Équations différentielles

Une ***équation différentielle*** est une équation (c'est-à-dire un problème portant sur une égalité) dont l'inconnue est une fonction et où figure la dérivée de cette fonction.

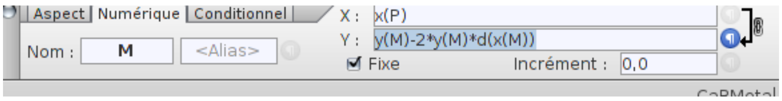
I/ Équations différentielles homogènes

L'équation différentielle 5y'+10y=0 est dite ***homogène*** (ou ***sans second membre***) parce que son second membre est égal à 0. On peut la simplifier en divisant les deux membres par 5, ce qui donne y'+2y=0 ou dy/dx+2×y=0 ou dy+2×y×dx=0. La lettre y désigne une fonction inconnue de la variable x.

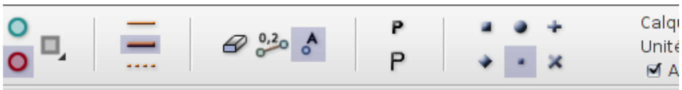
1) Avec CaRMetal

On peut réécrire l'équation différentielle sous la forme dy/dx=-2×y (en soustrayant 2×y aux deux membres), ou comme le faisait Leibniz, dy=-2×y×dx (en multipliant les deux membres par dx).

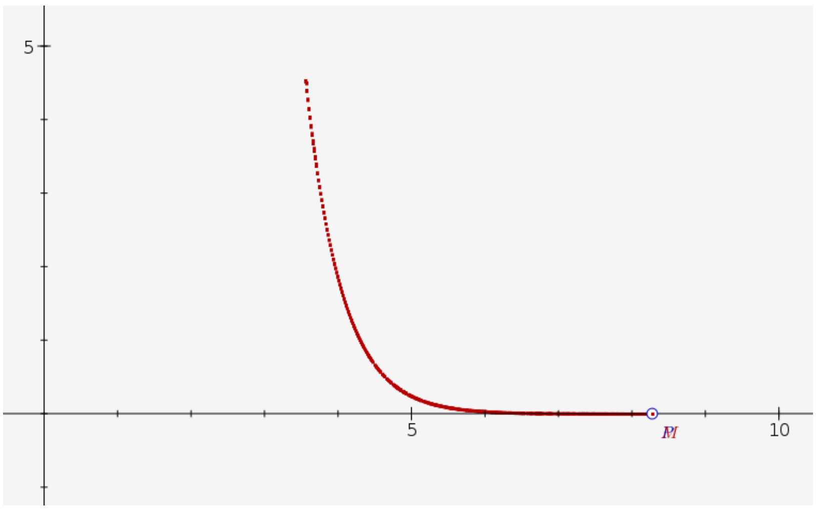
Dans CaRMetal, on crée un point P attaché à l'axe des abscisses, puis un point M de coordonnées `x(P)` et `y(M)-2*y(M)*d(x(M))` :



Ce point va donc parcourir la représentation graphique d'une solution de l'équation différentielle. On le met en rouge, en mode point, en gras et on active sa trace (case cochée en bas à droite) :



Ensuite il suffit de bouger lentement P pour voir apparaître une courbe qui représente graphiquement une solution de l'équation différentielle :



À droite on a du mal à distinguer les deux points M et P : la courbe semble asymptote à l'axe des abscisses.

2) Résolution de l'équation différentielle

Comme dy=-2×y×dx, on peut isoler dx dans l'équation en divisant ses deux membres par y : on obtient alors dy/y=-2×dx. Mais

- dy/y=d(ln(y))
- -2×dx=d(-2×x)

Si deux fonctions ont la même différentielle, elles sont égales à une constante additive près. Donc ln(y)=-2×x+c où c est une constante (c'est-à-dire ne dépendant pas de x). Si ln(y) et -2×x+c sont égaux, ils ont la même exponentielle : $e^{\ln(y)}=e^{-2\times x+c}$ soit $y=e^{-2x}\times e^{c}$. En posant $k=e^{c}$ on a la forme d'une solution générale de l'équation différentielle : $y=k\times e^{-2\times x}$.

3) Formule

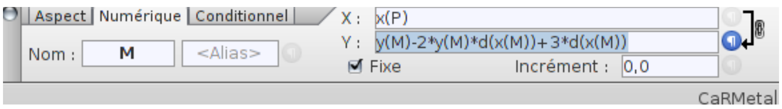
La solution générale de l'équation différentielle homogène ay'+by=0 est $k\times e^{-b\times x/a}$

II/ Équations différentielles à coefficients constants

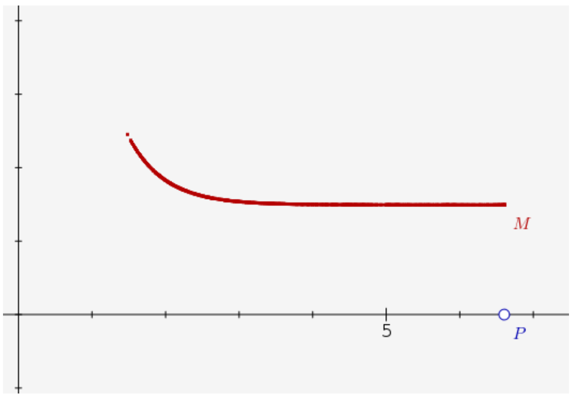
Par exemple on souhaite résoudre l'équation différentielle 5y'+10y=15. En divisant ses deux membres par 5 on la simplifie en y'+2y=3 ce qui peut se réécrire en dy/dx+2×y=3 ou dy/dx=-2×y+3 ou dy=-2×y×dx+3×dx.

