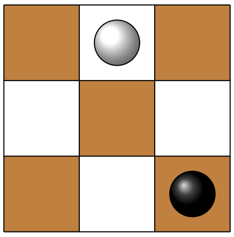
Une fraction dans alquerkonane sur un damier 3×3

Alain Busser
Institut de Recherche
pour l'Enseignement des Mathématiques
et de l'Informatique
La Réunion

4 février 2023

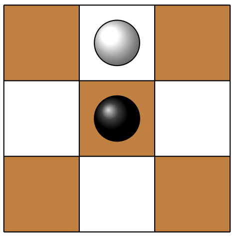
On va étudier cette position sur un damier alquerkonane 3×3 :



Ce jeu est négatif : que ce soit aux noirs de commencer, ou aux blancs, ce sont les blancs qui ont une stratégie gagnante.

0.1 Les noirs commencent

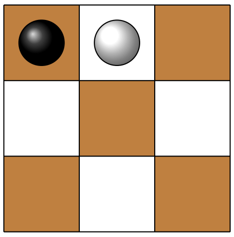
Ils ne peuvent qu'amener leur unique pion au centre :



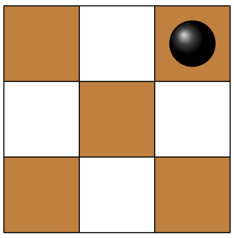
et ainsi, vont perdre parce que la valeur de cette position est -1 (avantage d'un coup pour les blancs). En effet

0.1.1 Si c'est aux noirs de jouer

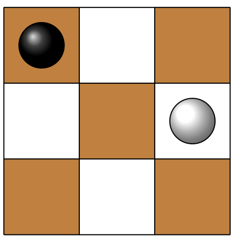
Ils ne peuvent qu'avancer (une seule possibilité, à symétrie près) :



Cette position n'est pas un nombre. En effet, depuis cette position, les noirs peuvent arriver à 0 :



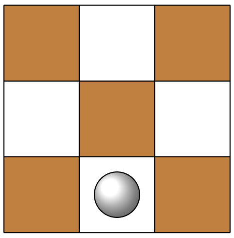
et les blancs, à -1 (ils jouent au mieux donc évitent l'autre option qui est 2 et les fait perdre) :



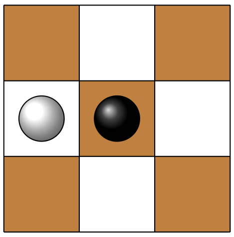
Comme 0 n'est pas plus petit que -1, la position n'est pas un nombre. Mais elle est plus grande que tous les nombres inférieurs à -1, et plus petite que tous les nombres positifs.

0.1.2 Si c'est aux blancs de jouer

Ils peuvent prendre le pion noir et arriver à 0 (donc gagner) :



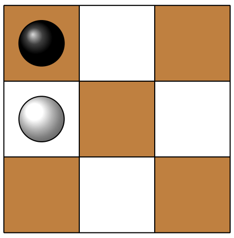
Mais ils peuvent faire mieux (de leur point de vue) :



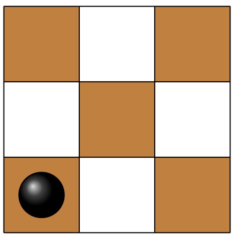
Cette position n'est pas un nombre, mais elle est globalement à l'avantage des blancs (elle est inférieure à tout nombre positif).

Si c'est aux noirs de jouer

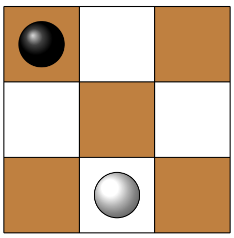
Le mieux qu'ils puissent faire est de menacer le pion blanc :



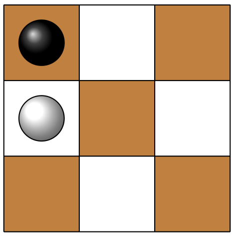
Depuis cette position, les noirs (si c'était à eux de jouer) gagnent en prenant le pion blanc, arrivant à 2 (coups d'avance sur les blancs)



alors que les blancs gagnent en arrivant à 0 :



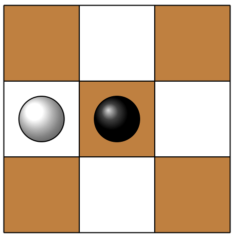
La position



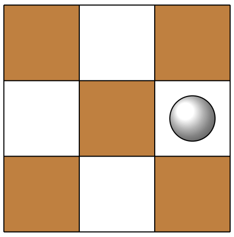
n'est donc pas un nombre puisque 2 n'est pas inférieur à 0, mais elle est plus grande que tout nombre négatif, et plus petite que tout nombre supérieur à 2.

Si les blancs rejouaient

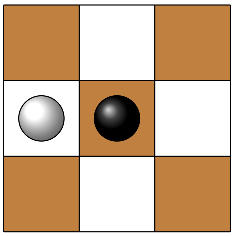
Il leur suffirait, depuis cette position,



de prendre le pion noir



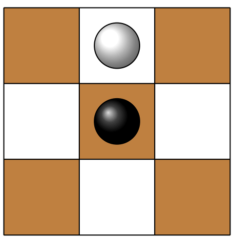
pour arriver au nombre -1 (ils ont un coup d'avance sur les noirs). La position ci-dessous



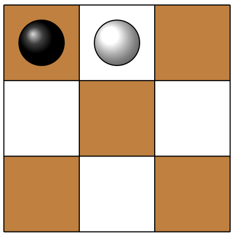
n'est pas non plus un nombre : elle permet aux noirs d'accéder à une position non numérique mais supérieure à tout nombre négatif (en particulier à -1), et aux blancs d'arriver à -1, donc la position à laquelle accèdent les noirs n'est pas inférieure à -1. Mais la position en question, même si elle n'est pas un nombre, est néanmoins à la fois supérieure à tout nombre inférieure à -1, et inférieure à tout nombre positif. Elle est donc suffisamment à l'avantage des blancs, pour que la position de départ soit négative.

0.1.3 Récapitulation

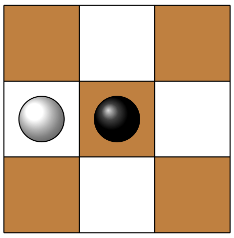
Depuis la position



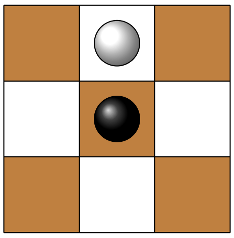
les noirs peuvent arriver à



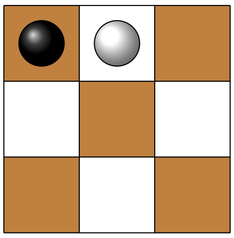
qui est supérieure à tout nombre inférieur à -1, et inférieure à tout nombre positif, alors que les blancs peuvent arriver à



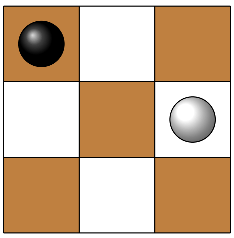
qui est également supérieure à tout nombre inférieur à -1, et inférieure à tout nombre positif. Il résulte de la théorie thermodynamique de Berlekamp et Conway, que



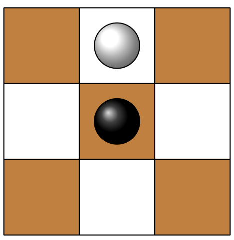
est égal à -1. On peut le vérifier, en faisant jouer les noirs (une fois, au mieux) puis les blancs (une fois, au mieux). On a d'abord



puis

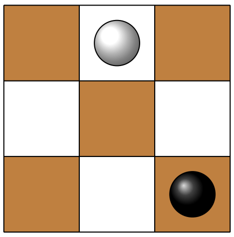


Cette position est équivalente à



et on voit qu'elle donne un coup d'avance aux blancs : elle vaut -1.

