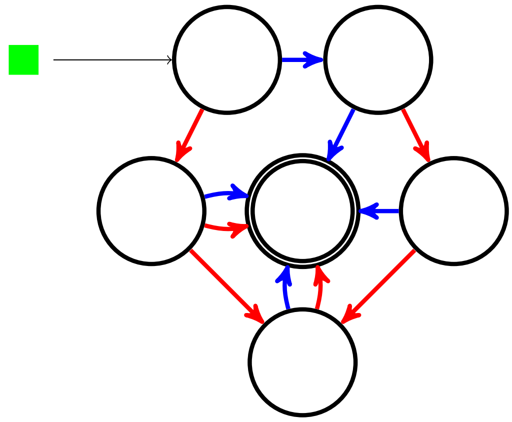
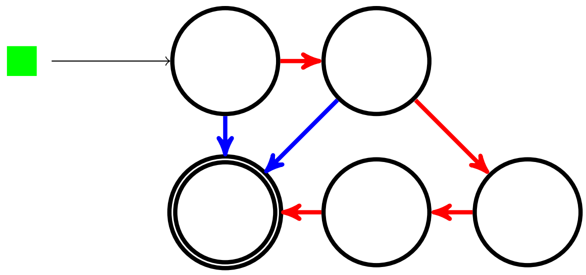
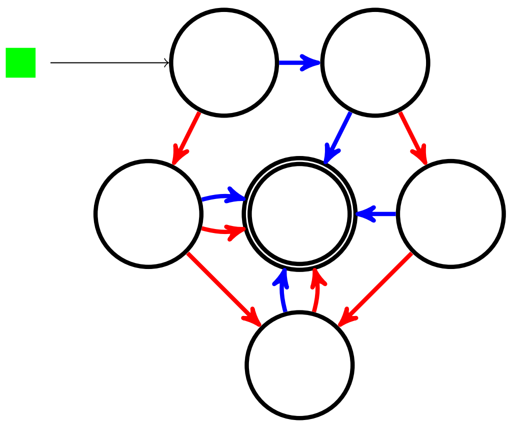
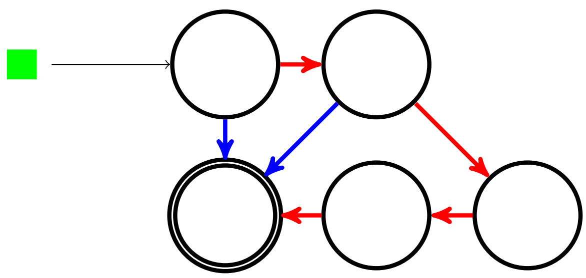
On considère deux jeux

$x =$ 

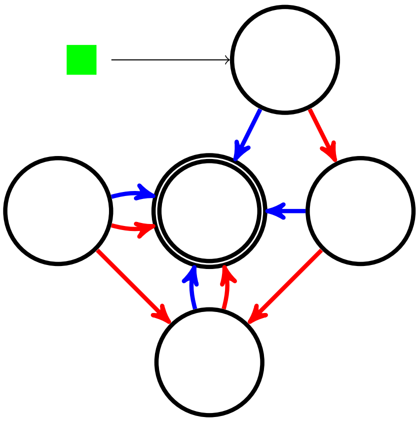
(il s'agit du jeu que Conway notait $\frac{\uparrow}{2}$)
et

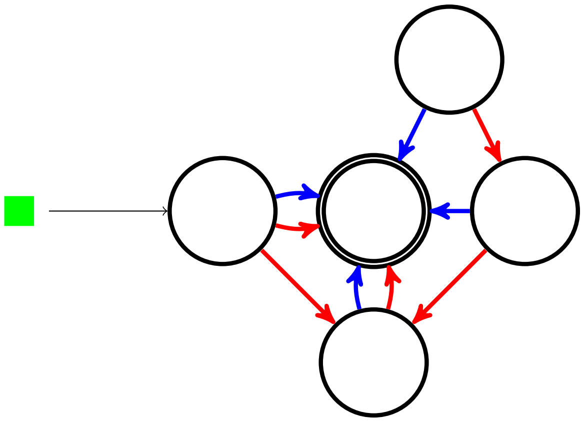
$y =$ 

(il s'agit du jeu que Conway notait $+_2$)
Une formule de Conway permet de calculer

