl a ignoré Bergson et a conçu sa philosophie de l'arithmétique indépendamment de la critique effectuée à la même époque par Bergson. Ce dernier dirigeant ses attaques contre l'apriorisme kantien et la pensée dialectique incapable de saisir le changement dans sa vérité, comme pur devenir. Russell pour sa part a attaqué Bergson, dans un article de 1912, « La philosophie de Bergson ». Il voyait en lui un philosophe particulièrement anti-philosophique (métaphysicien mystique à ses heures voire misologue), qui valorise en toute occasion l'intuition, la saisie poétique de l'évidence (de celle de l'évolution créatrice, par exemple) contre le raisonnement scientifique et la construction logique du monde.

Mais Worms, conciliant, pense que derrière les écarts et les querelles, il existe des points de convergence possibles.
La différence qui existe entre les manières de traiter la question du nombre, chez Husserl, chez Bergson et chez Russell ferait d'après Worms « *contrepoint* » à la dispute qui a opposé Frege à Husserl, plus largement la philosophie analytique et la phénoménologie.

Revenons sur cette dispute, qui est l'histoire d'un divorce. Frege reproche à Husserl d'avoir eu le même projet explicite que lui, de fonder l'essence du nombre indépendamment des observations des psychologues, partant des idées obscures qu'ils empruntent à l'expérience. Et d'avoir bifurqué en cours de route, adoptant une forme de pensée psychologisante pas moins critiquable que l'empirisme le plus naïf. Husserl tomberait dans le psychologisme qu'il dénonce en cherchant à appréhender les modalités invariantes de la saisie du nombre. Frege a tort ou bien il a raison... il faudrait trancher, textes à l'appui.
Si le rapport qu'entretiennent les pensées de Husserl, Bergson et Russell n'est pas polémique dans le même sens, c'est qu'il est possible d'y voir des perspectives différentes. La difficulté est d'éviter des malentendus. La pensée philosophique pourrait rétrospectivement traquer les occasions manquées d'échanger des idées.

Worms souligne l'intérêt de la question « *technique* » du nombre, car avec elle ressemblances entre les objets d'étude et oppositions conceptuelles s'accentuent, conjointement.
De fait, si l'étude de ces ressemblances et de ces oppositions s'impose c'est qu'il y a un précédent, qui a eu une importance dans le développement des idées philosophiques en France. Le principal adversaire de Bergson fut Brunschwig, grand professeur qui fut à la fois adversaire de la logistique de Russell et ouvert aux thèses originales de Husserl, dès leur diffusion. Worms réclame donc l'adoption d'un point de vue ouvert. Il demande de revenir à l'essentiel, l'interrogation qui s'énonce en ces termes « *pourquoi Bergson et Russell rencontrent-ils le problème du nombre ?* » (p. 82)
Alors l'enjeu de la définition du nombre devient (presque) celui des prétentions générales de la philosophie à juger de l'usage de la raison. On est reconduit à la question « *en quoi ces options philosophiques nous ramènent-elles à des choix toujours à refaire ?*». On est poussé à questionner l'histoire de la philosophie, susceptible de connaître un développement à l'instar des connaissances scientifiques ou bien de faire advenir des pensées absolument singulières n'ayant ni raison ni tort à l'égard des autres pensées philosophiques.

I. Le problème du nombre, un problème commun à Husserl et à Bergson

Pourquoi tous deux partent-ils de la définition du nombre jadis donnée par Euclide comme « *collection d'unités* » ? Pourquoi tous deux la jugent-ils insuffisante ?
Répondons immédiatement à la seconde question. Parce que cette définition fait reposer le nombre sur l'acte d'un sujet. Parce qu'elle semble accorder à l'acte mental du rassemblement du divers une importance capitale. Elle introduirait ainsi de la subjectivité au cœur de la pensée la plus objectivement claire et précise.
On ne peut que refuser son adhésion sans prendre de précautions. Ce fondement subjectif est-il solide ? Qu'est-ce en vérité que cet acte subjectif, cette opération mentale qui fait être le nombre comme réalité objective ?
Que se passe-t-il lors de la découverte du nombre ? Le sujet s'élève-t-il à l'universel en pensant le nombre comme une pure forme ou bien abandonne-t-il tout ce qui fait sa valeur, sa singularité et

son caractère historique ? Worms présente cette alternative comme une sorte de dilemme, « *le nombre trace dès le départ une sorte de ligne de partage, non pas entre un sujet nombrant et un objet nombré, mais à l'intérieur même du sujet entre certains actes opposés* » et il poursuit « *la numération apparaissant précisément comme un acte limite, par lequel une opération subjective acquiert une validité objective* » (p. 83).

