

La loi Normale Asymétrique

Définition, premières propriétés, estimation des paramètres

Pour que l'asymétrie ne soit plus considérée comme anormale...

Olivier SICARD

Mars 2013

SOMMAIRE

1. Préambule.....	page 3
2. Rappels sur la loi normale.....	page 5
3. Définition d'une normale asymétrique.....	page 5
4. Intervalle de confiance asymétrique.....	page 8
5. Opérations et normale asymétrique.....	page 8
6. Espérance.....	page 9
7. Variance.....	page 10
8. Estimation des paramètres.....	page 11
9. Simulation d'un échantillon.....	page 12

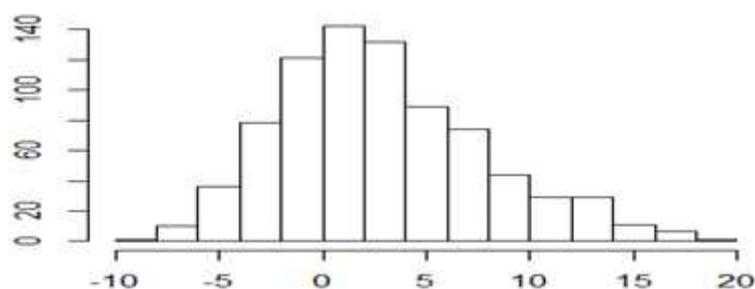
I. Préambule

La loi Normale est partout autour de nous. Les variables de taille, poids, QI, (pour ne citer que ces exemples) ... sont souvent modélisés par une loi normale.

Il faut bien avouer que, le théorème central limite, qui nous enseigne que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire gaussienne, nous incite fortement à nous en servir.

Cependant, la loi normale comme nous la connaissons, a une propriété importante et incontournable : elle est symétrique.

Alors que faire si lors de l'étude d'une série statistique, nous obtenons un histogramme de ce genre ?

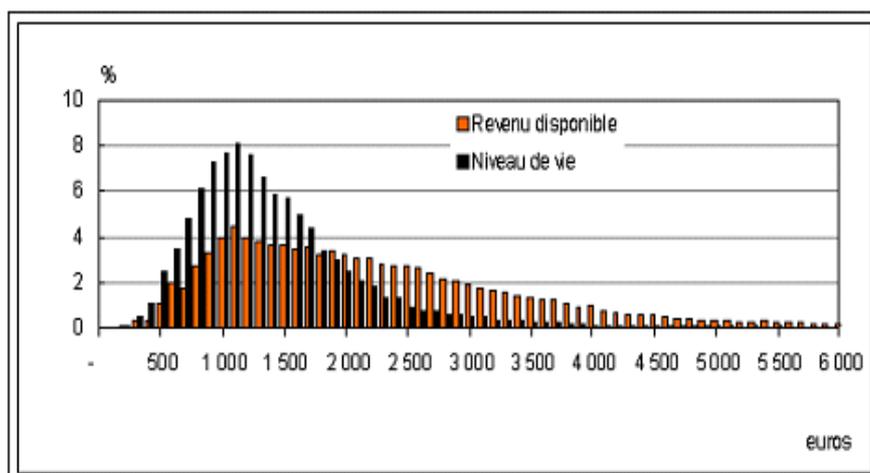


Peut-on considérer que la variable sous-jacente suit une loi normale ?

Elle semble un peu tordue : étirée vers la droite et compressée du côté gauche. Nous pourrions faire un test de normalité (test du χ^2 d'adéquation par exemple), mais que faire si le test rejette l'hypothèse de normalité ?

Ou encore

Dans un article, l'INSEE compare le niveau de vie au revenu disponible des familles.



Source INSEE (http://www.insee.fr/fr/themes/document.asp?ref_id=erf2004)

Sans même faire de test de normalité, il semble évident, que les variables étudiées dans cet article de ne suivent pas de lois normales.