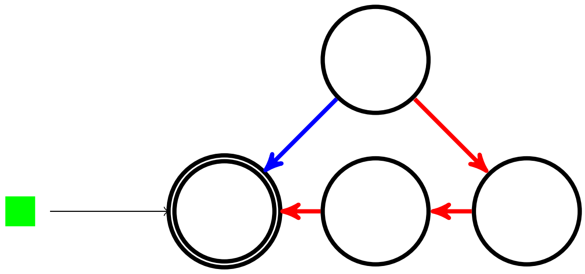
 $\times$ 

Pour ce faire, Conway définit 4 nouveaux jeux qui sont les options des b**L**eus et des **R**ouges dans les deux facteurs. Le premier facteur définit :

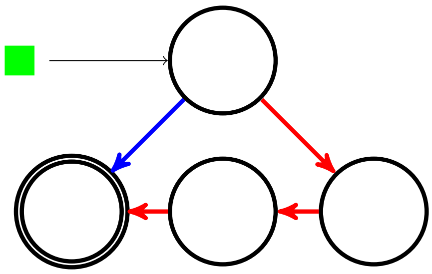
$x^L =$ 

et $x^R =$ 

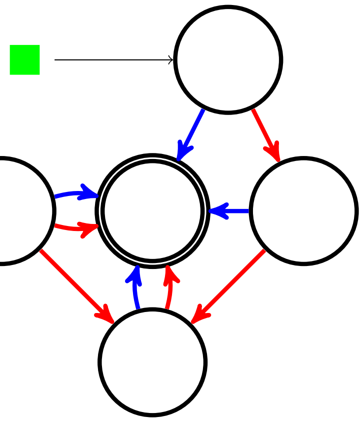
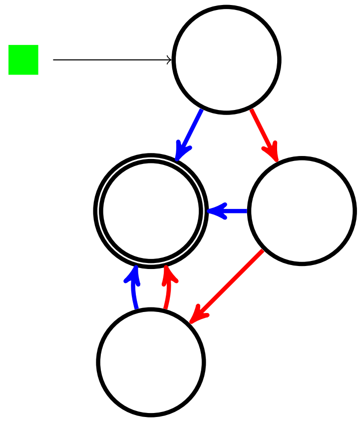
alors que le second facteur définit

$y^L =$ 

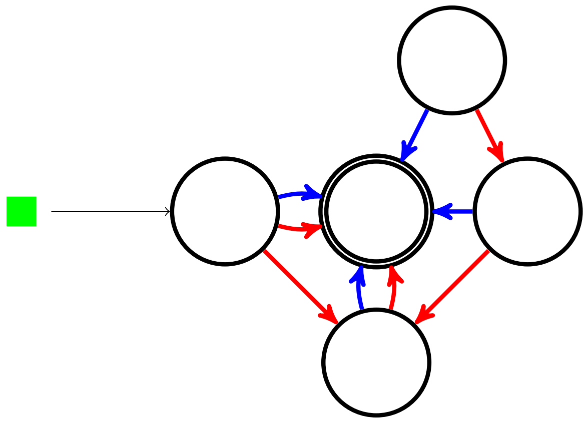
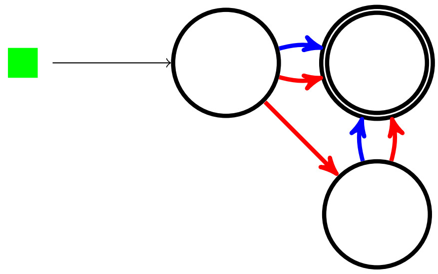
et

$y^R =$ 

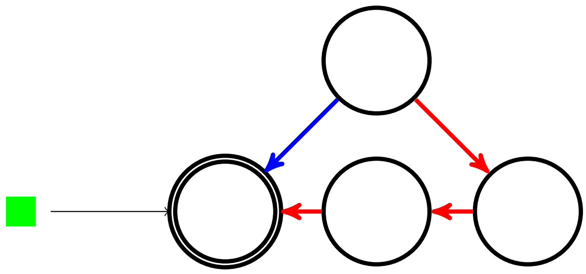
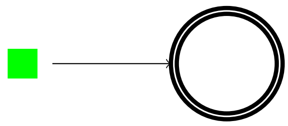
La définition de la multiplication par Conway est récursive puisqu'elle fait intervenir des produits des 6 jeux ci-dessus, mais comme les jeux x^L, x^R, y^L et y^R sont plus petits que x et y, la récursivité « marche ». La définition étant complexe, on va simplifier les 4 nouveaux jeux :