Il y aurait sans conteste un fondement psychologique au nombre et pourtant il faudrait reconnaître une réalité non psychologique, purement logique, du nombre ! Le nombre serait exemplaire de la puissance de l'esprit, de la possibilité de faire passer quelque chose du psychologique au logique.
Worms indique qu'il existe trois positions à l'égard de ce jugement. D'une part, on peut accepter l'idée d'une élévation du niveau empirique, avec une appréhension psychologique, vers un niveau purement logique, grâce à une intuition pure du nombre. D'autre part on peut envisager les choses de manière tranchée, niant la subjectivité de l'origine ou bien l'objectivité du résultat, et penser ainsi «*que le nombre ne soit pas du tout une collection d'unités en un sens psychologique ou subjectif, ou encore qu'on puisse se passer (ou presque) du sujet pour fonder le nombre* » (p. 83).
Mais, parce qu'il a souligné le caractère étonnant de ces deux dernières positions, il décrète qu'il convient de ne pas s'y intéresser et d'accepter de se limiter à une enquête du paradoxe de la subjectivité s'objectivant et s'universalisant. Ce ne seraient pas de véritables « solutions ».
Pour nous, qui n'avons pas vraiment le même point de vue, il y a là un pari risqué. En effet, si ce ne sont pas de véritables solutions, ce sont bien celles du mathématicien ordinaire, depuis Frege ou Cantor, ou du psychologue ordinaire, au moins depuis les travaux de Piaget en épistémologie génétique. Passons outre.

D'après Worms les deux philosophes, chacun à sa manière reprend l'idée kantienne selon laquelle la numération est une opération transcendantale. Ils appuient tous deux l'idée que le nombre révèle la puissance de l'imagination. Idée kantienne reprise mais aussi infléchie, par Bergson qui ne pense pas le nombre comme schème de l'imagination par lequel le divers temporel est rassemblé dans une unité suivant une opération elle-même temporelle, mais comme fondée dans le seule forme de notre sensibilité, l'espace. Et infléchie par Husserl qui substitue au schème l'idée d'une synthèse entre le psychologique et le logique, d'une donation de sens.

II Bergson et Kant.
Kant évoque une synthèse temporelle du nombre. L'opération mentale qui préside au nombre est en effet une répétition indéfinie, la possibilité de prolonger la suite numérique par addition d'une nouvelle unité.
Bergson insiste quant à lui sur la nature abstraite du nombre. Il est purement spatial en ce qu'il suppose la représentation de choses réduites à des points décrétés identiques car dépourvus de qualités particulière, ce qui ne peut se faire que dans un milieu homogène, *id est* l'espace.
Worms parle d'un « *tour de force* » (p. 84) qui est souvent inaperçu par les lecteurs de Bergson. Insistant sur l'espace comme condition de possibilité du nombre, niant tout rapport au temps, il fait émerger le nombre d'une sorte de prise en compte immédiate ou de regard instantané. Ce à quoi il réserve le terme d' « *intuition* » dans l'Essai... l'esprit réussirait dans une sorte d'acte instantané à dégager une unité partielle dans la totalité homogène de l'espace possible. Cet acte serait la synthèse d'une multiplicité (multiplicité objective) en une unicité (unité subjective demeurant divisible par l'esprit qui l'a fixée). Le nombre pour Bergson est donc « *le résultat d'une synthèse provisoire et instantanée de notre esprit, sur un matériau et dans un cadre purement spatial* » (p. 84)
Provisoire ou contingente, car le type de multiplicité qu'est le nombre est purement quantitative, et donc divisible en fait et en droit. C'est aussi pour cela que le nombre est si manipulable par l'esprit, que nous prenons très vite l'habitude de cesser de le penser pour faire avec lui ou plutôt le signe qui le représente des opérations en chaîne.
En revanche, l'autre multiplicité, qualitative, celle qui est perçue par nous comme série de sensations se produisant dans la durée, est nécessaire. Toute opération de division ou de soustraction

d'une partie est interdite, car elle changerait la durée et détruirait sa qualité propre !

III Le rendez-vous manqué avec Russell

Contrairement à Husserl, Bergson n'est pas prêt à chercher, et donc à trouver au nombre un fondement psychologique qui serait un acte de l'esprit. Entre les œuvres de Bergson et de Russell, il existe même sans doute une opposition irréconciliable.
D'après Worms il est possible néanmoins de faire dialoguer les deux, car le silence ou l'ironie ne sont la stratégie préférée d'aucun des deux philosophes.

Worms défend l'idée que la position si critique de Russell envers Bergson est injuste. Elle l'est accidentellement, car Russell a eu accès aux derniers ouvrages avant les premiers. Il a donc d'abord été confronté aux écrits les plus audacieux, ne découvrant qu'après, avec un préjugé de lecture, les textes sur le nombre de l'Essai. Elle l'est aussi, malheureusement, en raison d'une lecture déformante des principales thèses. C'est volontairement que Bergson s'en tient à la recherche de principes pour rendre compte de la nature et de la nécessité du nombre. A-t-il véritablement sacrifié le concept de nombre à une représentation visuelle et imaginative, une idiosynchrasie du nombre naturel ? Dès lors que Russell le pense, il ne peut que rejeter en bloc la philosophie mathématique de Bergson, et toute son épistémologie. A-t-il raison de le penser ?
D'après Worms ce n'est pas par simple inadvertance que Bergson ne parle pas du concept général du nombre dans son œuvre. Il ne pense pas que le nombre n'existe pour nous que comme concept, pure abstraction. Et il a raison de chercher à identifier l'acte subjectif par lequel l'esprit s'empare du nombre, le fait être pour nous et notre activité pratique. Comme la position transcendantale de Kant, a pensée de Bergson n'est alors aucunement réductrice, ne verse dans aucun empirisme faisant dépendre le nombre d'une perception ou de l'imagination. Il ne fait pas dériver l'idée de nombre de collection d'unités réelles mais d'une intuition supposant la création d'un espace homogène de représentation.
Russell ne pose pas au réel le même genre de questions que Bergson. Soit. Mais il aurait pu trouver une certaine affinité avec l'effort bergsonien pour penser l'abstraction en elle-même. En effet Russell n'a pas de religion faite quand il s'agit de rendre compte de l'expérience, de l'expérience pure. Comme Bergson il a pu lire avec intérêt les travaux de James. L'idée que le corps et l'esprit ne soit que face d'une même pièce pouvait être discutée par les deux. L'un cherchant sans doute à réduire l'esprit à la matière ; l'autre ne voulant pas abandonner la singularité de la vie de l'esprit, faisant toujours intervenir la durée comme principe immanent, permettant la synthèse et la continuité.