Aujourd'hui l'asymétrie dans les distributions peut se gérer de plusieurs façons :

1. D'abord par le calcul du coefficient d'asymétrie *skewness* qui donne justement une mesure du degré d'asymétrie de la distribution. Il est défini par $S = \frac{E(X-\bar{X})^3}{\sigma^3}$ où \bar{X} est l'espérance de X et σ son écart-type.
Lorsque $S = 0$ la distribution est symétrique, sinon l'asymétrie penchera vers la gauche ou vers la droite suivant que S soit négatif ou positif.
2. On peut tenter d'estomper l'asymétrie d'une distribution par des transformations de type \sqrt{X} ou $\log(1 + X)$
3. Si la variable X étudiée est à valeur dans \mathbb{R}^+ , on peut utiliser des lois déjà asymétriques comme la loi log-normale ou la loi gamma.
4. Une loi normale asymétrique (skew-normal distribution) existe déjà, (http://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_normale_asymétrique). Sa densité se définit à partir de la densité et de la fonction de répartition de la loi normale, cependant l'estimation des paramètres de cette loi semble être délicate.

Cet article propose une nouvelle définition de la loi normale asymétrique fondée sur l'utilisation de deux lois normales « classiques » tronquées et recollées.

Dans un premier temps, les propriétés de base ainsi que le calcul de l'espérance et de la variance y sont présentés, puis l'avant dernier chapitre de l'article est consacré à l'estimation des paramètres de la loi normale asymétrique.

Le dernier chapitre s'intéresse à la simulation d'échantillons suivant une loi normale asymétrique, et à l'application des estimateurs sur quelques échantillons de tailles diverses.

Dans l'espoir que cet article puisse servir aux éventuels lecteurs détenteurs d'échantillons à distribution asymétrique.

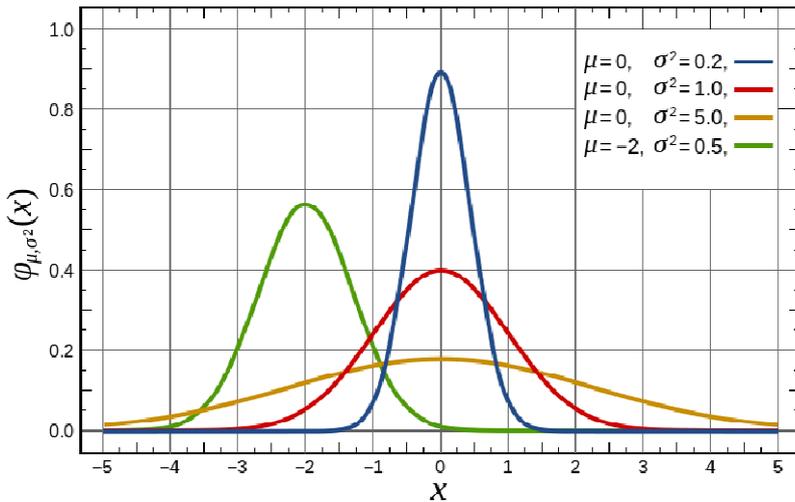
II. Rappels sur la loi normale

Avant tout autre développement, remémorons-nous certaines propriétés de la loi normale. Nous tenterons par la suite de les étendre à la loi normale asymétrique.

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$

Une loi normale $N(m, \sigma)$ est une loi à densité.

La densité est définie par la fonction suivante : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$



Les résultats suivants sont classiques :

Lorsque $X \sim N(m, \sigma)$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$
- $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$
- Si de plus on considère $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $Y \sim N(m', \sigma')$, alors la variable $aX + bY \sim N(am + bm', \sqrt{a^2\sigma^2 + b^2\sigma'^2})$
- $P(X \in [m - 2\sigma, m + 2\sigma]) \approx 0,95$

III. Définition d'une normale asymétrique

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma, \tau \in \mathbb{R}_+^*$, considérons la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\sigma + \tau)} \times \left[e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \times \mathbf{1}_{]-\infty; m]}(x) + e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau^2}} \times \mathbf{1}_{]m; +\infty[}(x) \right]$$

Théorème 1 : f est une densité.