$x^L =$  $=$ 

(c'est le jeu noté $\uparrow\uparrow *$ par Conway)

$x^R =$  $=$ 

(c'est le jeu noté $\downarrow *$ par Conway)

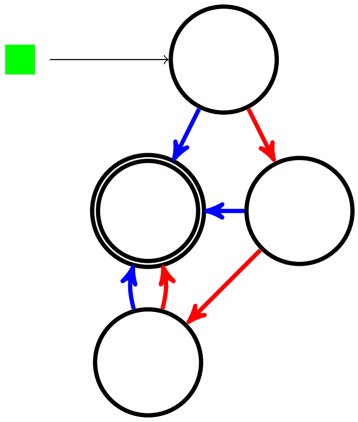
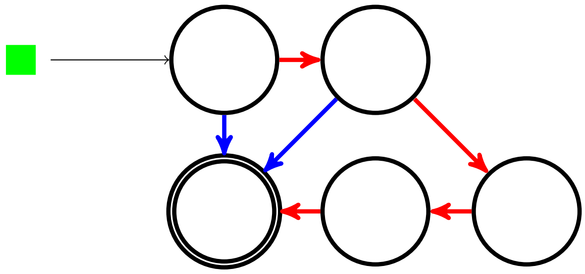
$y^L =$  $=$ 

(c'est le jeu zéro)
y^R n'est pas simplifiable.

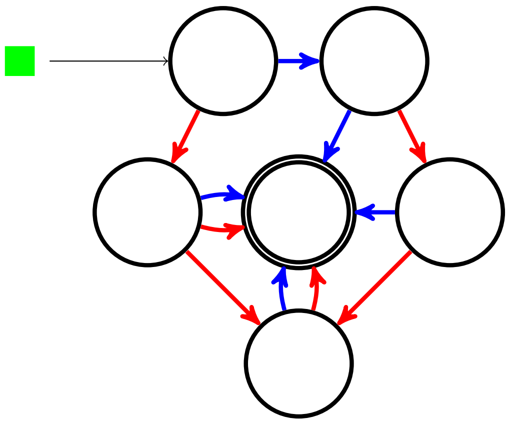
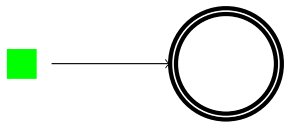
0.1 Options des bleus

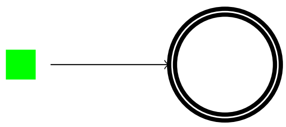
0.1.1 Première option

Premier terme

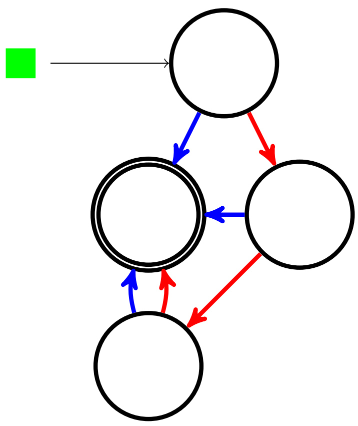
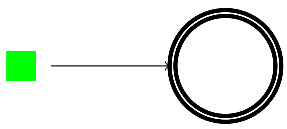
$x^L \times y =$  $\times$ 

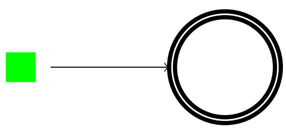
Second terme

$x \times y^L =$  $\times$ 

$=$ 

Troisième terme

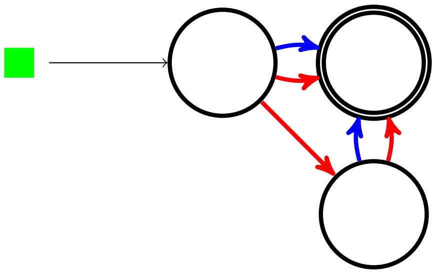
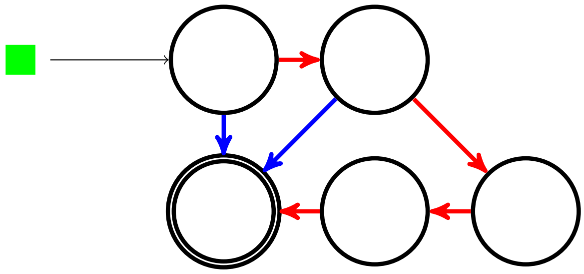
$x^L \times y^L =$  $\times$ 

