Chapitre VI

Nombres Complexes et Géométrie

1. Interpréter arguments et modules

Propriété 1 ► Rapport de nombres complexes à partir de l'affixe de 4 points du plan

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan complexe alors le rapport $Z = \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un nombre complexe qui peut s'écrire sous la forme exponentielle $Z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Interprétation du module de Z :

$$|Z| = \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = \frac{CD}{AB} = \rho.$$

Interprétation de l'argument de Z :

$$\begin{aligned} arg(Z) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) &= arg\,(z_D - z_C) - arg\,(z_B - z_A) \\ &= \left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{CD}\right) - \left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{u}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right) = \theta \quad (2\pi). \end{aligned}$$

Conséquence immédiate :

- Si $\theta = 0 \quad (\pi)$, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- Si $\theta = \dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$, alors les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Propriété 2 ► Rapport de nombres complexes à partir de l'affixe de 3 points du plan

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points du plan complexe ; alors le rapport $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un nombre complexe qui peut s'écrire sous la forme exponentielle $Z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Interprétation du module de Z :

$$|Z| = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \frac{AC}{AB} = \rho.$$

Interprétation de l'argument de Z :

$$\begin{aligned} arg(Z) = arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) &= arg\left(z_C - z_A\right) - arg\left(z_B - z_A\right) \\ &= \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AC}\right) - \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right) = \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AB}\,;\vec{u}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \theta \quad (2\pi). \end{aligned}$$

Conséquence immédiate :

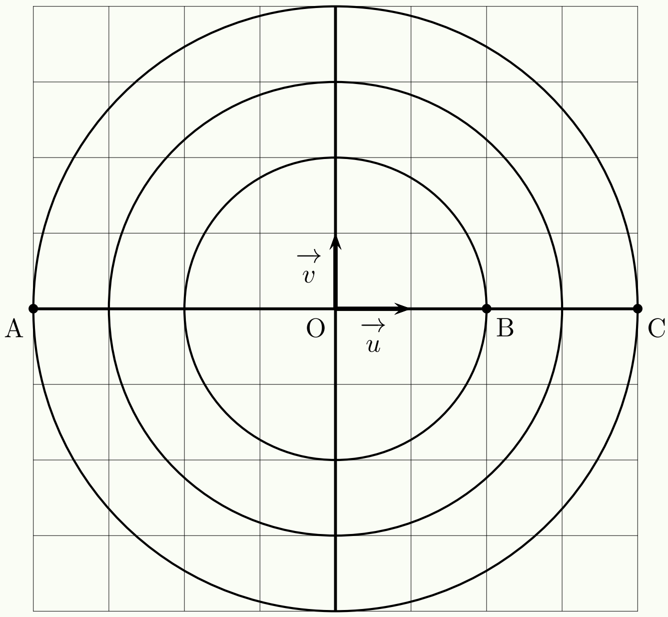
- Si $\theta = 0 \quad (\pi)$, alors les points A, B et C sont alignés.
- Si $\theta = \dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$, alors le triangle ABC est rectangle en A.
- Si $\rho = 1$, alors le triangle ABC est isocèle en A.
- Si $\theta = \dfrac{\pi}{3} \quad (2\pi)$ et si $\rho = 1$, alors le triangle ABC est équilatéral.

Recherche

Exercice 1 : Soient D, E et F trois points du plan complexe d'affixes respectives : $z_D = -2i$, $z_E = -\sqrt{3} + i$ et $z_F = \sqrt{3} + i$. Calculer $\dfrac{z_E - z_D}{z_F - z_D}$; en déduire la nature de DEF.

Exercice 2 :
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = -4$, $b = 2$ et $c = 4$.

1. On considère les trois points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = \text{j}a$, $b' = \text{j}b$ et $c' = \text{j}c$ où j est le nombre complexe $-\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   a) Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle de j.
   En déduire les formes algébriques et exponentielles de a', b' et c'.
   b) Les points A, B et C ainsi que les cercles de centre O et de rayon 2, 3 et 4 sont représentés sur le graphique ci-dessous.
   Placer les points A′, B′ et C′ sur ce graphique.
2. Montrer que les points A′, B′ et C′ sont alignés.
3. On note M le milieu du segment [A′C], N le milieu du segment [C′C] et P le milieu du segment [C′A].
   Démontrer que le triangle MNP est isocèle.