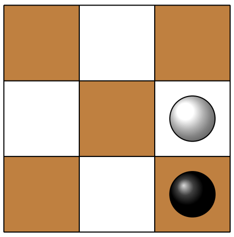
En résumé, si les noirs commencent le jeu initial,



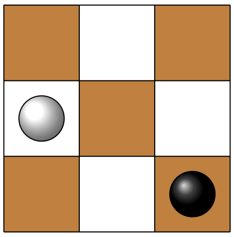
ils perdent (et même en laissant un coup d'avance aux blancs puisque la position à laquelle ils arrivent vaut -1). Le jeu initial est donc négatif ou nul.

0.2 Les blancs commencent

Depuis le jeu initial, les blancs peuvent se suicider en avançant leur pion devant le pion noir :



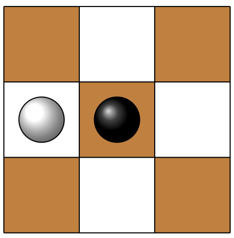
mais ils peuvent faire mieux :



Cette position vaut 0 (qui les fait gagner) :

0.2.1 Les noirs jouent

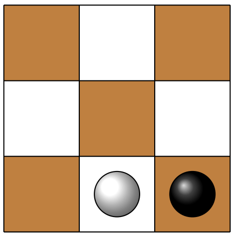
Ils ne peuvent arriver qu'ici :



Cette position a déjà été examinée : ce n'est pas un nombre mais elle est supérieure à tout nombre inférieur à -1, et inférieure à tout nombre positif. Les noirs, qui ont commencé, perdent (les blancs prennent le pion noir et arrivent à -1).

0.2.2 Les blancs rejouent

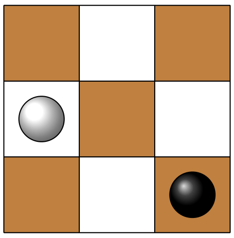
Dans ce cas, ils perdent :



En effet, les noirs prennent le pion blanc et arrivent au nombre 2, alors que les blancs n'avaient aucune option. La position ci-dessus est donc égale au nombre 3 : les noirs peuvent encore bouger 3 fois (prendre le pion blanc puis avancer 2 fois) alors que les blancs ne peuvent plus bouger.

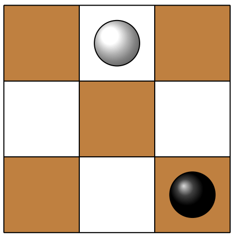
0.2.3 Récapitulation

Depuis la position

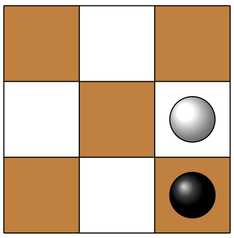


le prochain qui joue perd donc cette position est le nombre 0.

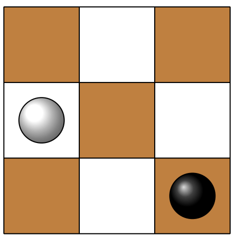
Depuis la position



les blancs peuvent donc aller, ou bien à 1 :



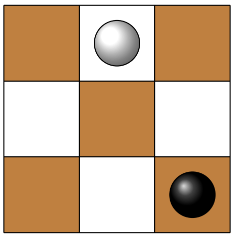
(ce qui n'est pas dans leur intérêt), ou bien à 0 :



ce qu'ils font évidemment, puisqu'ainsi ils gagnent.

0.3 Valeur du jeu initial

Finalement, depuis le jeu



les noirs vont à la position -1 qui les fait perdre, et les blancs vont à 0 (qui les fait gagner) ou 1 (qui les fait perdre). Comme -1 est inférieur à la fois à 0 et à 1, le jeu étudié est un nombre. On a vu que ce nombre est négatif. En fait il est

- supérieur à la plus grande option des noirs qui est -1,
- inférieur à la plus petite option des blancs qui est 0.

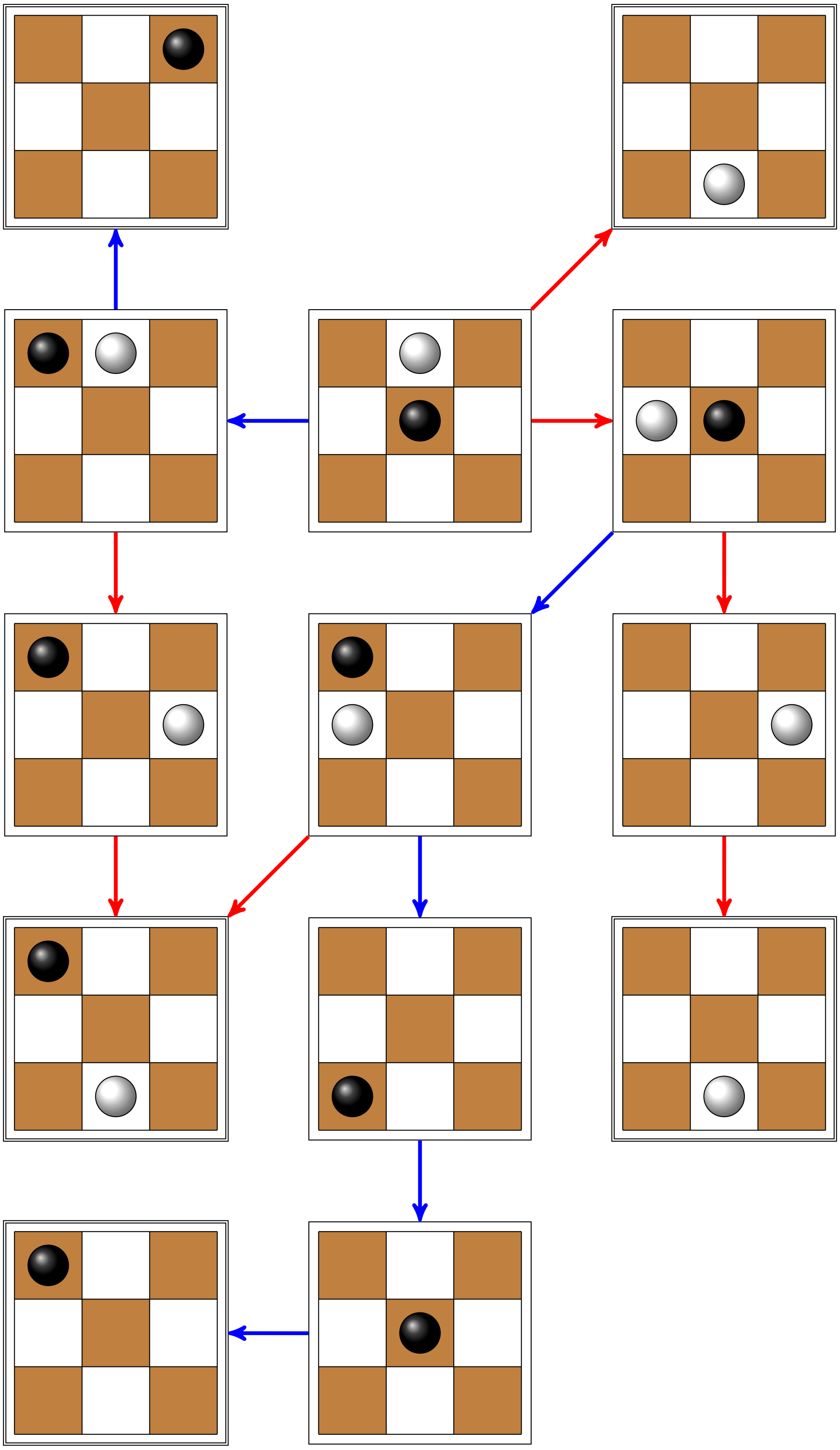
Il s'agit donc du nombre le plus simple possible qui soit strictement compris entre -1 et 0, c'est-à-dire $-\frac{1}{2}$.

