MATH EN JEANS

THEOREME DE FERMAT-WILES

LYCEE JEAN HINGLO 2010

Réalisé par :

Naïmati – Soidanti- La ïqah- Ousrat- Julien- Ulrich- Gregory- Christophe- Audrey- Maya- Emmanuelle- Samuel- Laurence- Sébastien- Bruno et Remy

On se propose de résoudre l'équation:

$$x^n + y^n = z^n$$

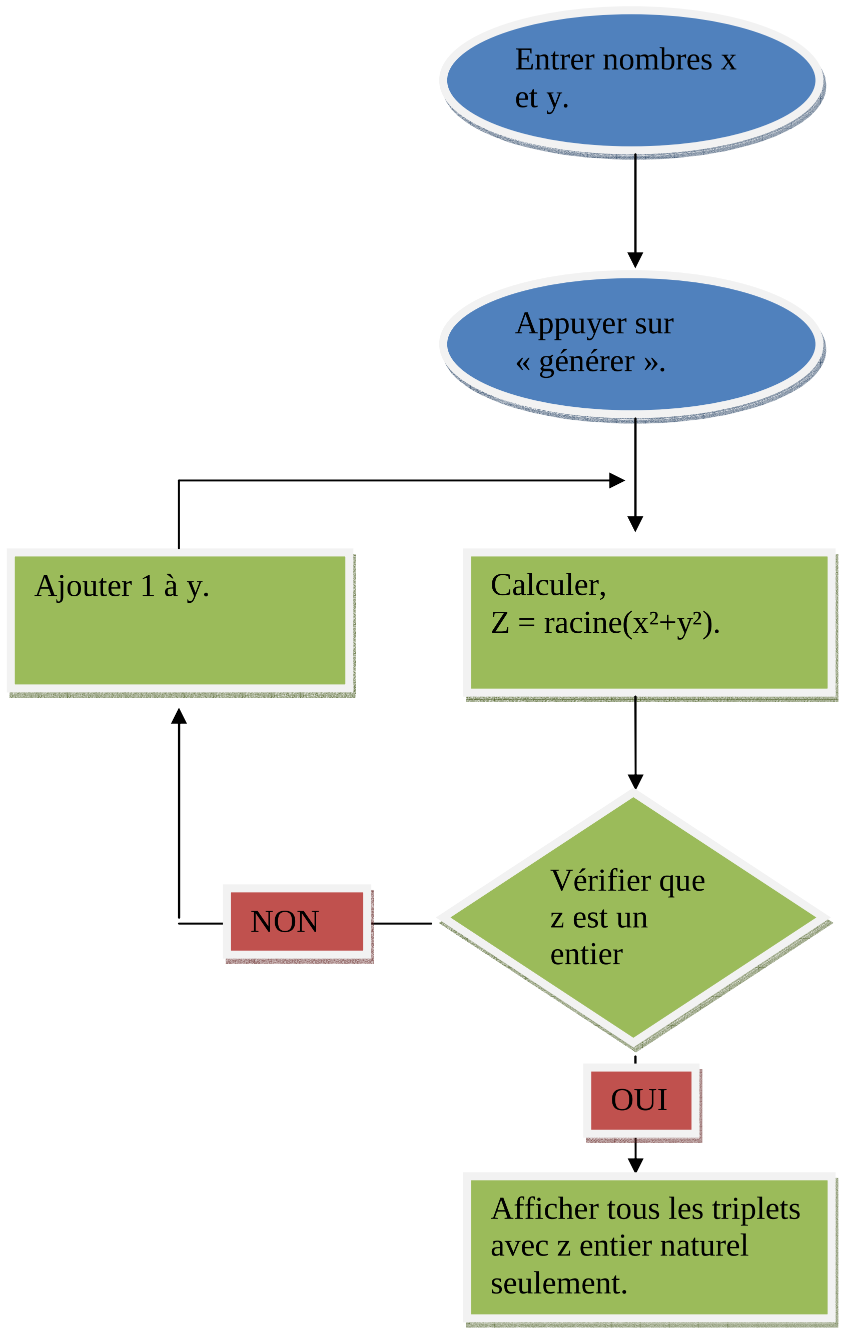
Avec x, y et z entiers naturels non nuls et $n = 2$.

Des exemples

$3^2+4^2=5^2$
$6^2+8^2=10^2$
$5^2+12^2=13^2$

Les triplets $(3;4;5)$; $(6;8;10)$ et $(5;12;13)$ sont solutions de cette équation.

Algorithmes pour trouver des triplets solutions



Réduction du problème : on prend x, y et z premiers entre eux.

Nous allons en premier lieu centrer notre recherche sur les valeurs de x, y, et z **premières** entre-elles.

En effet si x, y et z ne sont pas premiers entre eux alors on a:

$$x = k \times l \quad ; \quad y = k \times m \quad ; \quad z = k \times n$$

avec k , l , n et m entiers naturels non nuls.

Donc l'équation devient : $(kl)^2 + (km)^2 = (kn)^2 \Leftrightarrow k^2l^2 + k^2m^2 = k^2n^2$

On divise par k^2 (non nul) alors $l^2 + m^2 = n^2$. Donc $(l;m;n)$ est encore un triplet solution de l'équation.
Par conséquent on peut simplifier l'équation en divisant x, y et z par leur diviseur commun k.
On peut donc restreindre notre recherche aux triplets $(x;y;z)$ premiers entre eux.

Plan

Tout d'abord nous allons montrer que x est différent de y.
Puis que x et y ne peuvent pas être de même parité.
Enfin nous trouverons toutes les solutions en utilisant la décomposition en facteurs premiers.