Exercice 3 :

1. Donner les formes exponentielle et trigonométrique des nombres complexes $1 + \mathrm{i}$ et $1 - \mathrm{i}$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose
$$S_n = (1 + \mathrm{i})^n + (1 - \mathrm{i})^n.$$

   a) Déterminer la forme trigonométrique de S_n.

   b) *Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.*

   Affirmation A : Pour tout entier naturel n, le nombre complexe S_n est un nombre réel.

   Affirmation B : Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$.

Exercice 4 :
On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère l'équation
$$(E) : \qquad z^2 - 6z + c = 0$$
où c est un réel strictement supérieur à 9.

   a) Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

   b) Justifier que les solutions de (E) sont $z_{\mathrm{A}} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{c-9}$ et $z_{\mathrm{B}} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{c-9}$.

2. On note A et B les points d'affixes respectives z_{A} et z_{B}.
   Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.

3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

Exercice 5 :
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z.$$

Le point M' est appelé image du point M.

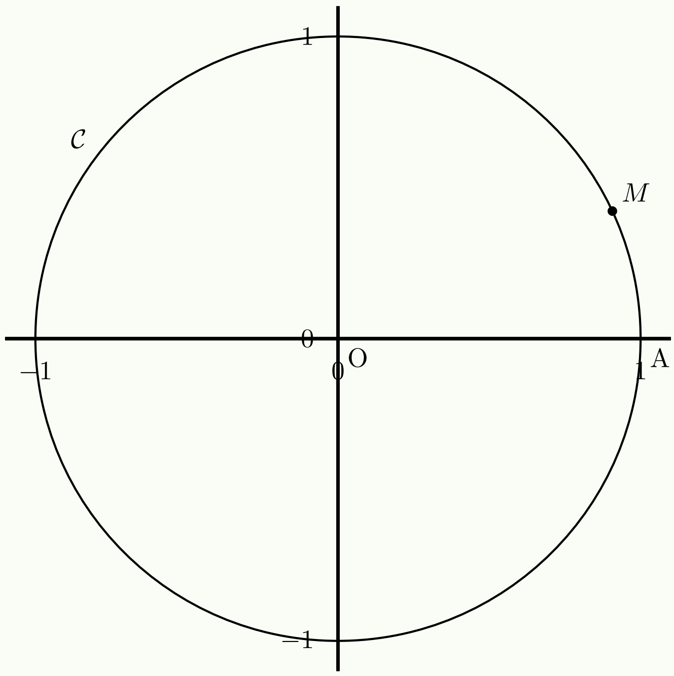
1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$-z^2 + 2z - 2 = 0.$$

   En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

2. Soit M un point d'affixe z et M' son image d'affixe z'.
   On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.
   Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.

3. Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. On note θ un argument de z.
   a) Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_N, ainsi qu'un argument de z_N en fonction de θ.
   b) Sur la figure ci-dessous, on a représenté un point M sur le cercle $\mathcal{C}$.
   Construire sur cette figure les points N et M' en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).
   c) Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM' ?



Exercice 6 : Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

a) $|2z - \text{i}| = 1$ **b)** $|\text{i} - 2z| = -1$

c) $\dfrac{|z+1|}{|z+2|} = 1$ **d)** $\arg\left(\dfrac{z - 2\text{i}}{z - 1 + 2\text{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

2. Nombres complexes de module 1

a) Ensemble $\mathbb{U}$

Définition 1

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Propriété 3

Dans le plan complexe, l'ensemble des points images des éléments de $\mathbb{U}$ est le cercle de centre l'origine du repère et de rayon 1.

Propriété 4 ▶ Stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et passage à l'inverse

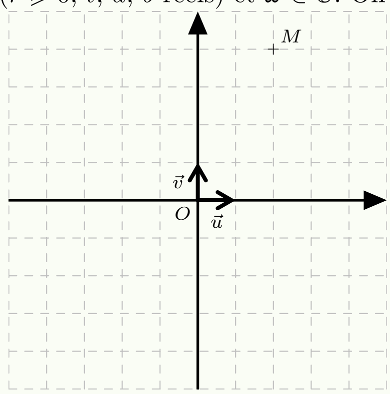
- Si z_1 et z_2 sont deux éléments de $\mathbb{U}$, alors leur produit $Z = z_1 z_2$ est un élément de $\mathbb{U}$.
- Si z est un élément de $\mathbb{U}$, alors l'inverse $Z' = \frac{1}{z}$ est un élément de $\mathbb{U}$.