$=$ 

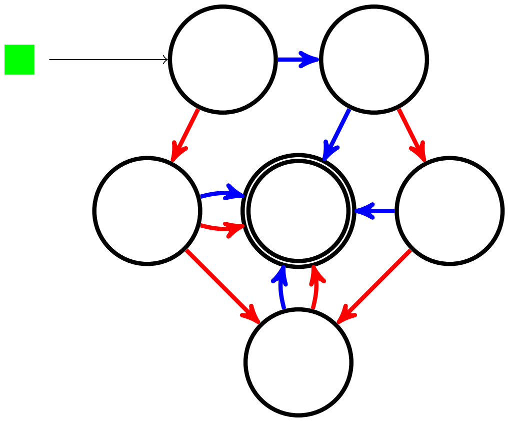
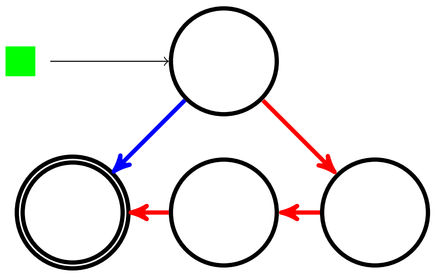
Ce terme ne doit pas être additionné aux deux autres, mais soustrait. Mais comme il est son propre opposé, son calcul est terminé.

0.1.2 Seconde option

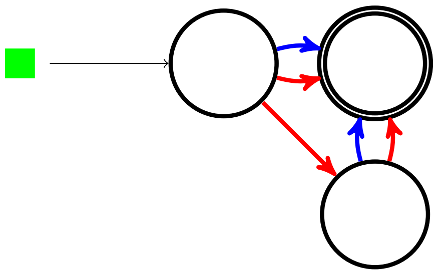
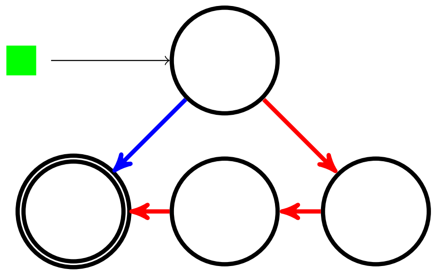
Premier terme

$x^R \times y =$  $\times$ 

Second terme

$x \times y^R =$  $\times$ 

Troisième terme

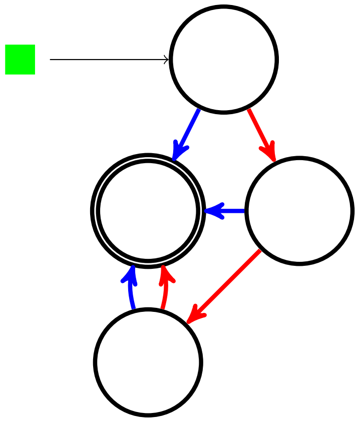
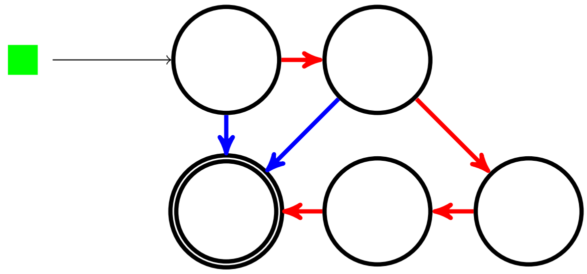
$x^R \times y^R =$  $\times$ 

Ce terme ne doit pas être additionné aux deux autres, mais soustrait.