0.4 Graphe

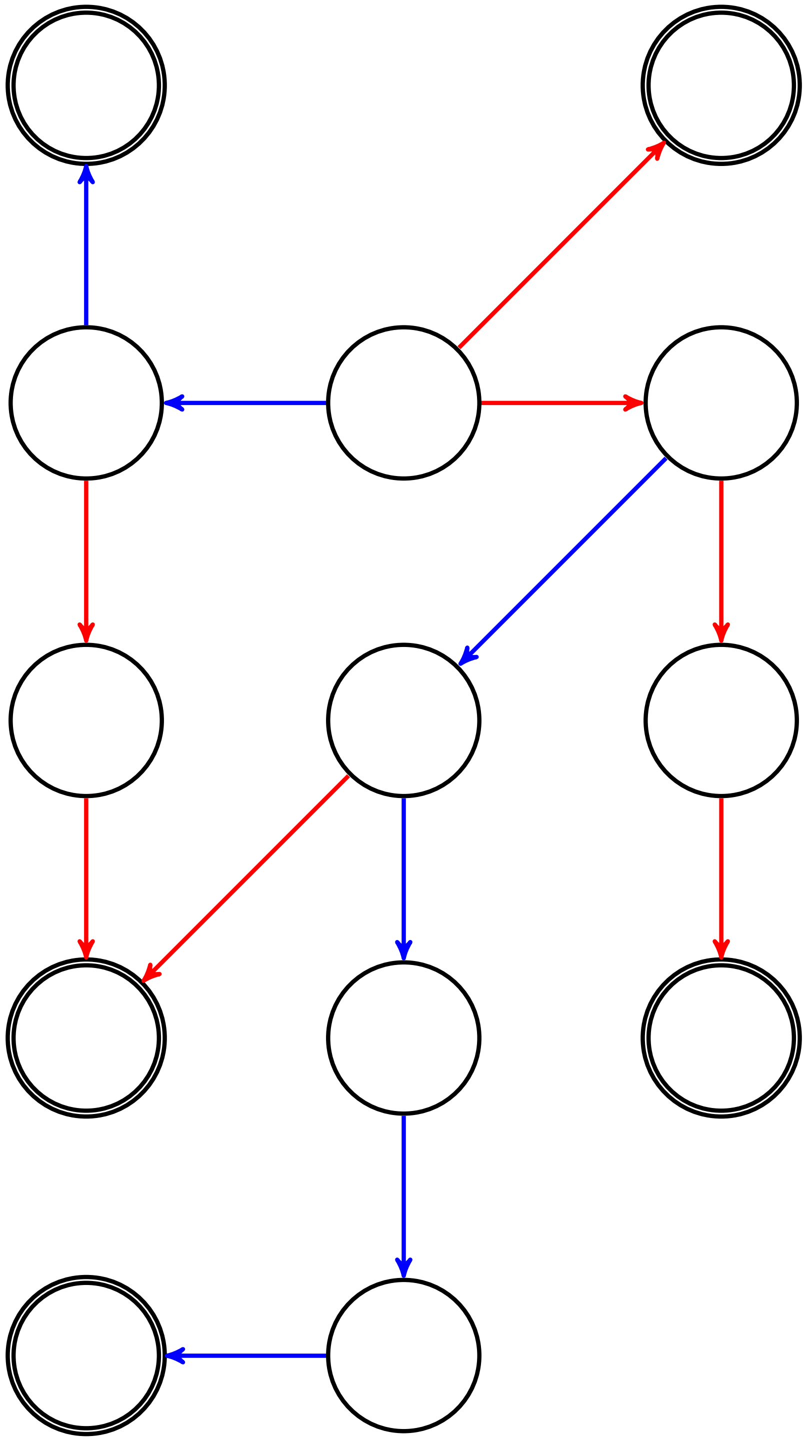
On représente les mouvements possibles des noirs par des flèches bleues, les mouvements possibles des blancs par des flèches rouges.

0.4.1 Option des noirs

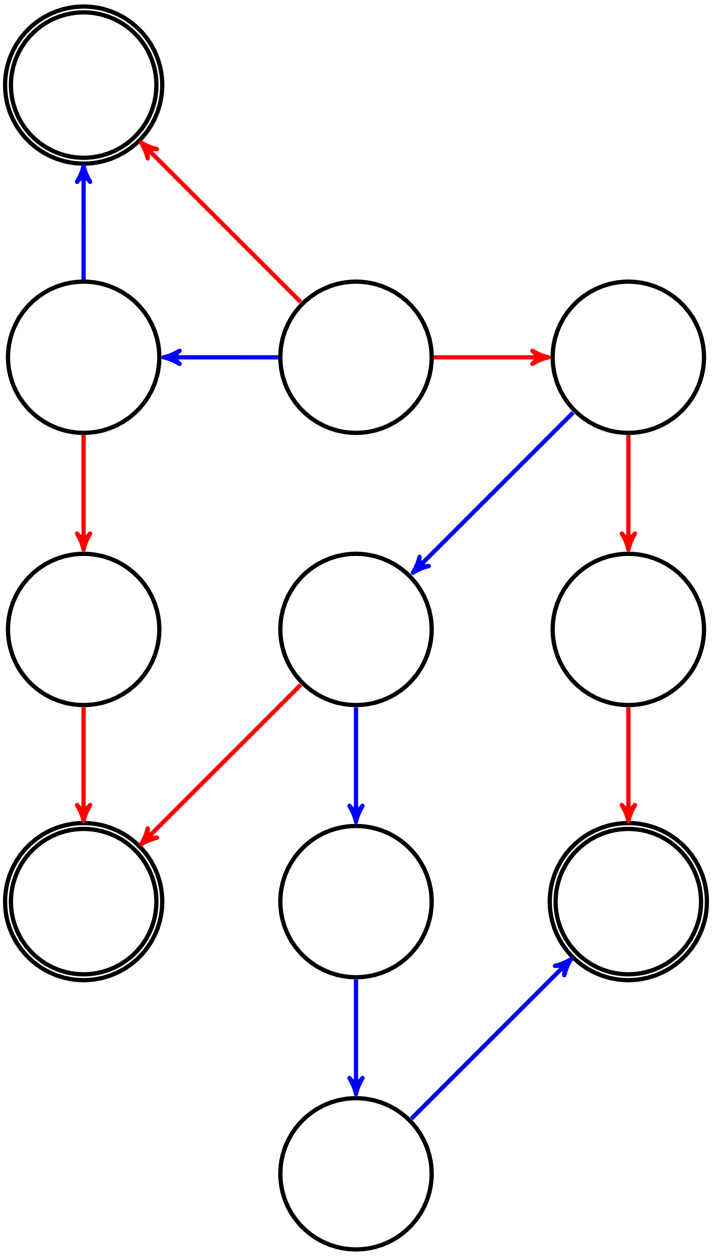
On commence par construire l'arbre du jeu (en fait, une partie de l'arbre, parce qu'on suppose que les blancs ne vont pas perdre lorsqu'ils peuvent gagner), et ensuite on va simplifier cet arbre, en le transformant en un graphe.