Preuve :

La fonction f étant positive et intégrable sur \mathbb{R} , il suffit de vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(\sigma+\tau)}} \times \left[\int_{-\infty}^m e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_m^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau^2}} dx \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(\sigma+\tau)}} \times \frac{1}{2} \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau^2}} dx \right] \quad (\text{par symétrie axiale d'axe } x = m) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(\sigma+\tau)}} \times \frac{1}{2} \times [\sigma\sqrt{2\pi} + \tau\sqrt{2\pi}] \\ &= 1\end{aligned}$$

Définition :

Considérons X une variable aléatoire réelle,

X suit une loi normale asymétrique de paramètres m, σ, τ (s'écrit $X \sim N(m, \sigma, \tau)$) si et seulement si X admet pour densité

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(\sigma+\tau)}} \times \left[e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \times \mathbf{1}_{]-\infty; m]}(x) + e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau^2}} \times \mathbf{1}_{]m; +\infty[}(x) \right]$$

Sa fonction de répartition sera définie par $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

En conclusion X suit une loi normale asymétrique si X s'éloigne normalement de la valeur m mais de façon différente selon que l'on s'éloigne par valeur inférieure ou par valeur supérieure.

Remarque : Si $\sigma = \tau$, X suit une loi normale classique !

Exemples :

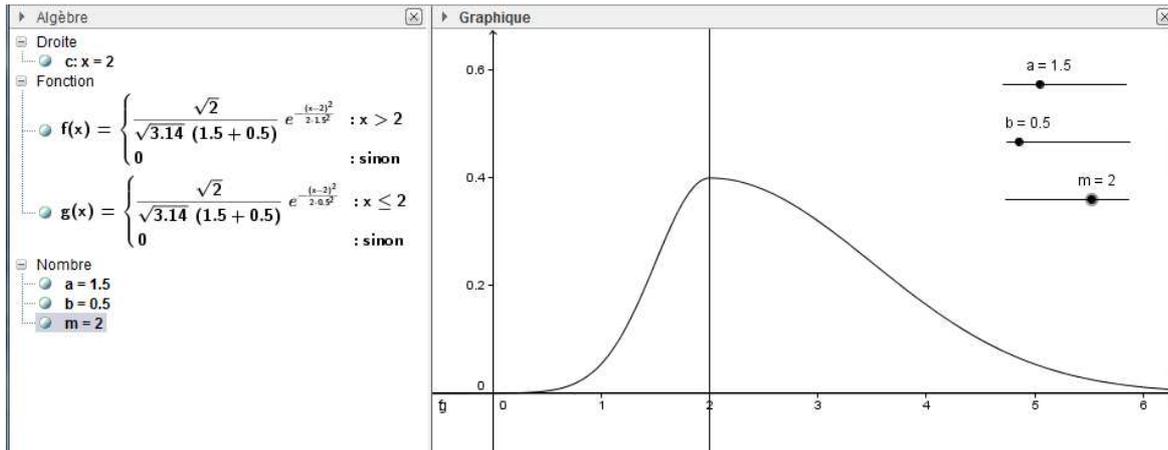
Il est assez simple de créer ce type de fonction de densité sous GeoGebra.