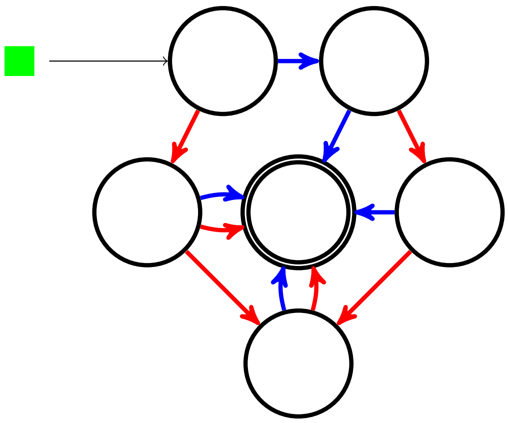
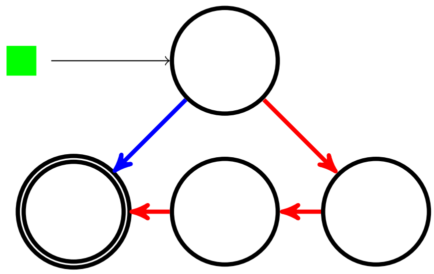
0.2 Options des rouges

0.2.1 Première option

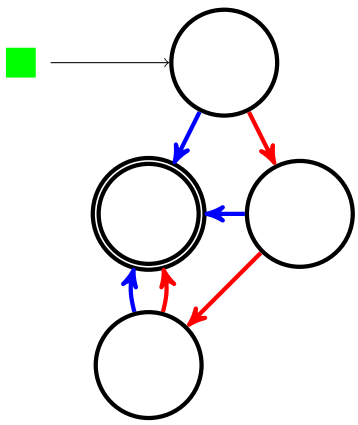
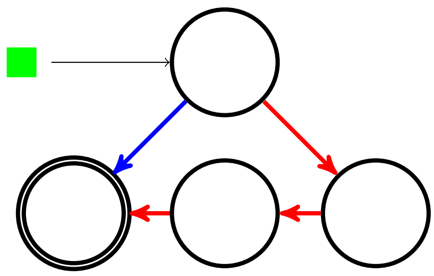
Premier terme

$x^L \times y =$  $\times$ 

Second terme

$x \times y^R =$  $\times$ 

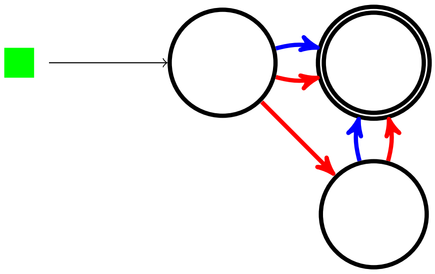
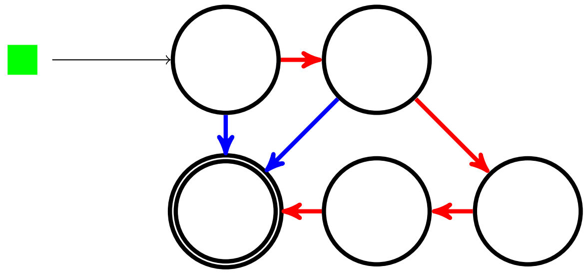
Troisième terme

$x^L \times y^R =$  $\times$ 

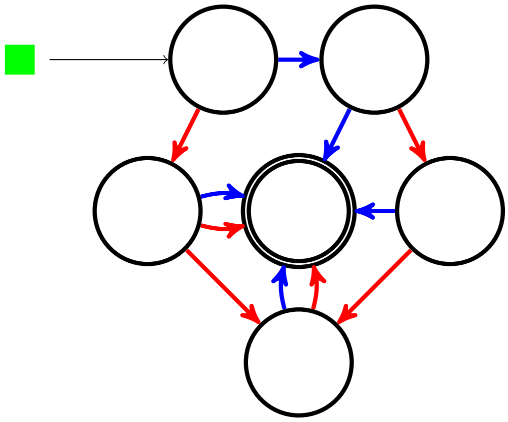
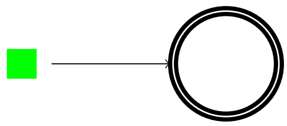
Ce terme ne doit pas être additionné aux deux autres, mais soustrait.