Démonstration :
Interprétation géométrique :

1. Construire dans un plan complexe un point image d'un élément z de $\mathbb{U}$. Expliquer comment construire le point image de $Z' = \frac{1}{z}$.

Recherche ▶ Matrice et transformation du plan

Exercice 7 : On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit $M(z)$ un point du plan, avec $z = re^{it} = a + ib$ ($r \geqslant 0$, t, a, b réels) et $\omega \in \mathbb{U}$. On note $\theta = \arg \omega$.



1. Ici, on prendra $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.
   a) Donner la forme exponentielle de ω.
   b) Donner la forme exponentielle de $z \times \omega$.
   c) Placer le point M' d'affixe $z \times \omega$.
   d) Quelle est la transformation du plan qui envoie M en M' ?
2. Ici, θ est un réel quelconque.
   a) Donner la forme trigonométrique de ω.
   b) Donner la forme algébrique de $z \times \omega$.
   c) On note les coordonnées du point M avec la matrice colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, et les coordonnées du point M' d'affixe $z \times \omega$ avec la matrice colonne $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$.

      Déterminer la matrice $R(\theta)$ telle que $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = R(\theta) \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

      Cette matrice est appelée ....
   d) Déterminer les matrices $R\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $R\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right)$.

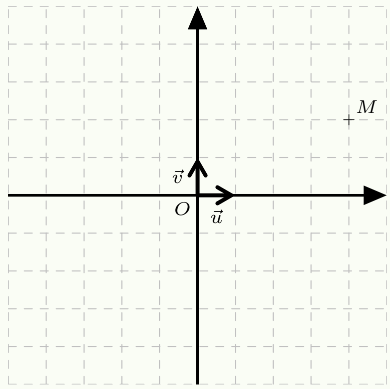
3. On note $\overline{z}$ le conjugué de z.

   a) Placer le point M' d'affixe $\overline{z}$; donner ses coordonnées en fonction de a et b.

   b) Quelle est la transformation du plan qui envoie M en M' ?

   c) On note les coordonnées du point M avec la matrice colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, et les coordonnées du point M' d'affixe $z \times \omega$ avec la matrice colonne $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$.

   Déterminer la matrice s telle que $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = s \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.



4. Soit A un point tel que l'argument de z_A, noté θ, soit compris entre 0 et π.

   On note θ' l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}\right)$, et M'' le symétrique du point M par rapport à la droite (OA).

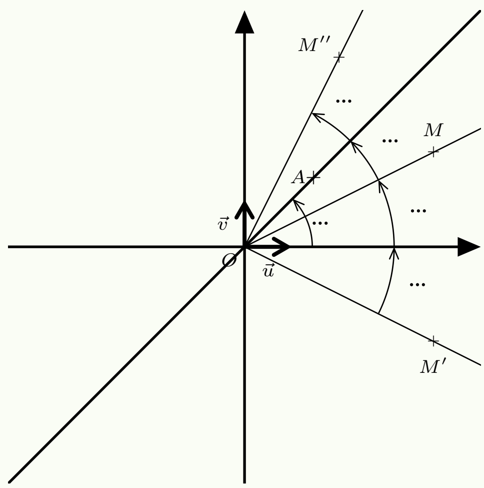
   M' est le point défini ci-dessus.

   a) Compléter les pointillés avec les mesures des angles orientés, exprimés en fonction de θ et θ'.

   b) En déduire la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}\right)$

   c) Quelle est la transformation du plan qui envoie M' en M'' ?

   d) Donner deux transformations du plan dont la composition donne la symétrie par rapport à la droite (OA).



   e) On note les coordonnées du point M avec la matrice colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, et les coordonnées du point M'' d'affixe $z \times \omega$ avec la matrice colonne $\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix}$.