Le débat n'a pas eu lieu. Dans le monde anglo-saxon, les philosophes ont vite considéré l'oeuvre de Bergson comme passée de mode. Et En France le succès d'estime de Russell a été d'abord ébranlé par la querelle avec Poincaré puis par l'hostilité de quelques maîtres, dont Brunschvicg, qui en 1912, dans les Etapes de la philosophie mathématique, reproche vivement à Russell non de vouloir davantage de rigueur mais de vouloir substituer à l'épistémologie ouverte une discipline rigide, une sorte de « métaphysique de la logique » !
C'est donc l'indifférence qui va l'emporter sur la curiosité !

L'ouvrage de Brunschvicg, disponible en ligne :
https://archive.org/stream/lestapesdelaph00brun

Conclusion

Est-il vraiment besoin de définir le nombre ? Oui. Triplement oui.

Il faut le faire à l'intérieur même des mathématiques, en partant d'une analyse psycho-génétique ou bien en élaborant une genèse purement logique du nombre à l'intérieur d'un système axiomatique. Dans un cas les collections dont il sera question seront empiriques, dans l'autre ce seront des classes sur lesquelles l'esprit ses opérations, d'apariement, de dénombrement, d'énumération, de mise en ordre. Mais les deux enquêtes sur la nature objective du nombre doivent se rejoindre en permettant la saisie de la signification logique du nombre comme concept. Avec Piaget et Russell.
Il faut le faire dans le vaste champ de l'histoire des idées. Les nombres eux-mêmes dans leur diversité, les générations de nombres dont l'engendrement n'est sans doute aucunement arrêté nous y invitent ! Le nombre 0 ou bien le nombre irrationnel ou encore le nombre transfini nous y poussent. Et contre l'illusion substantialiste ces nombres exotiques et leurs propriétés étonnantes nous incitent à adopter la position la plus modeste qui soit, à redéfinir le nombre comme norme et pur corrélat d'opérations formelles. Avec Wittgenstein.
Il faut le faire, enfin, dans le champ de la métaphysique. Il faut le faire à ses risques et périls, dans une perspective idéaliste ou réaliste. Il faut le faire en adoptant une perspective instrumentale (le nombre produit de l'intelligence, découvert par l'esprit, qui a pour vérité technique de nous permettre de pouvoir mesurer des quantités) ou bien dans une perspective rationaliste (le nombre créé par la raison en ce qu'elle nie le sens commun et tend à s'élever au-dessus de ses propres certitudes provisoires, le nombre invention de l'esprit humain qui ne cesse de découvrir sa fécondité). Avec Platon, Aristote, Thomas d'Aquin, Descartes, Leibniz, Kant, Bergson, Husserl... ou qui l'on préfère, demandons-nous si le nombre est une idée consistante ou une fiction.

Relisons par exemple les écrits toujours stimulants d'un philosophe et mathématicien, Cournot, dernier chapitre « considérations générales » de (pp. 363-365) <u>De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie</u> (1847) :
"*Nier la philosophie des mathématiques, c'est donc tout simplement nier l'une des conditions de la construction rationnelle et régulière des mathématiques ; et nier la philosophie en général, c'est nier l'une des conditions de la construction du système général des connaissances humaines. Mais, d'un autre côté, confondre l'élément philosophique avec l'élément scientifique de la connaissance ; prétendre, comme on le fait si souvent aujourd'hui, que la philosophie est la science ou une science , c'est tomber dans un abus de langage aussi préjudiciable à la vérité qu'aux intérêts de la cause qu'on veut servir : car il ne manquera pas de gens qui prouveront très-bien que la philosophie n'est ni la science, ni une science ; et qui, de ce que la philosophie n'est pas ce que ses adeptes voudraient qu'elle fut, seront portés à conclure que ce n'est rien ; et tenteront de mutiler l'esprit humain, en condamnant à l'inaction ou à l'impuissance l'une de ses plus nobles facultés.*
*Effectivement, conclure que toutes les théories philosophiques sont indifférentes et de nulle valeur au fond, parce qu'on ne peut pas en finir, par le calcul ou par l'*experimentum crucis *de Bacon, avec deux théories philosophiques contradictoires, ce serait comme si l'on niait le goût et le beau dans les arts, parce qu'on ne peut pas prouver, par syllogisme ou par expérience, la supériorité d'une toile de Rubens sur le méchant tableau qu'un homme, au goût bizarre, a la fantaisie de préférer. Le sentiment du vrai en philosophie appartient à cette faculté supérieure de l'esprit qui saisit l'ordre et la raison des choses ; qui procède par analogie et par induction plutôt que par jugement déductif, en sorte qu'elle ne peut être soumise au contrôle du calcul ou de la déduction syllogistique ; qui opère sur des idées et des rapports purement intelligibles, et qui dès lors ne peut pas davantage être soumise au contrôle de l'expérience sensible.*
Au premier rang des questions philosophiques, en mathématiques comme ailleurs, se placent celles qui portent sur la valeur représentative des idées. On en a vu de nombreux exemples dans tout ce qui précède. L'algèbre n'est-elle qu'une langue conventionnelle, ou bien est-ce une science ayant pour objet des rapports qui subsistent entre les choses, indépendamment de l'esprit qui les conçoit ?