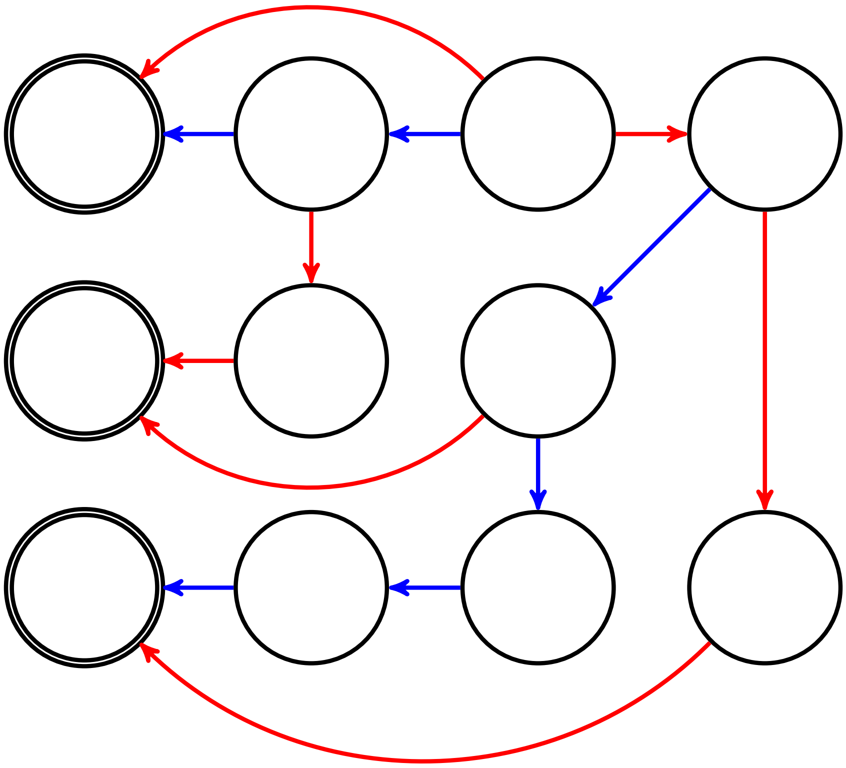
En vidant les étiquettes des sommets du graphe, il devient ceci :

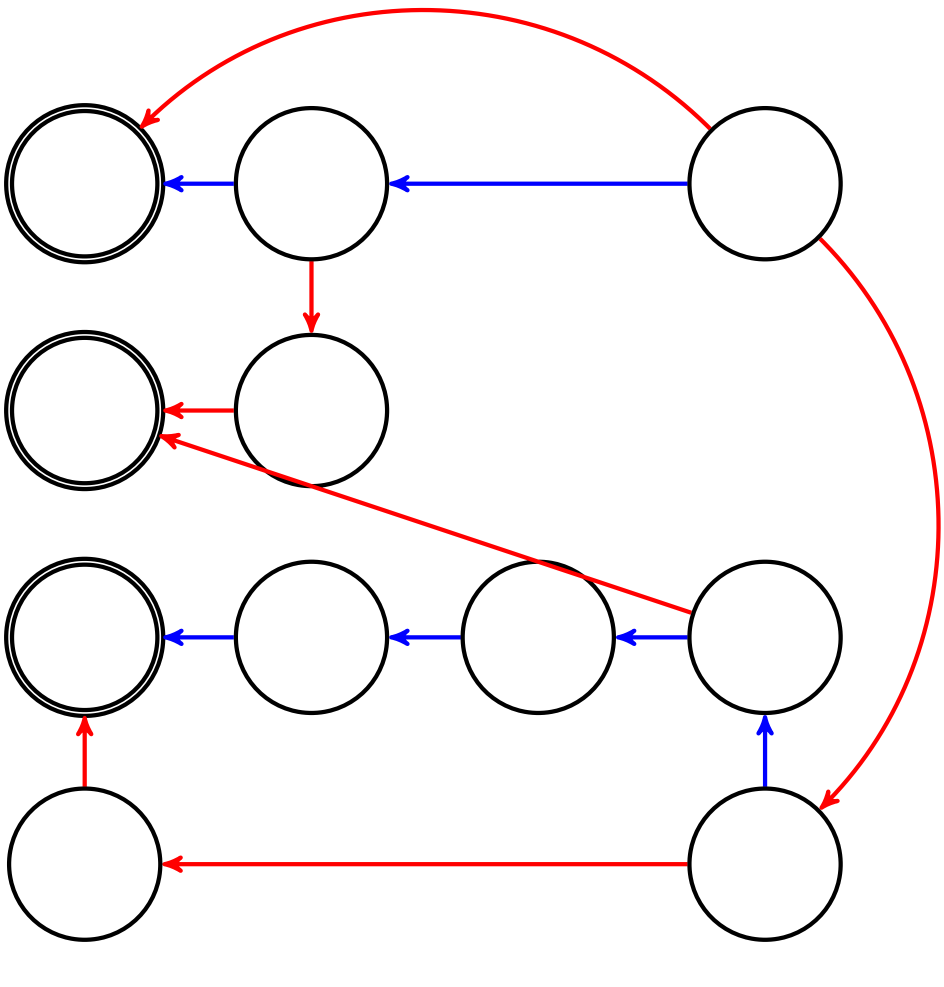


Une simplification apparaît alors, puisque les sommets valant 0 (doubles cercles) peuvent être fusionnés. D'abord