1) Avec CaRMetal

On donne au point M les coordonnées `x(P)` et `y(M)-2*y(M)*d(x(M))+3*d(x(M))` :



Si la trace de M est activée, en bougeant P sur l'axe des abscisses, M dessine une courbe, qui représente graphiquement une solution de l'équation différentielle :



La courbe semble avoir une asymptote mais ce n'est plus l'axe des abscisses. En fait il s'agit d'une droite horizontale représentant la solution constante de l'équation différentielle.

2) Solution constante

Si $y(x)=C$ est une solution constante de l'équation différentielle, alors $dy=0$ et l'équation différentielle s'écrit $0+2\times C\times dx=3\times dx$ soit $2\times C=3$. On résout cette équation (qui n'est plus différentielle) pour connaître la constante C. On trouve C=1,5. Donc

- La fonction $y(x)=1{,}5$ est solution de l'équation différentielle.
- La droite d'équation $y=1{,}5$ est asymptote à toutes les autres solutions de l'équation différentielle.

3) Solution générale

La solution générale de l'équation différentielle $5y'+10y=15$ s'obtient en additionnant la solution constante $y=1{,}5$ et la solution générale de l'équation différentielle homogène $5y'+10y=0$:

$1{,}5+k\times e^{-2\times x}$. On peut le vérifier : on pose $f(x)=1{,}5+k\times e^{-2\times x}$. Alors $df=d(1{,}5)+d(k\times e^{-2\times x})=0+k\times d(e^{-2\times x}) = k\times(-2)\times e^{-2\times x}\times dx$. Donc $y'=-2\times k\times e^{-2\times x}$ et $5y'=5\times(-2\times k\times e^{-2\times x})=-10\times k\times e^{-2\times x}$.

Mais $10y=10\times(1{,}5+k\times e^{-2\times x})=15+10\times k\times e^{-2\times x}$. Donc le premier membre est

$-10\times k\times e^{-2\times x}+15+10\times k\times e^{-2\times x}=\cancel{-10\times k\times e^{-2\times x}}+15+\cancel{10\times k\times e^{-2\times x}}=15$ *cqfd*

4) Formule

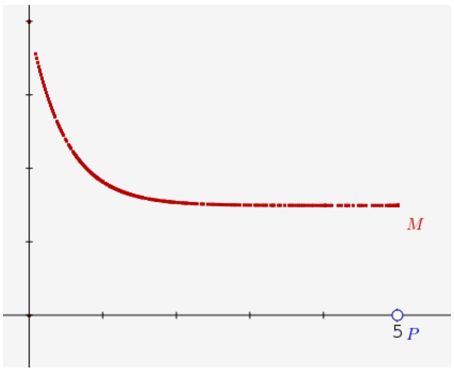
La solution générale de $ay'+by=c$ est $k\times e^{-b\times x/a}+c/b$.

III/ Condition initiale

Une équation différentielle a une infinité de solutions. Mais parmi toutes ces solutions, une seule vérifie la condition $y(0)=4$, appelée ***condition initiale***.

1) Avec CaRMetal

Il suffit qu'avant de bouger P, M soit en (0,4) pour que la courbe passe par la position initiale[1] de M :



1 Pour bouger M, remplacer `y(M)-2*y(M)*d(x(M))+3*d(x(M))` par `(y(M)-2*y(M)*d(x(M))+3*d(x(M)))*1` que l'on modifie en `(y(M)-2*y(M)*d(x(M))+3*d(x(M)))*0+4`. Ensuite il suffit de sélectionner la fin `0+4` et la remplacer à nouveau par 1.

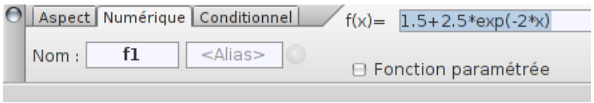
2) Solution vérifiant la condition initiale

On sait que la solution est forcément de la forme $1{,}5+k\times e^{-2\times x}$. Pour qu'elle vérifie la condition initiale il faut que lorsque x=0, l'expression ci-dessus soit égale à 4. Ce qui donne cette équation :

- $1{,}5+k\times e^{-2\times 0}=4$
- $1{,}5+k\times e^{-0}=4$
- $1{,}5+k\times 1=4$
- $1{,}5+k=4$
- $k=4-1{,}5$
- $k=2{,}5$

La solution cherchée est donc la fonction $1{,}5+2{,}5\times e^{-2\times x}$.

Si on représente graphiquement cette fonction



on voit que la courbe (en vert) passe très près de la trace de M :