Ici

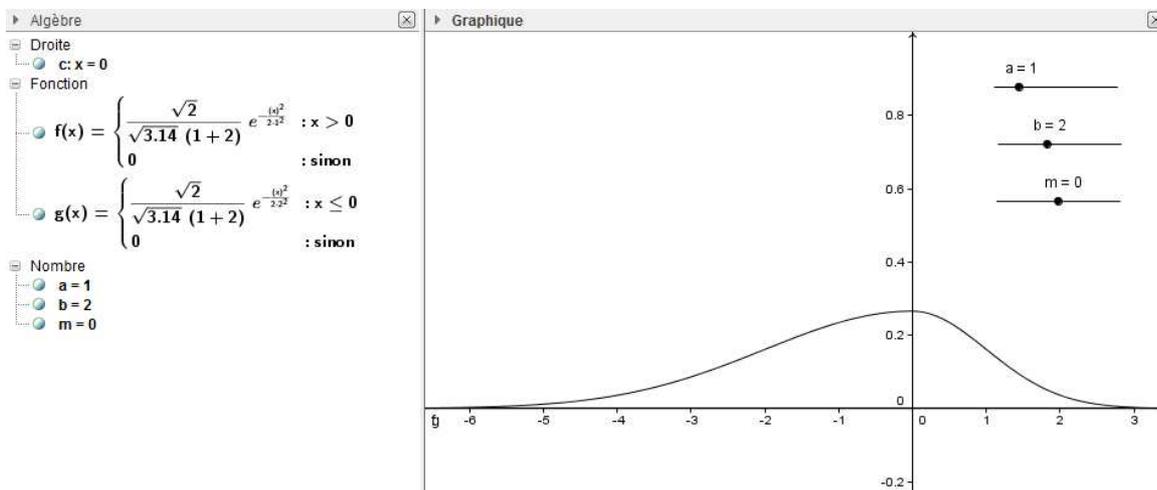
- La variable b joue le rôle de σ (l'écart type des valeurs inférieures à m)
- La variable a joue le rôle de τ (l'écart type des valeurs supérieures à m)

L'asymétrie apparaît nettement autour de l'axe d'équation $x = m$

Voici la fonction de densité d'une $N(2 ; 0,5 ; 1,5)$



Voici la fonction de densité d'une $N(0 ; 2 ; 1)$



Théorème 2 :

Soit $X \sim N(m, \sigma, \tau)$ alors $p(X > m) = \frac{\tau}{\sigma + \tau}$ et $p(X < m) = \frac{\sigma}{\sigma + \tau}$

Preuve :

$$p(X > m) = \int_m^{+\infty} f(t) dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\sigma + \tau)} \int_m^{+\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\tau^2}} dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\sigma + \tau)} \frac{\tau\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{\tau}{\sigma + \tau}$$

Par un raisonnement analogue on obtient $p(X < m) = \frac{\sigma}{\sigma + \tau}$

IV. Intervalle de confiance asymétrique

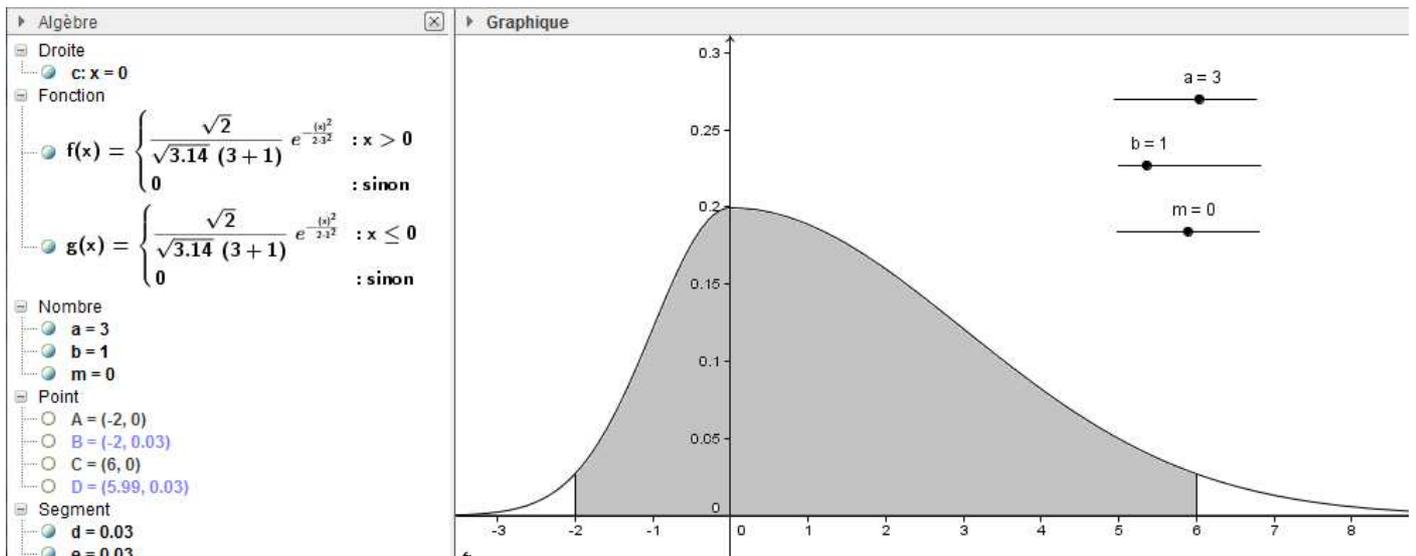
Théorème 3 :