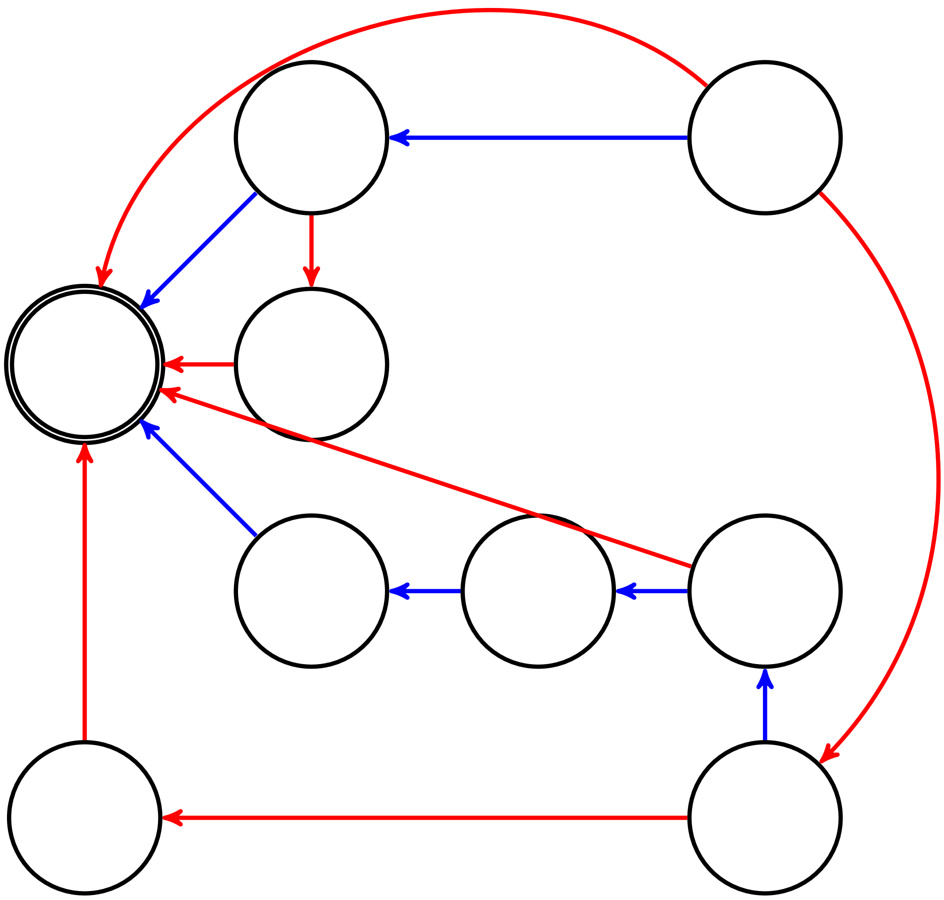


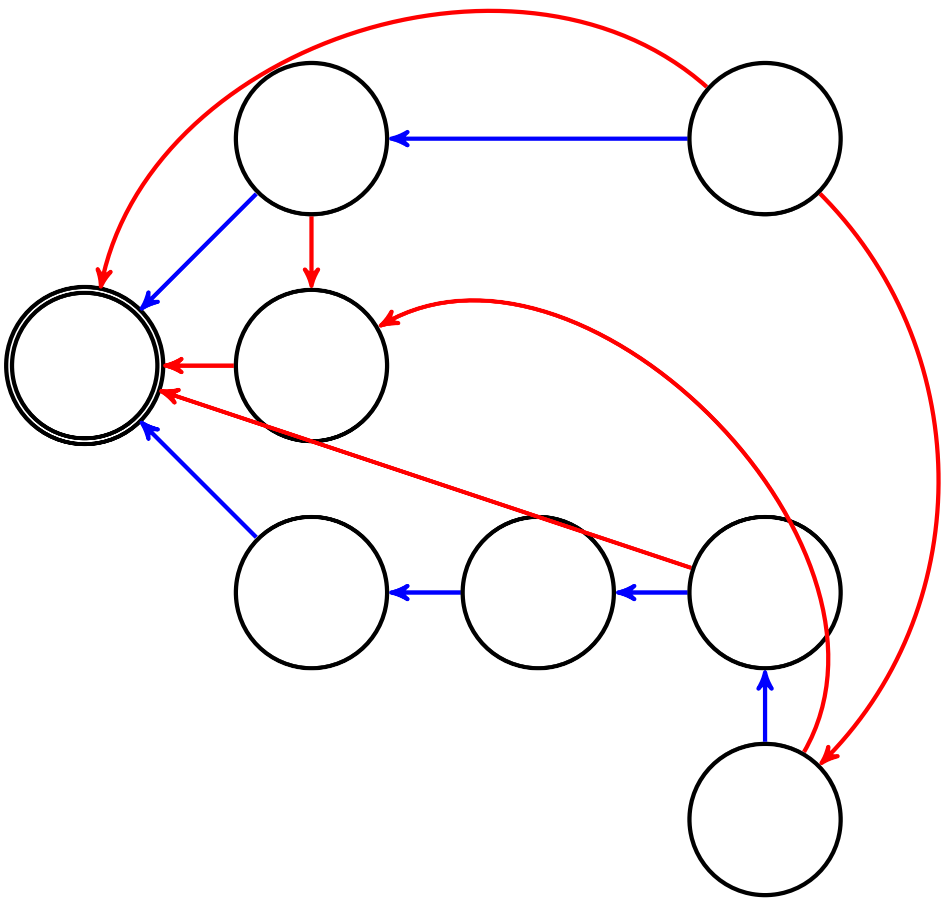
puis d'autres représentation du même graphe :



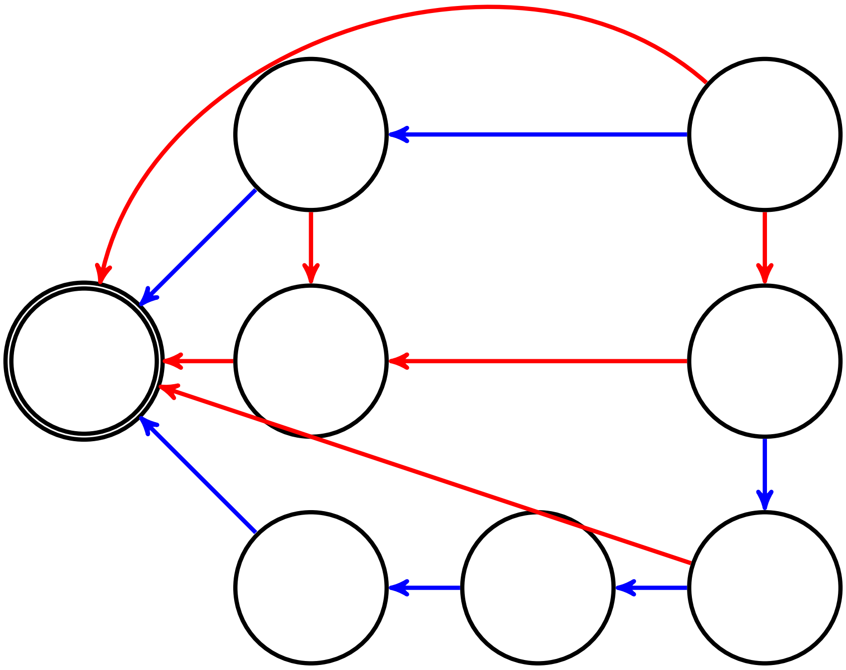


ce qui amène à de nouvelles simplifications :