Tout le calcul des valeurs négatives, imaginaires, infinitésimales n'est-il que le résultat de règles admises par conventions arbitraires ; ou toutes ces prétendues conventions ne sont-elles que l'expression nécessaire de rapports que l'esprit est obligé sans doute de représenter par des signes de forme arbitraire , mais qu'il ne crée point à sa guise, et qu'il saisit seulement, en vertu de la puissance qu'il a de généraliser et d'abstraire ? Voilà ce qui partage les géomètres en diverses écoles ; voilà le fond de la philosophie des mathématiques, et c'est aussi le fond de toute philosophie.
Comme toute connaissance, depuis la plus grossière jusqu'à la plus raffinée, implique un rapport entre un objet perçu et une intelligence qui le perçoit, la forme de la connaissance peut toujours de prime abord être attribuée indifféremment à la constitution de l'intelligence qui perçoit, ou à la constitution de l'objet perçu : de même que le déplacement relatif des diverses parties d'un système mobile peut de prime abord être indifféremment attribué au déplacement absolu de l'une ou de l'autre partie du système. Mais il y a des analogies, des inductions philosophiques qui mènent à préférer telle hypothèse à telle autre logiquement admissible, et qui même en certains cas sont de nature à exclure tout doute raisonnable, bien qu'il n'y ait pas de démonstration formelle ou d'expérience possible, pour réduire à l'absurde la contradiction sophistique.
Démontrer logiquement que certaines idées ne sont point de pures fictions de l'esprit , n'est pas plus possible qu'il ne l'est de démontrer logiquement l'existence des corps ; et cette double impossibilité n'arrête pas plus les progrès des mathématiques positives que ceux de la physique positive. Mais il y a cette différence, que la foi à l'existence extérieure des corps fait partie de notre constitution naturelle, est, comme on dit, une croyance du sens commun, bien qu'en ceci l'induction philosophique puisse tenir au besoin à l'appui du sens commun ; tandis qu'il faut se familiariser, par la culture des sciences, avec le sens et la valeur de ces idées spéculatives sur lesquelles on ne tomberait pas sans des études scientifiques. C'est ce qu'exprime ce mot fameux attribué à d'Alembert : Allez en avant, et la foi vous viendra ; non pas une foi aveugle, machinale, produit irréfléchi de l'habitude, mais un acquiescement de l'esprit, fondé sur la perception simultanée d'un ensemble de rapports qui ne peuvent que successivement frapper l'attention du disciple, et d'où résulte un faisceau d'inductions auxquelles la raison doit se rendre en l'absence d'une démonstration logique que la nature des choses rend impossible.
La philosophie des mathématiques consiste encore essentiellement à discerner l'ordre et la dépendance rationnelle de ces vérités abstraites dont l'esprit contemple le tableau ; à préférer tel enchaînement de propositions à tel autre aussi irréprochable logiquement, parce qu'il satisfait mieux à la condition de faire ressortir cet ordre et ces connexions, tels qu'ils résultent de la nature des choses, indépendamment des moyens que nous avons de transmettre et de démontrer la vérité. Il est évident que ce travail de l'esprit ne saurait se confondre avec celui qui a pour objet l'extension de la science positive ; et que les raisons de préférer un ordre à un autre, sont de la catégorie de celles qui ne s'imposent point par voie de démonstration logique.
https://archive.org/stream/delorigineetdes01courgoog/delorigineetdes01courgoog_djvu.txt

Annexes

Le nombre défini dans L'Encyclopédie

Un peu avant ce dictionnaire que nous venons de consulter, l'Encyclopédie tome treizième (1765) donnait à l'article « quantité » les précisions suivantes (p. 652) :
« *Quantité. Se dit de tout ce qui est susceptible de mesure, ou qui comparé à une chose de la même espèce peut être dit plus grand ou plus petit, ou égal ou inégal.*
Les mathématiques sont la science de la quantité.
La quantité est un attribut général qui s'applique à différentes choses, dans des sens tout à fait différents ; ce qui fait qu'il est très difficile d'en donner une définition exacte. ».