   On note S la matrice telle que $\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix} = S \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

   Ecrire la matrice S en fonction de $R(\theta)$ et de la matrice s, puis déterminer les coefficients de S.

b) Ensembles $\mathbb{U}_n$

Définition 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On appelle **racine n-ième de l'unité** tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

A titre d'exemple 1

Les racines 2-ième de l'unité sont les solutions de l'équation $z^2 = 1$. $\mathbb{U}_2 = \{-1; 1\}$.
Les racines 3-ième de l'unité sont les solutions de l'équation $z^3 = 1$. $\mathbb{U}_3 = \left\{1; j, \overline{j}\right\}$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Les racines 4-ième de l'unité sont les solutions de l'équation $z^4 = 1$. $\mathbb{U}_4 = \{-1; 1; i; -i\}$.

Propriété 5

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité.

$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ki\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

Notation

Un entier naturel n étant fixé, on note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Avec cette notation, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité peut s'écrire :

$$\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k, k \in [\![0, n-1]\!]\right\} = \left\{1, \omega, \omega^2, \ldots\ldots, \omega^{n-1}\right\}$$

On peut aussi observer que, pour tout k $\in [\![0, n-1]\!], \omega^k = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi k}{n}}$ et

$$\mathbb{U}_n = \left\{\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

Propriété 6

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On rappelle que $\omega^n = 1$.

1. Toute racine n-ième de l'unité est de module 1 : Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!], |\omega^k| = 1$
2. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a : $\left(\omega^k\right)^{-1} = \omega^{-k} = \omega^{-k} \times \underbrace{1}_{\omega^n} = \omega^{n-k}$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\left(\omega^k\right)^{-1} = \overline{\omega^k}$.
4. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\omega^k = \omega^r$ où r désigne le reste dans la division euclidienne de k par n :
$k = qn + r$, avec $0 \leqslant r < n$.

Remarque

La dernière propriété provient de : $\omega^k = \omega^{nq+r} = \omega^{nq} \times \omega^r = \underbrace{(\omega^n)^q}_{1} \times \omega^r = \omega^r$

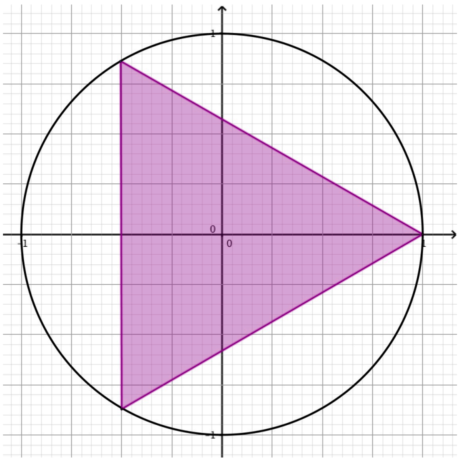
A titre d'exemple 2

Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ une racine $3^{\text{ème}}$ de l'unité. On a donc : $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$.
On veut simplifier j^{2021}.
La division euclidienne de 2021 par 3 donne un reste égal à 2. Alors $j^{2021} = j^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

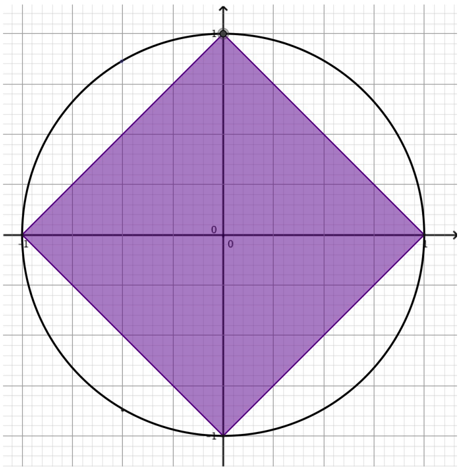
Propriété 7

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Les racines n-ièmes de l'unité sont les affixes d'un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle unité.

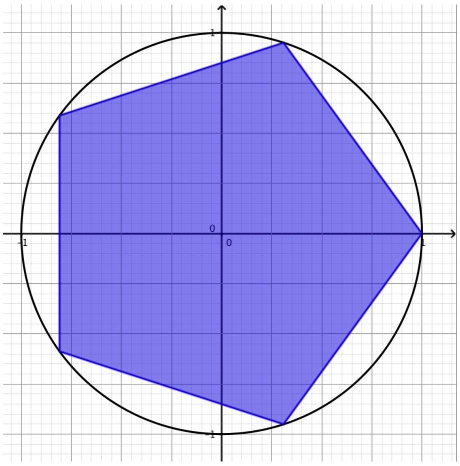
- Les éléments de $\mathbb{U}_3$ $\left(1, j \text{ et } j^2\right)$ sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.