Soit $X \sim N(m, \sigma, \tau)$ Alors $P(X \in [m - 2\sigma, m + 2\tau]) \approx 0,95$

Preuve :

$$\begin{aligned}
 p &= P(X \in [m - 2\sigma, m + 2\tau]) \\
 &= \int_{m-2\sigma}^{m+2\tau} f(x) dx \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\sigma+\tau)} \left[\int_{m-2\sigma}^m e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_m^{m+2\tau} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau^2}} dx \right] \\
 &\approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\sigma+\tau)} \left[\sigma\sqrt{2\pi} \cdot \frac{0,95}{2} + \tau\sqrt{2\pi} \cdot \frac{0,95}{2} \right] \\
 &\approx 0,95
 \end{aligned}$$

Sur l'exemple ci-dessous, $X \sim N(0,1,3)$ il y a donc 95% de chances qu'une réalisation de X soit comprise entre -2 et 6.



V. Opérations et loi normale asymétrique

Théorème 4 :

Soit $X \sim N(m, \sigma, \tau)$ alors

Pour tout $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $aX + b \sim N(am + b, a\sigma, a\tau)$

Pour tout $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $aX + b \sim N(am + b, -a\tau, -a\sigma)$

rem : quand a est négatif il inverse les rôles des écarts types σ et τ .

Corollaire :

Soit $X \sim N(m, \sigma, \tau)$ alors
 $Y = X - m \sim N(0, \sigma, \tau)$
 $-X \sim N(-m, \tau, \sigma)$

VI. Espérance

Théorème 5 :

Soit $X \sim N(m, \sigma, \tau)$ Alors $E(X) = m + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}(\tau - \sigma)$

Preuve :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx \\ &= \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{(\sigma+\tau)\sqrt{\pi}} \times \int_{-\infty}^m x.e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx}_A + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{(\sigma+\tau)\sqrt{\pi}} \times \int_m^{+\infty} x.e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau^2}} dx}_B \end{aligned}$$

Calcul de A :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{2}}{(\sigma+\tau)\sqrt{\pi}} \times \int_{-\infty}^0 (\sigma u + m).e^{-\frac{u^2}{2}} .\sigma .du \quad \left(\text{changement de variable } u = \frac{x-m}{\sigma} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}.\sigma}{(\sigma+\tau)\sqrt{\pi}} \times \left(\sigma \int_{-\infty}^0 u.e^{-\frac{u^2}{2}} .du + m \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{u^2}{2}} .du \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}.\sigma}{(\sigma+\tau)\sqrt{\pi}} \times \left(\underbrace{\sigma \left[-e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_{-\infty}^0}_{-\sigma} + m. \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{-\sqrt{2}.\sigma^2}{(\sigma+\tau)\sqrt{\pi}} + \frac{m\sigma}{\sigma+\tau} \end{aligned}$$