Puis (p. 653), après des précisions sur les différentes espèces de grandeur, propres ou impropres, continues ou discrètes, la position de Wolf était mis en avant :
« *M. Wolf nous donne une autre notion des quantités mathématiques, et de la division qu'on en fait entre discrète et continue. Tout ce qui se rapporte, dit-il à l'unité, comme une ligne droite ou une autre ligne, est ce que nous appelons quantité ou nombre en général.*
Ce qui se rapporte à une unité donnée, comme 2, 3 etc. s'appelle nombre déterminé ; ce qui se rapporte à l'unité en général s'appelle quantité, laquelle n'est en ce cas qu'un nombre. Ainsi, par exemple, la largueur d'une rivière est une quantité, mais veut-on savoir de combien elle est large pour se former une idée distincte de cette quantité, on prend quelque unité, telle qu'on le veut, avec laquelle on compare cette largeur, et selon qu'il a fallu que cette unité fût répétée plus ou moins de fois pour égaler cette largeur, ou à un nombre déterminé plus ou moins grand. »

http://books.google.fr/books?id=1XNEAAAAcAAJ&pg=PA653&lpg=PA653&dq=nombre+quantité&source=bl&ots=o0aIN-wX4e&sig=6ySEtCafY1DxynLvfhi60wSrin4&hl=fr&sa=X&ei=A2xeUqO1Co2Q4ASxkYCwBw&ved=0CDEQ6AEwATge#v=onepage&q=nombre%20quantité&f=false

L'idée de principe du nombre dans la scolastique

Considérant divers systèmes de mesures de grandeurs (longueurs, surfaces, durées, vitesses, poids) de son époque mais aussi la mesure en général ou la capacité à dénombrer de l'humanité, Aristote précise dans les livres de la Métaphysique que le nombre est un mais n'est pas une substance, qu'il n'a donc en quelque sorte d'existence que par l'effort de l'esprit humain de compter diverses choses. Il discute abondamment des thèses de Platon et des sophistes, de Pythagore aussi. Son enquête porte essentiellement sur la détermination du principe du nombre. Il identifie finalement ce principe au livre X, chapitre 1, §9. C'est l'unité !
« (...) *par-dessus tout, l'Unité est ce qui constitue la mesure première des choses en chaque genre, et éminemment, dans le genre de la quantité ; car c'est de là que la notion d'Unité s'est étendue à tout le reste, puisque c'est par la mesure que la quantité se révèle. La quantité, en tant que quantité, se fait connaître, soit par l'unité, soit par le nombre ; et c'est par l'unité qu'un nombre quelconque est connu. Par conséquent, toute quantité, en tant que quantité, est appréciée au moyen de l'unité ; et le primitif qui fait connaître la quantité est précisément l'unité même. Voilà pourquoi c'est l'unité qui est le principe du nombre, en tant que nombre.* »
http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/metaphyque10.htm
A quoi rime ce genre de réflexion qui, pour répondre à la question "qu'est-ce qu'un nombre ?" se croit tenue d'exhiber un principe ? Nous qui ne cherchons ordinairement pas de principe au nombre, comprenons-nous bien ce que fait Aristote dans la Métaphysique ou, plutôt, que faut-il connaître pour comprendre ce projet ?
Le texte canonique est celui des Seconds analytiques (I, 10, 76b) où Aristote affirme que le savoir est la maîtrise de trois choses, d'une part d'un objet précis d'investigation, d'autre part des propriétés de cet objet, enfin des principes grâce auxquels ces propriétés peuvent être démontrées.

Voici la lecture que propose Thomas d'Aquin des propos d'Aristote sur le nombre et son principe, l'unité :
"*La quantité discrète se divise en nombre et langage, or le nombre est la réunion de plusieurs unités. Le nombre se définit encore d'une autre manière : le nombre est une collection mesurée par l'unité. Pour comprendre ces définitions il faut savoir que l'unité se prend pour l'être, et l'unité est le principe du nombre. Or l'unité prise dans la première acception n'est autre chose que l'être indivis. L'unité ajoute à l'être la négation ou la privation de division, et comme tout être est une unité dans ce sens, l'unité en conséquence prise dans ce sens, est non seulement dans le genre de la quantité, mais aussi dans tous les genres comme l'être. C'est pourquoi l'unité se rapporte aux transcendants, comme la collection produite par l'unité dans ce sens n'est pas le nombre qui est*

une espèce de quantité, mais qui se rapporte aux transcendants. Nous disons, en effet, qu'il y a quatre anges ou trois personnes en Dieu, et cependant il n'y a de quantité ni dans les anges, ni en Dieu. L'unité, qui est le principe du nombre, ajoute à l'unité qui se prend pour l'être non par une chose quelconque, mais elle l'affecte en lui ajoutant deux rapports, parce qu'elle exprime non toute indivision, c'est-à-dire qu'elle n'exprime pas tout être en tant qu'indivis, mais bien l'être indivis de la quantité continue ; elle exprime aussi le rapport de la mesure discrète. Comme le nombre qui est une espèce de la quantité, est produit par la diction du continu, supposons une ligne divisée en plusieurs parties, chaque partie de la ligne ainsi divisée étant indivise, la ligne ainsi considérée est une unité ; c'est pourquoi la ligne n'est autre chose que le continu indivis. Donc l'unité qui est convertie avec l'être, signifie un être indivis quel qu'il soit. Or, l'unité qui est le principe du nombre, dit un être continu indivis, et le nombre se compose de semblables unités, lorsqu'il y a plusieurs continus séparés entre eux et indivis en eux-mêmes. Le second rapport qu'ajoute l'unité, principe du nombre, à l'unité qui admet la conversion avec l'être, est le rapport de mesure discrète, en quoi il faut remarquer que la mensuration discrète peut se prendre de deux manières. La première c'est la même chose que de s'assurer intellectuellement du nombre de certaines choses, connaissance qui s'acquiert en redoublant une unité un certain nombre de fois, et prise dans ce sens la mesure est une propriété accidentelle du nombre lui-même, et elle convient aussi à l'unité qui se convertit avec l'être. De la seconde manière mesurer se prend pour produire formellement tant de choses, comme la blancheur produit formellement le blanc, et cette mesure appartient au rapport de l'unité ou du nombre. Nous savons donc ce que c'est que l'unité dont l'assemblage forme le nombre, et ce qu'est la mesure essentiellement et accidentellement."
http://fr.wikisource.org/wiki/Commentaire_de_la_logique_d'Aristote/3