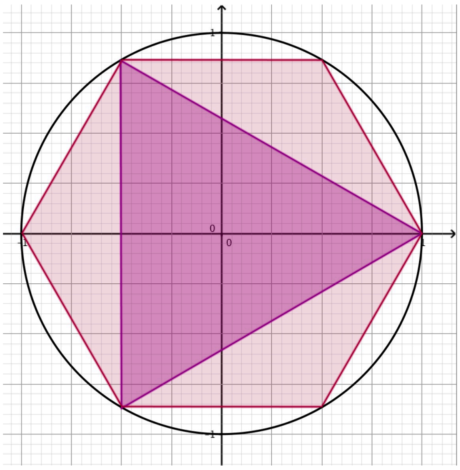
- Les éléments de $\mathbb{U}_4$ $\left(1, i, i^2 \text{ et } i^3\right)$ sont les affixes des sommets d'un carré.



- Les éléments de $\mathbb{U}_5$ $\left(1, \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{\frac{6i\pi}{5}} \text{ et } \mathrm{e}^{\frac{8i\pi}{5}}\right)$ sont les affixes des sommets d'un pentagone régulier.

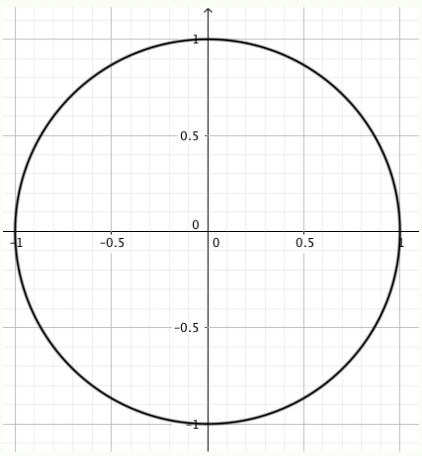


- Les éléments de $\mathbb{U}_6$ sont les affixes des sommets d'un hexagone régulier. On remarque que $\mathbb{U}_6$ contient $\mathbb{U}_3$.



Recherche

Exercice 8 : Représenter ci-dessous les éléments de $\mathbb{U}_8$. Vous montrerez en réalisant un graphique clair et soigné que $\mathbb{U}_8$ contient $\mathbb{U}_2$ et $\mathbb{U}_4$.



Exercice 9 : Ci-dessus, on a construit un octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.
Déterminer son périmètre.

Exercice 10 : Construction du pentagone régulier
Partie A : valeur de cos $\frac{2\pi}{5}$
On pose $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$.

1. a) Calculer ω^5.
   b) Factoriser le polynôme $x^5 - 1$ par $x - 1$.
   c) Déduire des questions précédentes que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
2. a) Donner ω^3 et ω^4 en forme exponentielle, avec la mesure principale de l'argument.
   b) Exprimer $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.
   Formule de trigonométrie : on rappelle que $\cos(-x) = \cos x$ *et que* $\sin(-x) = \sin x$.
3. a) En utilisant la réponse précédente, montrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est racine du trinôme $4x^2 + 2x - 1$.
   Formule de trigonométrie : on rappelle que $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.
   b) Déterminer la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Partie B : Construction géométrique

1. Tracer un cercle $\mathscr{C}$ de centre O passant par un point A.

   L'unité sera la longueur OA.

2. Construire un triangle OAK rectangle en A, tel que $KA = \dfrac{1}{2}$ unité.
   Combien mesure la longueur OK ?
3. Tracer le cercle de centre K passant par A ; il coupe le segment $[OK]$ en L. Puis placer le milieu M du segment $[OL]$.
   Combien mesure la longueur OM ?
4. Tracer le cercle de centre O passant par M ; il coupe le segment $[OA]$ en N.
   Puis placer un point B sur le cercle $\mathscr{C}$ tel que le triangle ONB soit rectangle en N : $[AB]$ est un côté d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle.
   Cliquer ici pour visualiser une construction du pentagone régulier