Calcul de B :

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\sqrt{2}}{(\sigma + \tau)\sqrt{\pi}} \times \int_0^{+\infty} (\tau u + m) \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \tau \cdot du \quad \left(\text{changement de variable } u = \frac{x-m}{\tau} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2} \cdot \tau}{(\sigma + \tau)\sqrt{\pi}} \times \left(\tau \int_0^{+\infty} u \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du + m \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2} \cdot \tau}{(\sigma + \tau)\sqrt{\pi}} \times \left(\underbrace{\tau \left[-e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_0^{+\infty}}_{\tau} + m \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2} \cdot \tau^2}{(\sigma + \tau)\sqrt{\pi}} + \frac{m\tau}{\sigma + \tau}
 \end{aligned}$$

D'où $E(X) = A + B = m + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}(\tau - \sigma)$. CQFD

VII. Variance

Théorème 6 :

Soit $X \sim N(m, \sigma, \tau)$ Alors $V(X) = \sigma\tau + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)(\tau - \sigma)^2$

Preuve :

$$\begin{aligned}
 V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}(\tau - \sigma) \right)^2 f(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx - 2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}(\tau - \sigma) \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m) f(x) dx + \frac{2}{\pi}(\tau - \sigma)^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx}_{=1} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\sigma + \tau)} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^m (x - m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx}_{=\frac{\sigma^2}{2}\sigma\sqrt{2\pi}} + \underbrace{\int_m^{+\infty} (x - m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau^2}} dx}_{=\frac{\tau^2}{2}\tau\sqrt{2\pi}} \right] \\
 &\quad - 2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}(\tau - \sigma) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\sigma + \tau)} \left[\int_{-\infty}^m (x - m) e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_m^{+\infty} (x - m) e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau^2}} dx \right] + \frac{2}{\pi}(\tau - \sigma)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\sigma + \tau)} \left[\frac{\sigma^2}{2} \sigma \sqrt{2\pi} + \frac{\tau^2}{2} \tau \sqrt{2\pi} \right] - \frac{4(\tau - \sigma)}{\pi(\sigma + \tau)} \left(\int_{-\infty}^0 X e^{\frac{-X^2}{2\sigma^2}} dX + \int_0^{+\infty} X e^{\frac{-X^2}{2\tau^2}} dX \right) + \frac{2}{\pi} (\tau - \sigma)^2 \\
&= \frac{\sigma^3 + \tau^3}{\sigma + \tau} - \frac{4(\tau - \sigma)}{\pi(\sigma + \tau)} \underbrace{\left(\left[-\sigma^2 e^{\frac{-X^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^0 + \left[-\tau^2 e^{\frac{-X^2}{2\tau^2}} \right]_0^{+\infty} \right)}_{\tau^2 - \sigma^2} + \frac{2}{\pi} (\tau - \sigma)^2 \\
&= \sigma^2 - \sigma\tau + \tau^2 - \frac{4}{\pi} (\tau - \sigma)^2 + \frac{2}{\pi} (\tau - \sigma)^2 \\
&= (\tau - \sigma)^2 + \sigma\tau - \frac{2}{\pi} (\tau - \sigma)^2 \\
&= \sigma\tau + \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) (\tau - \sigma)^2
\end{aligned}$$

CQFD

VIII. Estimation des paramètres

Soit (x_1, \dots, x_n) , une série de n observations correspondant à des réalisations de n variables aléatoires $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ indépendantes et suivant toutes une loi $N(m, \sigma, \tau)$.

Il semble assez difficile de trouver des estimateurs sans biais et convergents des trois paramètres m, σ, τ .

Nous allons nous contenter de donner des estimateurs conditionnels de σ et de τ sachant m .

Le paramètre m sera donc connu dès le départ.