Sommes-nous plus avancés ? Thomas ne répond pas directement à la question de la nécessité de dégager un principe des nombres, mais développe à sa manière l'idée contenue dans le principe du nombre qu'est l'unité : tout être divisible peut être considéré comme indivis par sa participation à l'unité. L'unité, comme principe, maintient la cohésion d'un ensemble de parties compris comme collection. La mesure identifie ce nombre essentiellement, formellement, « géométriquement » en l'identifiant à la longueur d'une ligne donnée [un segment] ou bien à défaut obtient accidentellement, « arithmétiquement », un résultat assuré par un dénombrement, grâce au procédé de l'itération, « *redoublant une unité un certain nombre de fois* »

Une lecture de la critique russellienne de Bergson

Ana Dimiškovska, "Russell, Bergson, logique et mystique : schisme ou intégration ?"

« Dans l'article qui vient d'être évoqué, Russell fait tout d'abord un court exposé de la philosophie bergsonienne, fondé sur la lecture de l'Évolution créatrice, Matière et mémoire et de l'Essai sur les données immédiates de la conscience (dont le titre anglais, cité, par Russell, est Time and Free Will). La cible de son analyse sont les doctrines de Bergson de l'espace et du temps, considérées par Russell comme les véritables fondements de sa philosophie.
De la multitude des objections critiques élaborées dans cet article, les plus intéressantes pour le propos de cet exposé sont celles dans lesquelles Russell dénonce (avec un ton ironique, sinon sarcastique) ce qu'il appelle « *la condamnation de l'intellect* » de la part de Bergson : « *His* [Bergson's] *doctrine of space is required for his condemnation of the intellect, and if he fails in his condemnation of the intellect the intellect will succeed in its condemnation of him, for between the two it is war to the knife* »[2]. D'après Russell, la discussion sur la nature des nombres dans l'Essai sur les données immédiates de la conscience repose sur la présupposition générale de Bergson que toutes les idées abstraites et toute la logique sont dérivées de l'espace, parce que chaque pluralité d'unités séparées implique l'espace. La conclusion attribuée à Bergson, d'après laquelle « *the whole of the intellect depends upon a supposed habit of picturing things side by side in space* »[3], pour Russell n'est pas bien fondée ; cette conclusion est inspirée par une idiosyncrasie personnelle –

l'idiosyncrasie de la visualisation des successions comme étalées sur une ligne. Au contraire, d'après Russell, « *the instance of numbers shows that, if Bergson were in the right, we could never have attained to the abstract ideas which are supposed to be thus impregnated with space ; and conversely, the fact that we can understand abstract ideas (as opposed to particular things which exemplify them) seems sufficient to prove that he is wrong in regarding the intellect as impregnated with space*. »[4]
Le mécontentement vis-à-vis de l'aspect anti-intellectuel de la philosophie de Bergson vient aussi du fait que, d'après Russell, les allusions à certains phénomènes mathématiques et scientifiques utilisés comme exemples des erreurs et des confusions de l'intelligence sont dues à la préférence délibérée de Bergson pour des interprétations traditionnelles et erronées de ces quelques problèmes mathématiques, au lieu des opinions plus modernes, dominantes parmi les mathématiciens depuis une cinquantaine d'années. En réalité, Russell attribue la source de cette insuffisance à l'influence que Bergson avait subie de la part de Hegel. Russell trouve que l'attitude de Hegel est focalisée sur les erreurs et les confusions de théories mathématiques de son temps (par exemple les théories portant sur les fondements de calcul infinitésimal), qu'il utilise afin de montrer que toute mathématique est contradictoire en soi. D'après Russell, «[t]*hence the Hegelian account of these matters passed into the current thought of philosophers, where it has remained long after the mathematicians have removed all the difficulties upon which the philosophers rely* ». [5]

http://ebox.nbu.bg/berg2/sk7.html

Post-scriptum sur une difficulté du chapitre II de l'Essai sur les données immédiates de la conscience

L'explication bergsonienne du nombre n'est aucunement épuisée par les quelques remarques que nous avons fournies. Les deux passages soulignés en vert soulignent d'ailleurs une incertitude sur la signification du texte.
Lecteur attentif de Bergson, Vincent Reiffsteck, collègue du Lycée Roland Garros du Tampon a bien voulu livrer sa lecture du passage incriminé. Voici son analyse :

Une difficulté du texte, au § 6, la définition de l'objectif et du subjectif.