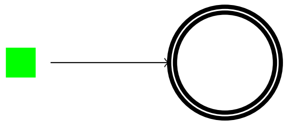
0.2.2 Seconde option

Premier terme

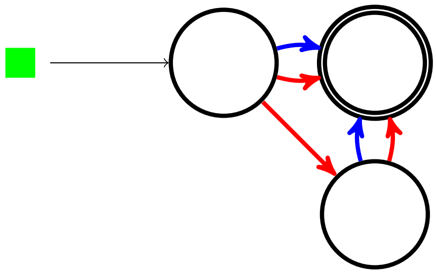
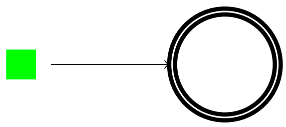
$x^R \times y =$  $\times$ 

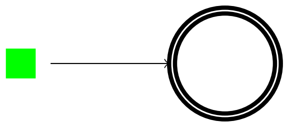
Second terme

$x \times y^L =$  $\times$ 

$=$ 

Troisième terme

$x^R \times y^L =$  $\times$ 

$=$ 

0.3 Exemples

0.3.1 moitié de l'étoile

La fraction $x = \frac{1}{2}$ a pour propriété intéressante que $x^L = 0$ et $x^R = 1$: il est facile de multiplier par 0 ou par 1. Pour multiplier un jeu y par $\frac{1}{2}$ on a donc les options suivantes :

Pour les bleus

Les bleus ont ces deux options :

- $x^L \times y + x \times y^L - x^L \times y^L = 0 + \frac{1}{2} \times y^L - 0 = \frac{1}{2} \times y^L$
- $x^R \times y + x \times y^R - x^R \times y^R = y + \frac{1}{2} \times y^R - y^R$

Pour les rouges

Les rouges ont ces deux options :

- $x^L \times y + x \times y^R - x^L \times y^R = 0 + \frac{1}{2} \times y^R - 0 = \frac{1}{2} \times y^R$
- $x^R \times y + x \times y^L - x^R \times y^L = y + \frac{1}{2} \times y^L - y^L$

Par exemple pour multiplier $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{2}$ on remplace y^L par 0 et y^R par 1 ci-dessus, ce qui donne les options $\frac{1}{2} \times 0 = 0$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 - 1 = 0$ pour les bleus, et $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 - 0 = \frac{1}{2}$ pour les rouges. Le produit de $\frac{1}{2}$ par lui-même est le nombre le plus simple compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, soit $\frac{1}{4}$.

Qu'obtient-on maintenant si on veut multiplier $\frac{1}{2}$ par l'étoile ? Avec $y = *$, on a $y^L = y^R = 0$ donc

- les bleus ont pour options $\frac{1}{2} \times 0 = 0$ et $* + \frac{1}{2} \times 0 - 0 = *$
- les rouges ont pour options $\frac{1}{2} \times 0 = 0$ et $* + \frac{1}{2} \times 0 - 0 = *$

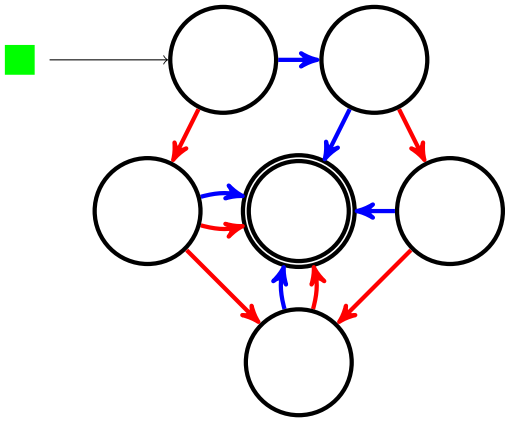
Le produit est donc le jeu de Nim à deux jetons, chaque joueur ayant pour options d'enlever un seul des deux jetons, ou d'enlever les deux jetons d'un coup. On a donc

$$\frac{1}{2} \times * = *2$$

Cet exemple révèle que la multiplication n'est pas distributive par rapport à l'addition : si elle l'était, on aurait $\frac{1}{2}* + \frac{1}{2}* = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) * = 1 \times * = *$. Or $\frac{1}{2} * + \frac{1}{2}* = *2 + *2 = 0$.

On constate au passage l'existence de diviseurs de zéro.