1) Montrons que $x \neq y$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $x = y$ alors $z^2 = x^2 + y^2 = 2x^2$ (*)
Donc z est pair ainsi $z = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$.
Alors (*) devient $(2k)^2 = 2x^2 \Leftrightarrow 2k^2 = x^2$. Donc x est pair.
Ainsi x, y et z ne sont pas premiers entre-eux, ce qui est une contradiction avec nos hypothèses.

Donc $x \neq y$.

2) Montrons que x, y sont de parités différentes.

Raisonnons par l'absurde et supposons que x et y sont de même parité.

Premier cas : x est pair et y pair. Montrons que z est pair.
x est pair donc $x = 2n$ et y pair donc $y = 2m$ avec m et n entiers naturels non nuls.
Alors

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$\Leftrightarrow (2n)^2 + (2m)^2 = z^2$$
$$\Leftrightarrow 4n^2 + 4m^2 = z^2$$
$$\Leftrightarrow z^2 = 4\left(n^2 + m^2\right)$$

$n^2 + m^2 \in \mathbb{N}$, ainsi z^2 est divisible par 4 donc z est divisible par 2.
Nous constatons que x ; y et z ont un facteur commun 2 or x, y et z sont premiers entre eux. Ce qui est une contradiction.

Deuxième cas : x est impair ; y impair. Montrons que z est impair.
x est impair donc $x = 2n+1$, y est impair donc $y = 2m+1$ avec m et n entiers naturels non nuls.
Donc l'équation est de la forme :

$$(2n+1)^2 + (2m+1)^2 = (2p+1)^2$$
$$\Leftrightarrow (4n^2 + 4n + 1) + (4m^2 + 4m + 1) = (4p^2 + 4p + 1)$$
$$\Leftrightarrow 4(n^2 + n + m^2 + m) + 2 = z^2$$

On pose $N = n^2 + 2nm + m^2$
Alors $4N + 2 = z^2$
Cette équation nous fait penser à une division euclidienne de z^2 par 4 avec N le quotient et 2 le reste.

- Si z est pair

Alors $z = 2q$ avec $q \in \mathbb{N}$.

Donc $z^2 = 4q^2 = 4\left(q^2\right) + 0$ et ainsi le reste de la division euclidienne de z par 4 est 0 et non 2. Ce qui est une contradiction.

- Si z est impair

Alors $z = 2q + 1$ avec $q \in \mathbb{N}$. Donc $z^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4\left(q^2 + q\right) + 1$ et ainsi le reste de la division euclidienne de z par 4 est 1 et non 2. Ce qui est une contradiction.

Donc z^2 ne peut être sous la forme $4N + 2$ et ainsi x et y ne peuvent être pairs simultanément.

Quitte à échanger le rôle de x et de y, on se place dans le cas où x est pair et y impair. Alors z est impair.

3) Résolution

REFORMULATION DE L'EQUATION

$$x^2 + y^2 = z^2$$

L'équation peut donc s'écrire:

$$x^2 = (z - y)(z + y)$$

TROUVONS TOUTES LES SOLUTIONS!!

Caractérisation des nombres carrés

Propriété :

Un nombre est un carré si et seulement si les exposants des nombres premiers intervenant dans sa décomposition sont tous pairs.

Exemples :

$2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67$

L'exposant de 2 dans la décomposition est 1. Donc 2010 n'est pas un carré.

$3600 = 24 \times 3^2 \times 5^2 = (2^2 \times 3 \times 5)^2$.

Les exposants sont 4, 2 et 2. Donc 3600 est un carré.

Caractérisation des nombres dont le produit est un carré :

Propriété :

a et b sont des entiers pairs tels que le produit de a par b soit un carré si et seulement si il existe m, n, et p tels que:

$$a = 2m^2 p$$
$$b = 2n^2 p$$

Tous les diviseurs premiers de p sont d'exposant 1.

Exemple : $60^2 = 3600 = \left(2^2 \times 3 \times 5\right)^2$.

FORME DES SOLUTIONS

z et y impairs donc $z-y$ et $z+y$ sont pairs. De plus $x^2 = (z-y)(z+y)$ donc d'après la caractérisation précédente, il existe m, n et p tels que $z + y = 2n^2 p$ et $z-y=2m^2 p$

On a donc

$$(S) : \begin{cases} z+y=2n^2 p & (L_1) \\ z-y=2m^2 p & (L_2) \end{cases}$$

On résout ce système pour déterminer z et y.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=2n^2 p+2m^2 p & (L_1-L_2) \\ z+y=2n^2 p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=p\left(m^2+n^2\right) \\ y=p\left(n^2-m^2\right) \end{cases}$$

De plus $x^2 = (z-y)(z+y)$ donc $x^2=4m^2n^2p^2$ et $x>0$ alors $x=2nmp$.

Donc $x = 2nmp$; $y = p\left(n^2 - m^2\right)$; $z = p\left(n^2 + m^2\right)$

Mais x, y et z sont premiers entre – eux donc

$p = 1$.

4) Synthèse

Si m et n sont des entiers naturels et si

$x = 2mn \quad y = n^2 - m^2 \quad z = n^2 + m^2$

Donc $x^2 + y^2 = n^4 + m^4 + 2\,(mn)^2 = z^2$

Le problème est donc résolu.

Grâce à A. Wiles on sait depuis 2001 que pour $k>2$. L'équation $x^k + y^k = z^k$ n'admet aucune solution non triviale.