Explication conduite à partir du commentaire de Gilles Deleuze, dans Le Bergsonisme (éd. PUF).

La distinction entre subjectif et objectif prépare la distinction entre «*multiplicité numérique*» et «*multiplicité qualitative*».
Bergson emploie les mots de subjectif et objectif à propos de l'élaboration du nombre :

- nous étalons le nombre dans l'espace (c'est le côté objectif)
- l'attention de l'esprit fait appel à une expérience interne qui est subjective.

La subjectivité est ce qui renvoie à l'esprit qui est indivisible. Le côté subjectif d'un état affectif est tout entier dans le fait d'être éprouvé, de sorte que ce sentiment paraisse «*entièrement et adéquatement connu*». C'est pourquoi c'est ce qui est «*subjectif*» qui change de nature, lorsqu'il est divisé ou décomposé.
L'objectif est indépendant du sujet et peut donc toujours être mieux connue. Est «*objectif*» selon Bergson ce qui peut être décomposé en ses parties par la pensée sans changer de nature.
« *Nous appelons subjectif ce qui paraît entièrement et adéquatement connu, objectif ce qui est connu de telle manière qu'une multitude toujours croissante d'impressions nouvelles pourrait être substituée à l'idée que nous en avons actuellement.* » (§ 6, PUF, p. 62)

Objectif

Deleuze commente ainsi le texte ci-dessus :
«*Un objet peut être divisé d'une infinité de manières ; or, avant même que ces divisions soient effectuées, elles sont saisies par la pensée comme possibles sans que rien ne change dans l'aspect total de l'objet : même non idéalisées (simplement possibles), elles sont actuellement perçues, du*

moins perceptibles en droit.» (Gilles Deleuze, Le bergsonisme, éd. PUF, p. 33).
Bergson donne la définition de l'objectivité :
«*cette aperception actuelle, et non pas seulement virtuelle, de subdivisions dans l'indivisé est précisément ce que nous appelons objectivité.*» (§ 6, PUF, p. 63)

«*Bergson veut dire que l'objectif, c'est ce qui n'a pas de virtualité -- réalisé ou non, possible ou réel, tout est actuel dans l'objectif.* (...) *Bref, on appellera objet, objectif, non seulement ce qui se divise, mais ce qui ne change pas de nature en se divisant. C'est donc ce qui se divise par différences de degré. Ce qui caractérise l'objet, c'est l'adéquation réciproque du divisé et des divisions, du nombre et de l'unité. L'objet, en ce sens, sera dit une "multiplicité numérique". Car le nombre, et d'abord l'unité arithmétique elle-même, sont le modèle de ce qui se divise sans changer de nature. C'est la même chose de dire que le nombre n'a que des différences de degré, ou que ses différences, réalisées ou non, sont toujours actuelles en lui.* » (Deleuze, p. 34)

Deleuze relie ce commentaire au texte du § 5 :
«*les unités avec lesquelles l'arithmétique forme des nombres sont des unités provisoires, susceptibles de se morceler indéfiniment, et que chacune d'elles constitue une somme de quantités fractionnaires, aussi petites et aussi nombreuses qu'on voudra l'imaginer.* (...) *Si toute multiplication implique la possibilité de traiter un nombre quelconque comme une unité provisoire qui s'ajoutera à elle-même, inversement les unités à leur tour sont de véritables nombres, aussi grands qu'on voudra, mais que l'on considère comme provisoirement indécomposables pour les composer entre eux. Or, par cela même que l'on admet la possibilité de diviser l'unité en autant de parties que l'on voudra, on la tient pour étendue*.» (§ 6, PUF, p. 60-61)

Subjectif

Deleuze cite ce texte pour définir ce qui est subjectif :
«*un sentiment complexe contiendra un assez grand nombre d'éléments plus simples ; mais, tant que ces éléments ne se dégageront pas avec une netteté parfaite, on ne pourra pas dire qu'ils étaient entièrement réalisés, et, dès que la conscience en aura la perception distincte, l'état psychique qui résulte de leur synthèse aura par là même changé.*» (§ 6, PUF, p. 62)

Deleuze commente ce texte :
«*Un complexe d'amour et de haine s'actualise dans la conscience, mais la haine et l'amour deviennent conscients dans de telles conditions qu'ils diffèrent en nature entre eux, et diffèrent en nature du complexe inconscient.*» (Deleuze, p. 35)
Deleuze rappelle que la durée n'est pas simplement l'indivisible.
«*En vérité, la durée se divise, et ne cesse de se diviser : c'est pourquoi elle est une multiplicité. Mais elle ne se divise pas sans changer de nature, elle change de nature en se divisant : c'est pourquoi elle est une multiplicité non numérique, où l'on peut, à chaque étage de la division parler d'indivisibles. Il y a autre sans qu'il y ait plusieurs ; nombre seulement en puissance. En d'autres termes, le subjectif, ou la durée, c'est le virtuel. Plus précisément c'est le virtuel en tant qu'il s'actualise, en train de s'actualiser, inséparable du mouvement d'actualisation*.» (Deleuze, p. 36)
«*une multiplicité non numérique* (...) *va du virtuel à son actualisation.*» (Deleuze, p. 36)
En ce qui concerne la durée, ou la subjectivité, «*à chacun de ses niveaux, la division nous donne adéquatement la nature indivisible de la chose.*» (Deleuze, note 1, p. 37)

Bibliographie

Ayer Alfred J. Wittgenstein ou le génie face à la métaphysique. (Seghers, Paris, 1985)

Aristote. La Métaphysique.

