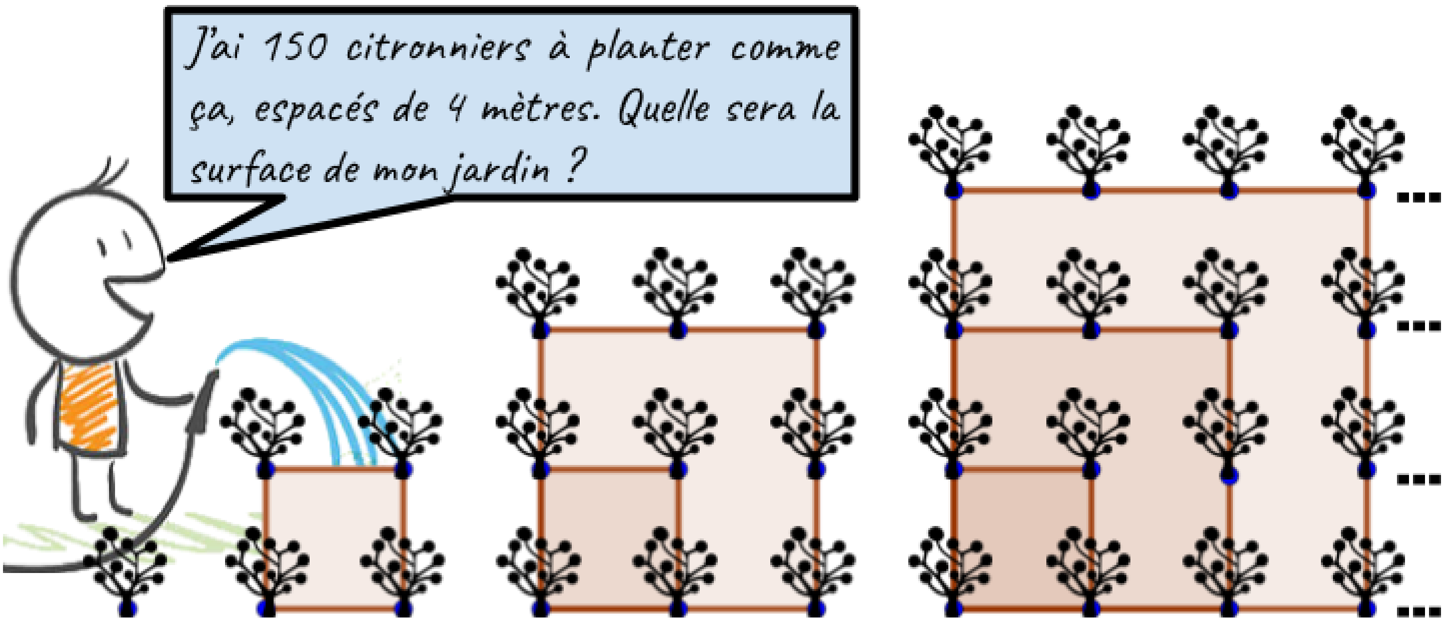
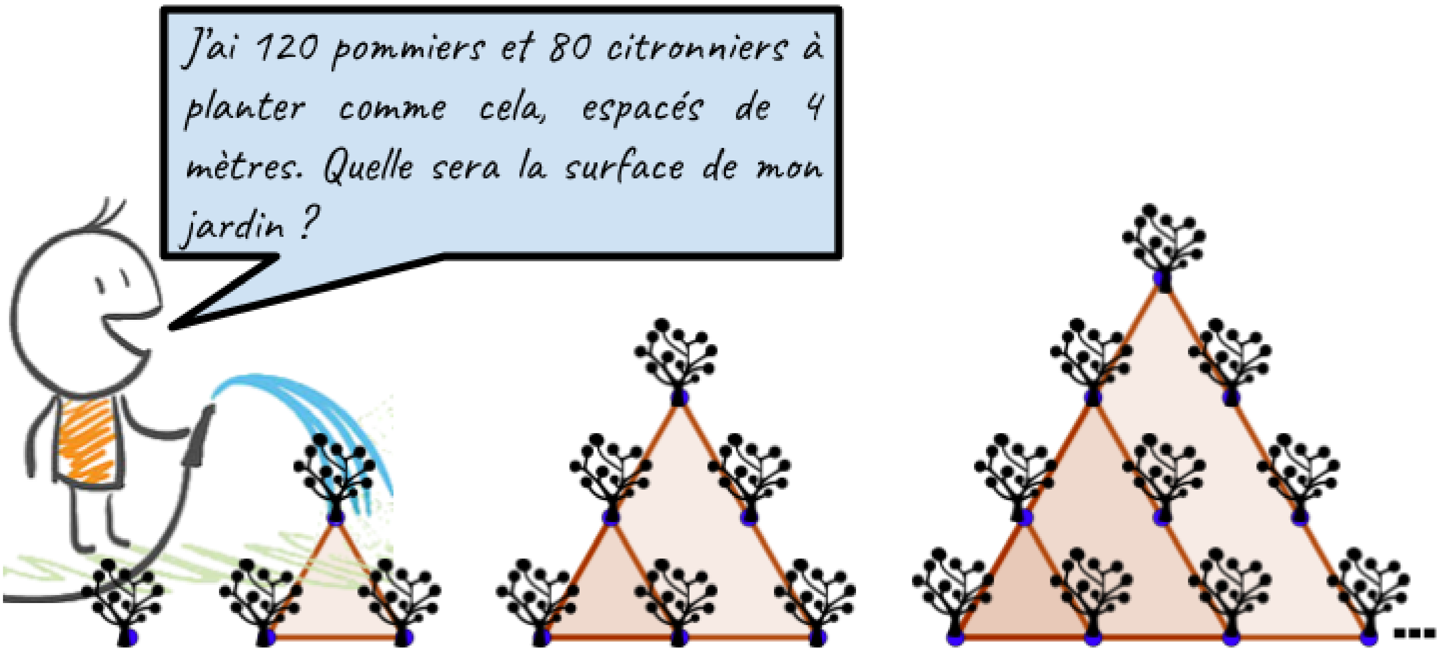
Stage MathC2+ - Jeudi 25 octobre 2018