Le premier jeu de cet article est noté $\frac{\uparrow}{2}$ par Conway :



Il est intéressant de comparer ce jeu avec le produit de $x = \frac{1}{2}$ par $y = \uparrow$ pour lequel on a $y^L = 0$ et $y^R = *$. Dans le produit,

- les bleus ont pour options $\frac{1}{2} \times 0 = 0$ et $\uparrow + \frac{1}{2} \times * - * = \uparrow + *2 + * = \uparrow + *3$ noté $\uparrow *3$,
- les rouges ont pour options $\frac{1}{2} \times * = *2$ et $\uparrow + \frac{1}{2} \times 0 - 0 = \uparrow$

Comme chaque joueur choisit l'option qui est la meilleure de son point de vue, le produit est donc le jeu dans lequel l'option des bleus est $\uparrow *3$ et celle des rouges est $*2$. Ce n'est pas le graphe $\frac{\uparrow}{2}$.

0.3.2 multiplication par l'étoile

Si $x = *$, $x^L = x^R = 0$. Donc dans le produit $* \times y$, on a les options suivantes :

Pour les bleus

Les bleus ont ces deux options :

- $x^L \times y + x \times y^L - x^L \times y^L = 0 + * \times y^L - 0 = * \times y^L$
- $x^R \times y + x \times y^R - x^R \times y^R = 0 + * \times y^R - 0 = * \times y^R$

Pour les rouges

Les rouges ont ces deux options :

- $x^L \times y + x \times y^R - x^L \times y^R = 0 + * \times y^R - 0 = * \times y^R$
- $x^R \times y + x \times y^L - x^R \times y^L = 0 + * \times y^L - 0 = * \times y^L$

On constate que les bleus et les rouges ont les mêmes options : le produit d'un jeu par l'étoile tend à être plus équitable que ce jeu.

Les options des bleus comme celles des rouges sont $* \times y^L$ et $* \times y^R$. Par exemple si $y = *$, on a $y^L = y^R = 0$ donc les options des bleus sont

$* \times 0 = 0$ et $* \times 0 = 0$, les rouges ayant même(s) option(s). On reconnaît là l'étoile ce qui signifie que

$$* \times * = *$$

Un produit intéressant à examiner est $* \times \uparrow$. Alors puisque $y = \uparrow$, on a $y^L = 0$ et $y^R = *$. En effectuant les remplacements dans les formules vues plus haut pour le produit par l'étoile, on voit, pour les bleus comme pour les rouges

- l'option $* \times 0 = 0$
- l'option $* \times * = *$

On reconnaît là le jeu $*2$. Ainsi

$$* \times \uparrow = *2$$

On remarque qu'en multipliant l'étoile par $\uparrow$ qui est un infiniment petit positif, on obtient le même produit qu'en multipliant l'étoile par $\frac{1}{2}$.

On en déduit un autre phénomène surprenant concernant la multiplication des infinitésimaux :

- $* \times (* \times \uparrow) = * \times *2 = *3$ (jeu de Nim à trois jetons)
- $(* \times *) \times \uparrow = * \times \uparrow = *2$ (jeu de Nim à deux jetons)

La multiplication n'est donc pas associative !

0.3.3 Puissances de $\uparrow$

Pour multiplier un jeu par $x = \uparrow$, on tient compte du fait que $x^L = 0$ et $x^R = *$. Alors, dans le produit, on a les options suivantes :

Pour les bleus

Les bleus ont ces deux options :

- $x^L \times y + x \times y^L - x^L \times y^L = 0 + \uparrow \times y^L - 0 = \uparrow \times y^L$
- $x^R \times y + x \times y^R - x^R \times y^R = * \times y + \uparrow \times y^R - * \times y^R$

Pour les rouges

Les rouges ont ces deux options :

- $x^L \times y + x \times y^R - x^L \times y^R = 0 + \uparrow \times y^R - 0 = \uparrow \times y^R$

- $x^R \times y + x \times y^L - x^R \times y^L = * \times y + \uparrow \times y^L - * \times y^L = * \times y + \uparrow \times y^L + * \times y^L$

(la dernière simplification vient de ce que l'étoile est son propre opposé)