Bergson Henri. Essai sur les données immédiates de la conscience. (Alcan, Paris, 1889)
http://fr.wikisource.org/wiki/Essai_sur_les_données_immédiates_de_la_conscience

Blay Michel. "Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et George Berkeley." *Revue d'histoire des sciences*. 1986, Tome 39 n°3. Étude sur l'histoire du calcul infinitésimal. pp. 223-253.
http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0151-4105_1986_num_39_3_4477

Bouveresse Jacques. « Philosophie des mathématiques et thérapeutique d'une maladie philosophique: Wittgenstein et la critique de l'apparence "ontologique" dans les mathématiques » (1967)
http://cahiers.kingston.ac.uk/vol10/cpa10.9.bouveresse.html

Brunschvicg Léon. Etapes de la philosophie mathématique, (Alcan, Paris, 1912)
https://archive.org/stream/lestapesdelaph00brun

Bruter Claude-Paul. La construction des nombres. (Ellipses, Paris, 2000)

Cantor Georg. "Fondements d'une théorie générale des ensembles". (*Concept and Form : The* Cahiers pour l'Analyse *and Contemporary French Thought*)
http://cahiers.kingston.ac.uk/vol10/cpa10.3.cantor.html

Cournot Antoine Augustin. De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie. (Hachette, Paris, 1847)
https://archive.org/details/delorigineetdes01courgoog

D'Alembert Jean le Rond. Encyclopédie méthodique, tome II Les mathématiques (1789)

Delahaye Jean-Paul. « La persistance des nombres » in *La Recherche*, N°août 2013

Deleuze Gilles. Le Bergsonisme (PUF, Paris,)

Desanti Jean-Toussaint. "Une crise de développement exemplaire : la « découverte » des nombres irrationnels", in Logique et connaissance scientifique, Encyclopédie de la Pléiade, (sous la dir. de J. Piaget), pp. 439-464

Dimiškovska Ana, « Russell, Bergson, logique et mystique: schisme ou intégration ? » *Nouvelle Université bulgare*, 2009

Durand Guillaume. « Whitehead et Russell : la discorde de 1917 », *Noesis*, n°13, 2008, pp. 237-250
http://noesis.revues.org/1633

Euclide. Éléments.

Fabre Frédéric. Émergence et représentation. 2005. Texte disponible sur le site de l'auteur dont

« Refaire le monde 3 »
http://www.dblogos.net/er/index.php?article=ok&titre=txt3.php

Galilée. Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles, trad. M. Clavelin (Armand Colin, Paris, 1970).

Godefroy Gilles. L'Aventure des nombres. (Odile Jacob, Paris, 1997)

Halimi Brice. LLPhi 632 « Qu'est-ce qu'un nombre ? » Paris 10, 2009
http://megotclips.free.fr/Philosophie%20Nanterre%20L1/L2-2008/QECQUN.pdf

Itard Jean. "Les livres arithmétiques d'Euclide" , *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 1964, vol. 17, n° 2, pp. 170-171.
http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1964_num_17_2_2333

Le Du Michel. Qu'est-ce qu'un nombre ? (Vrin, Paris, 2004, coll. Chemins Philosophiques).

Leibniz. Nouveaux essais sur l'entendement humain. (GF Flammarion, Paris, 1990)

Miravete Sébastien. La durée bergsoniennne comme nombre et comme morale. (Thèse de l'Université de Toulouse, 2011)

Piaget Jean. Sagesse et illusions de la philosophie. P.U.F., Paris, 1965

Poincaré Henri. La Science et l'hypothèse. (Flammarion, Paris, 1968)
http://www.univ-nancy2.fr/poincare/bhp/hp1914sh.xml

Rabachou Julien. "L'individualité de la substance chez Thomas d'Aquin. Deux explications concurrentes". *Trans-paraître*, n° La Substance, 2009
http://www.europhilosophie.eu/recherche/IMG/pdf/rabachou_tp2.pdf

Russell Bertrand. Introduction à la philosophie mathématique. Payot, Paris, 1991

Russell Bertrand. "*The Philosophy of Bergson*" (Macmillan and Co, Cambridge, 1914)
http://www.archive.org/stream/philosophyofberg00russ/philosophyofberg00russ_djvu.txt

Vernant Denis. La Philosophie mathématique de Bertrand Russell. (Vrin, Paris, 1993)

Vernant Denis. Bertrand Russell. (GF Flammarion, Paris, 2003)

Wittgenstein Ludwig. Tractatus logico-philosophicus. (Gallimard, Paris, 1961, coll. Tel)

Worms Frédéric. "Bergson entre Russell et Husserl : un troisième terme ? », *Rue Descartes* N° 29, *Sens et phénomène, philosophie analytique et phénoménologie* (Septembre 2000), pp. 79-96