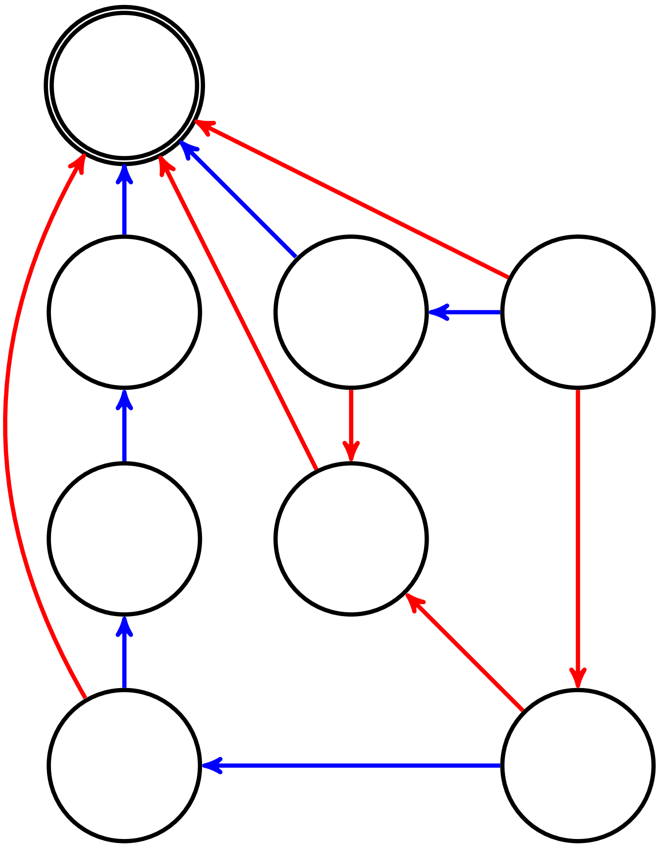




Le graphe devient

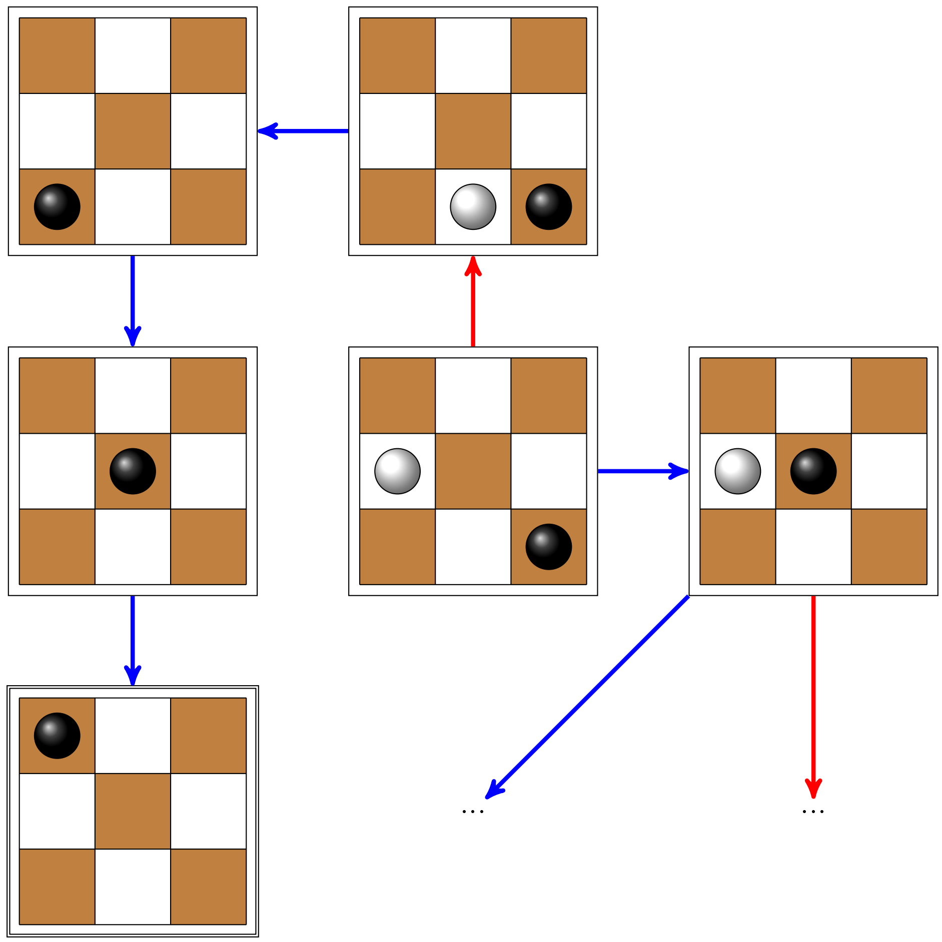


puis

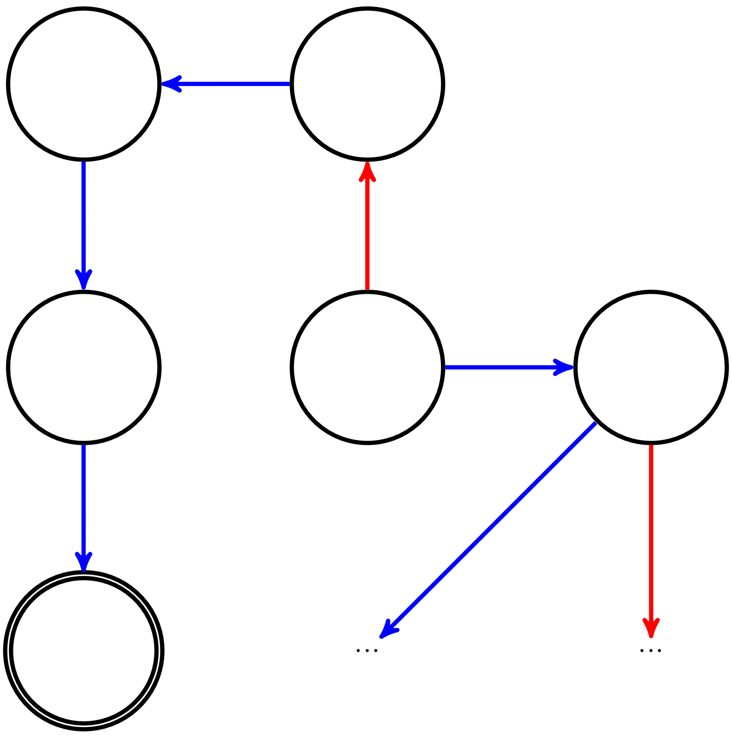


0.4.2 Option des blancs

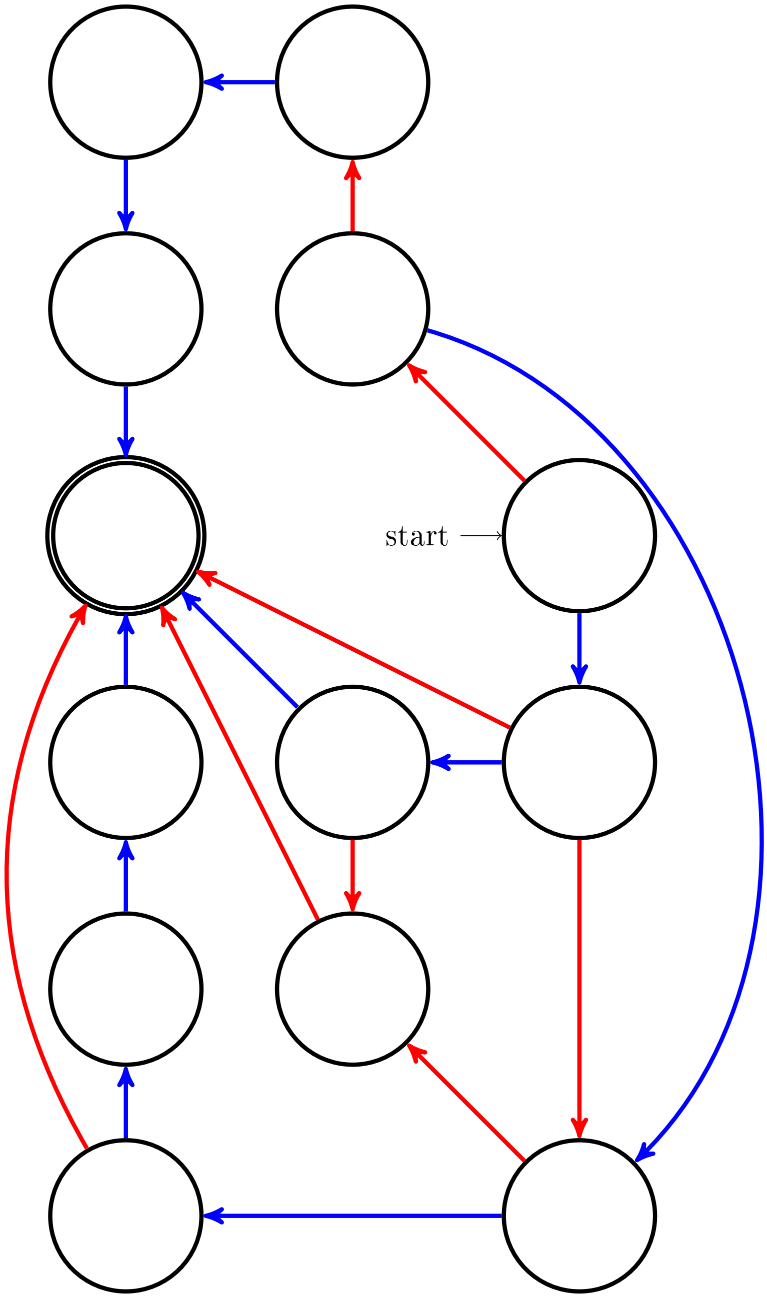