Fiches prof

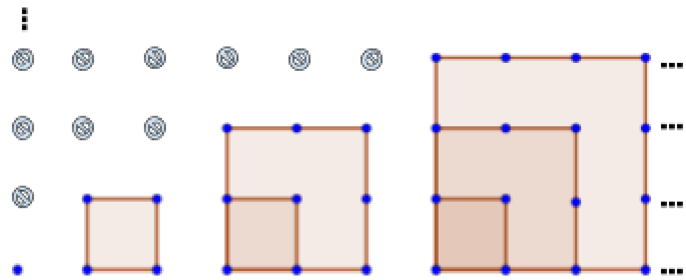
La somme des n premiers carrés

Des exercices sur les séries

Le mathématicien Fermat énonça le résultat suivant : « Tout nombre entier naturel non nul est la somme d'au plus n nombres polygonaux formés sur la base d'un polygone régulier à n côtés ». A l'époque, Fermat n'a pas démontré cette conjecture. On en doit la preuve à trois grands mathématiciens : Lagrange (vers 1770) pour les nombres triangulaires, Gauss (vers 1796) pour les nombres carrés. Enfin, le théorème fut intégralement prouvé par Cauchy en 1813.

Correction du premier exercice

Dans un premier temps, je considère l'espace carré (de côté u) occupé par chaque arbre comme une unité d'aire que je nomme u² (u² = u×u). Le nombre d'arbre dans le jardin est donc égale à : 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 140. Il est possible de planter 140 arbres en conservant le même motif.
Il y aura 10 arbres en trop.



Essayons de généraliser…

Rang	Nombres d'arbustes	Aire Rectangle	Nombres de places vides	Aire finale
1	1	1	0	1
2	5	6	1	5
3	14	18	4	14
4	30	40	10	30
…	…	…	…	…
n	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	n²(n+1)/2	(n³-n)/6	$\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$

D'une manière générale, pour compter les arbres, nous avons une somme de carrés de rang n>0 : n(n+1)(2n+1)/6[1].
Pour n=7 on a 343/3 + 49/2 + 7/6 = 140.

La longueur du rectangle englobant sera égale à 1+2+3+... + n = n(n+1)/2[2], sa largeur est n et donc sa surface :

n×n(n+1)/2 = n²(n+1)/2

Le nombre de carré vide peut se décompter de la manière suivante : 0 + 1 + 3 + 6 + 10 +…
Soit la suite 1, 4, 10, 20, … qui correspond à la somme des n premiers termes de la suite des sommes des n premiers entiers pour n>0 :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Mais il faut adapter l'indice de cette suite pour que la formule soit vraie au rang 1 dans notre tableau. Utilisons plutôt :

(n-1)(n)(n+1)/6 = n(n²-1)/6 = (n³-n)/6

Au final on remarque que pour n >0 :
n²(n+1)/2 - (n³-n)/6 = n(n+1)(2n+1)/6
= n³/3 + n²/2 + n/

[1] La somme des n premiers carrés
[2] La somme des n premiers entiers