On peut imaginer que sa valeur sera déterminée et justifiée par des arguments mathématiques-physiques-chimiques-biologiques-économiques selon le type de phénomène étudié à travers la série d'observations.

On peut aussi tenter d'estimer m par le centre de la classe modale de la série.

Calcul des estimateurs de σ et τ connaissant m :

- Etape 1 :

$\bar{X} = \sum_{i=1}^n x_i$ est un estimateur sans biais et convergent de $E(X) = m + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} (\tau - \sigma)$

m étant connu, $\widehat{\tau - \sigma} = (\bar{X} - m) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$ est un estimateur de $\tau - \sigma$

- Etape 2

$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$ est un estimateur sans biais convergent de $V(X) = \sigma\tau + \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) (\tau - \sigma)^2$

Dans ce cas $\widehat{\sigma\tau} = s^2 - \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) (\widehat{\tau - \sigma})^2$ est un estimateur de $\sigma\tau$.

- Etape 3

Le polynôme du second degré $X^2 + (\tau - \sigma)X - \sigma\tau$

- A pour discriminant $\Delta = (\tau - \sigma)^2 + 4\sigma\tau = (\tau + \sigma)^2$
- Pour première racine : $\frac{-(\tau - \sigma) - \sqrt{\Delta}}{2} = -\tau$
- Pour deuxième racine : $\frac{-(\tau - \sigma) + \sqrt{\Delta}}{2} = \sigma$

• Etape 4

$\widehat{\Delta} = \widehat{\tau - \sigma}^2 + 4\widehat{\sigma\tau}$ est un estimateur du discriminant Δ .

$\widehat{\tau} = \frac{(\widehat{\tau - \sigma}) + \sqrt{\widehat{\Delta}}}{2}$ est un estimateur de τ .

$\widehat{\sigma} = \frac{-(\widehat{\tau - \sigma}) + \sqrt{\widehat{\Delta}}}{2}$ est un estimateur de σ .

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 7 :

Soit (x_1, \dots, x_n) , une série de n observations correspondant à des réalisations de n variables aléatoires $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ indépendantes et suivant toutes une loi $N(m, \sigma, \tau)$.

$\widehat{\tau - \sigma} = (\bar{X} - m) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$ est un estimateur sans biais de $\tau - \sigma$

$\widehat{\sigma\tau} = s^2 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) (\widehat{\tau - \sigma})^2$ est un estimateur de $\sigma\tau$

$\widehat{\sigma} = \frac{-(\widehat{\tau - \sigma}) + \sqrt{\widehat{\tau - \sigma}^2 + 4\widehat{\sigma\tau}}}{2}$ est un estimateur de σ

$\widehat{\tau} = \frac{(\widehat{\tau - \sigma}) + \sqrt{\widehat{\tau - \sigma}^2 + 4\widehat{\sigma\tau}}}{2}$ est un estimateur de τ

IX. Simulation d'un échantillon

1. Comment simuler une loi normale asymétrique

Théorème 8 :

Soient σ et τ deux réels strictement positifs, et m un réel

Notons :

$U \sim B\left(\frac{\sigma}{\sigma + \tau}\right)$ une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{\sigma}{\sigma + \tau}$, $X_\sigma \sim N(0, \sigma)$ et $X_\tau \sim N(0, \tau)$ trois variables indépendantes les unes des autres,

Alors $X = -U|X_\sigma| + (1 - U)|X_\tau| \sim N(0, \sigma, \tau)$

Preuve :