On commence par l'arbre (l'une des branches, déjà présente dans l'autre graphe, n'a pas été reproduite *in extenso*) :



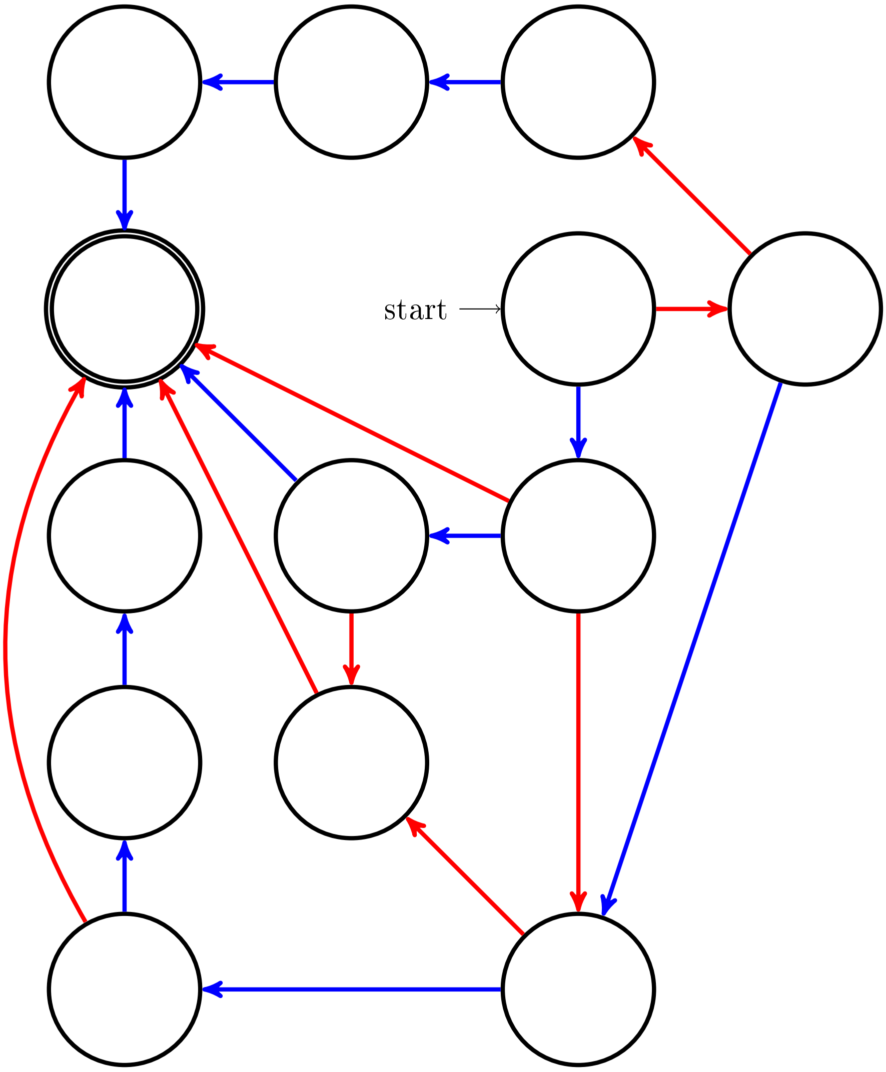
Pour finir, il suffit donc de brancher ce graphe sur le précédent :