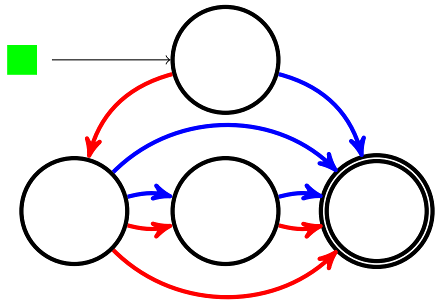
Dans le cas où $y = \uparrow$, on remplace y^L par 0 et y^R par l'étoile, ce qui donne

- pour les bleus, l'option $\uparrow \times 0 = 0$ et l'option $* \times \uparrow + \uparrow \times * - * \times * = *2 + *2 + * = *$
- pour les rouges, l'option $\uparrow \times * = *2$ et l'option $* \times \uparrow + \uparrow \times 0 + * \times 0 = *2$ également

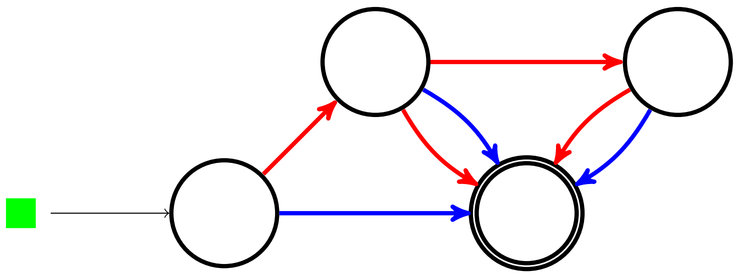
Il s'agit d'un jeu déjà vu plus haut, noté $\uparrow *3$ (somme de $\uparrow$ et d'un jeu de Nim a trois jetons).

Ce jeu peut être simplifié : comme les bleus essayent de gagner, l'option $*$ ne leur est d'aucun intérêt et c'est comme s'ils n'avaient que l'option qui est la meilleure pour eux, à savoir 0.

Le produit de $\uparrow$ par lui-même est donc le jeu



Ce n'est pas le même jeu que celui que Conway notait $\uparrow^2$ et qui est :



Ainsi $\uparrow \times \uparrow \neq \uparrow^2$. On va de surprise en surprise dans l'infiniment petit.

Il est difficile de faire de l'analyse non standard parce que $\uparrow *3$ est du même ordre de grandeur que $\uparrow$ (les deux infinitésimaux positifs ont la même masse atomique 1). Alors que $\uparrow^2$ est infiniment petit par rapport à $\uparrow$.

0.4 Résumé

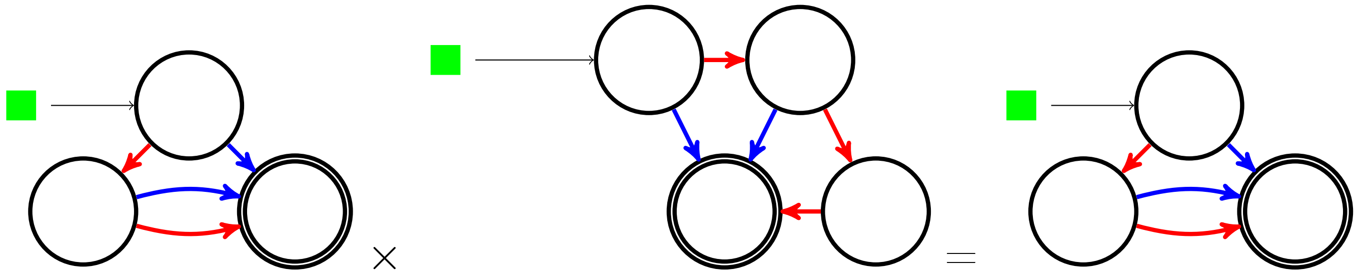
La multiplication de Conway coïncide avec la multiplication ordinaire lorsque les facteurs sont des nombres.

Elle donne à l'ensemble des nimbers une structure de corps de caractéristique 2 (par exemple $* \times * = *$, $* \times *2 = *3$, $* \times *3 = *2$, $*2 \times *3 = *$...).

Mais par contre, dans l'infiniment petit

- elle n'est pas associative,
- elle n'est pas distributive par rapport à l'addition,
- il y a des diviseurs de zéro, c'est-à-dire qu'il existe des jeux non nuls dont le produit est nul...

Le produit $\uparrow \times +_1 = \uparrow$ interpelle aussi :



IREMI 974
avril 2023