Soit k un réel

Cas n°1 : Considérons que $k \leq 0$, et montrons que $p(X \leq k) = \frac{\sqrt{2}}{(\sigma+\tau)\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^k e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$

$$\begin{aligned}
p(X \leq k) &= p(-U|X_\sigma| + (1 - U)|X_\tau| \leq k) \\
&= p((U = 1) \cap (-|X_\sigma| \leq k)) + p((U = 0) \cap (|X_\tau| \leq k)) \\
&= \frac{\sigma}{\sigma+\tau} p(-|X_\sigma| \leq k) + \frac{\tau}{\sigma+\tau} p(|X_\tau| \leq k) \\
&= \frac{\sigma}{\sigma+\tau} p(|X_\sigma| \geq -k) + 0 \quad (\text{car } k \leq 0) \\
&= 2 \frac{\sigma}{\sigma+\tau} p(X_\sigma \leq k) \quad (\text{par symétrie de la densité de la loi normale}) \\
&= 2 \frac{\sigma}{\sigma+\tau} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^k e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{(\sigma+\tau)\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^k e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \quad \text{cqfd.}
\end{aligned}$$

Cas n°2 : Considérons que $k \geq 0$, et montrons que $p(X \geq k) = \frac{\sigma}{\sigma+\tau} + \frac{\sqrt{2}}{(\sigma+\tau)\sqrt{\pi}} \int_0^k e^{-\frac{x^2}{2\tau^2}} dx$

$$\begin{aligned}
p(X \leq k) &= p(-U|X_\sigma| + (1 - U)|X_\tau| \leq k) \\
&= p((U = 1) \cap (-|X_\sigma| \leq k)) + p((U = 0) \cap (|X_\tau| \leq k)) \\
&= \frac{\sigma}{\sigma+\tau} p(-|X_\sigma| \leq k) + \frac{\tau}{\sigma+\tau} p(|X_\tau| \leq k) \\
&= \frac{\sigma}{\sigma+\tau} + \frac{\tau}{\sigma+\tau} p(|X_\tau| \leq k) \quad (\text{car } p(-|X_\sigma| \leq k) = 1 \text{ puisque } k \geq 0) \\
&= \frac{\sigma}{\sigma+\tau} + 2 \frac{\tau}{\sigma+\tau} p(0 \leq X_\sigma \leq k) \quad (\text{par symétrie de la densité de la loi normale}) \\
&= \frac{\sigma}{\sigma+\tau} + 2 \frac{\tau}{\sigma+\tau} \int_0^k e^{-\frac{x^2}{2\tau^2}} dx = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma}{\sigma+\tau} + \frac{\sqrt{2}}{(\sigma+\tau)\sqrt{\pi}} \int_0^k e^{-\frac{x^2}{2\tau^2}} dx \quad \text{cqfd.}
\end{aligned}$$

2. Simulation d'un échantillon et estimation des paramètres

Ce théorème va nous permettre de créer aisément des normales asymétriques centrées $N(0, \sigma, \tau)$ à l'aide d'une bernoulli et de deux normales centrées.

Pour simuler des normales asymétriques $N(m, \sigma, \tau)$ il suffira d'ajouter m à toutes nos valeurs simulées puisque lorsque $X \sim N(0, \sigma, \tau)$, $X + m \sim N(m, \sigma, \tau)$

Le choix s'est porté sur la simulation d'une $N(17,3,7)$

Voici les résultats obtenus :

PARAMETRES REELS	
m	17
sigma	3
tau	7

PARAMETRES

ESTIMES	
$\hat{t-s}$	3,95709366
\hat{st}	21,4928656
\hat{s}	2,86229346
\hat{t}	6,7734036

Echantillon de taille 500

PARAMETRES ESTIMES	
$\hat{t-s}$	3,95709366
\hat{st}	21,4928656
\hat{s}	3,06203976
\hat{t}	7,01913342

Echantillon de taille 1000

PARAMETRES ESTIMES	
$\hat{t-s}$	3,95709366
\hat{st}	21,4928656
\hat{s}	3,06700259
\hat{t}	6,82071959

Echantillon de taille 1500

PARAMETRES ESTIMES	
$\hat{t-s}$	4,08582234
\hat{st}	21,0114596
\hat{s}	2,97554932
\hat{t}	7,06137166

Echantillon de taille 10000