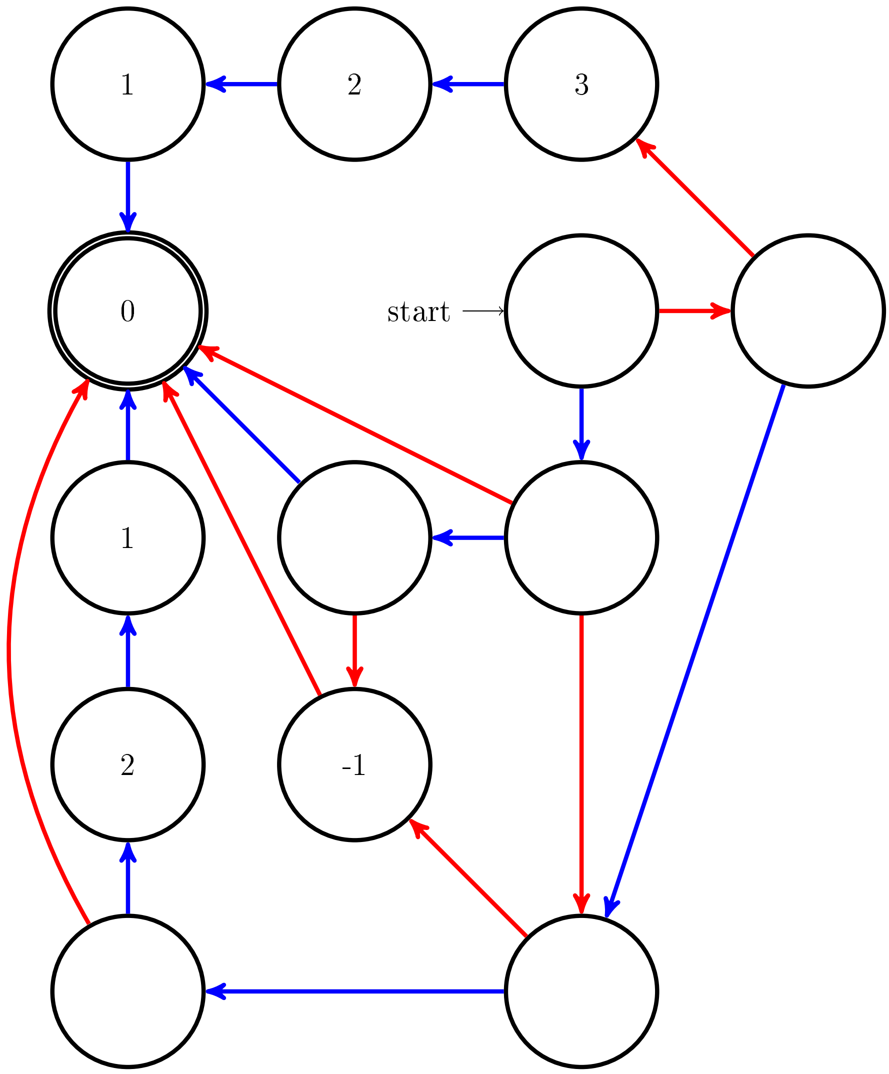
0.4.3 Le graphe au complet



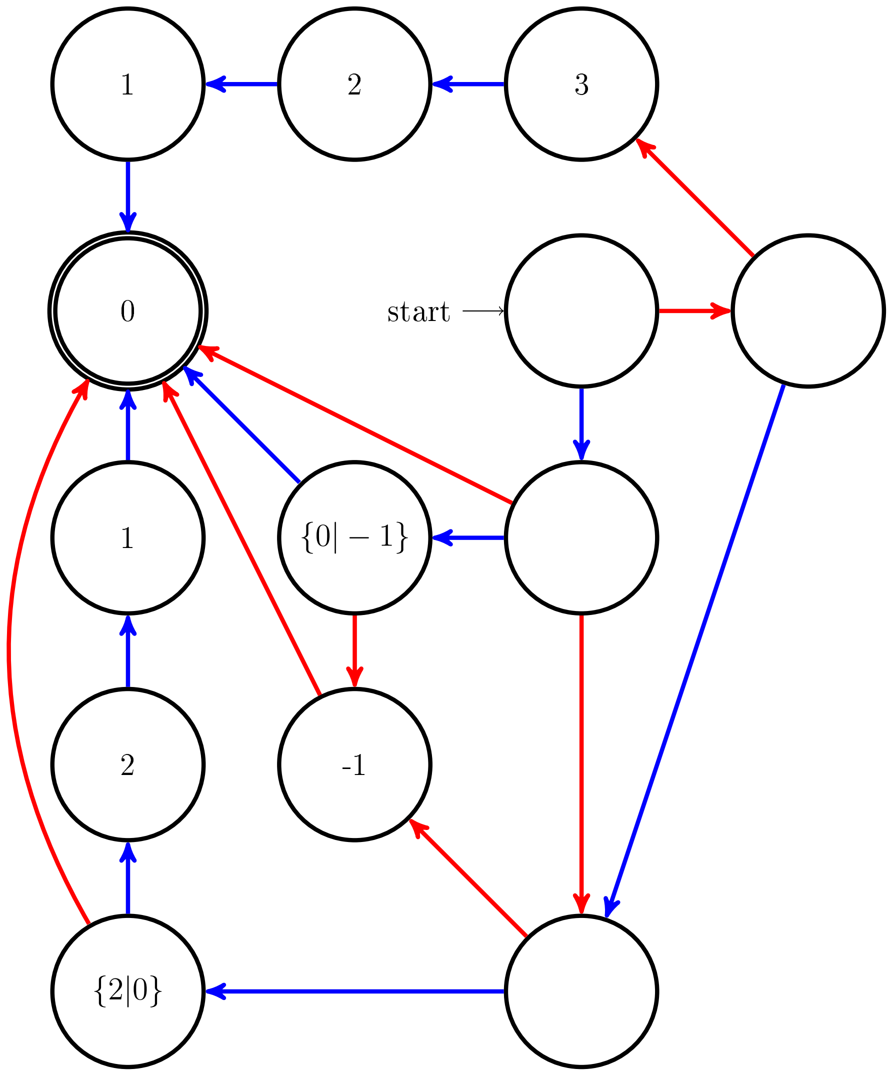
On peut l'améliorer :



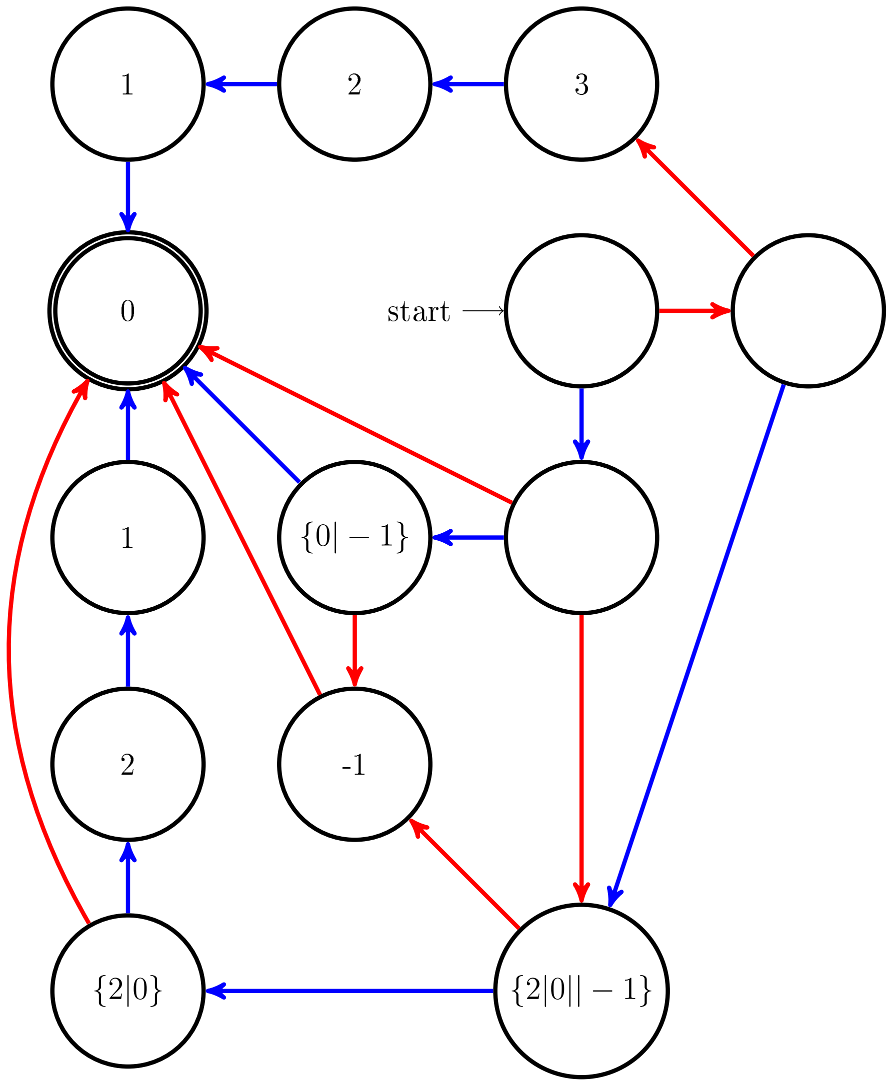
On peut maintenant calculer la valeur du graphe, en commençant par le fait que le sommet final vaut 0, et en remontant :



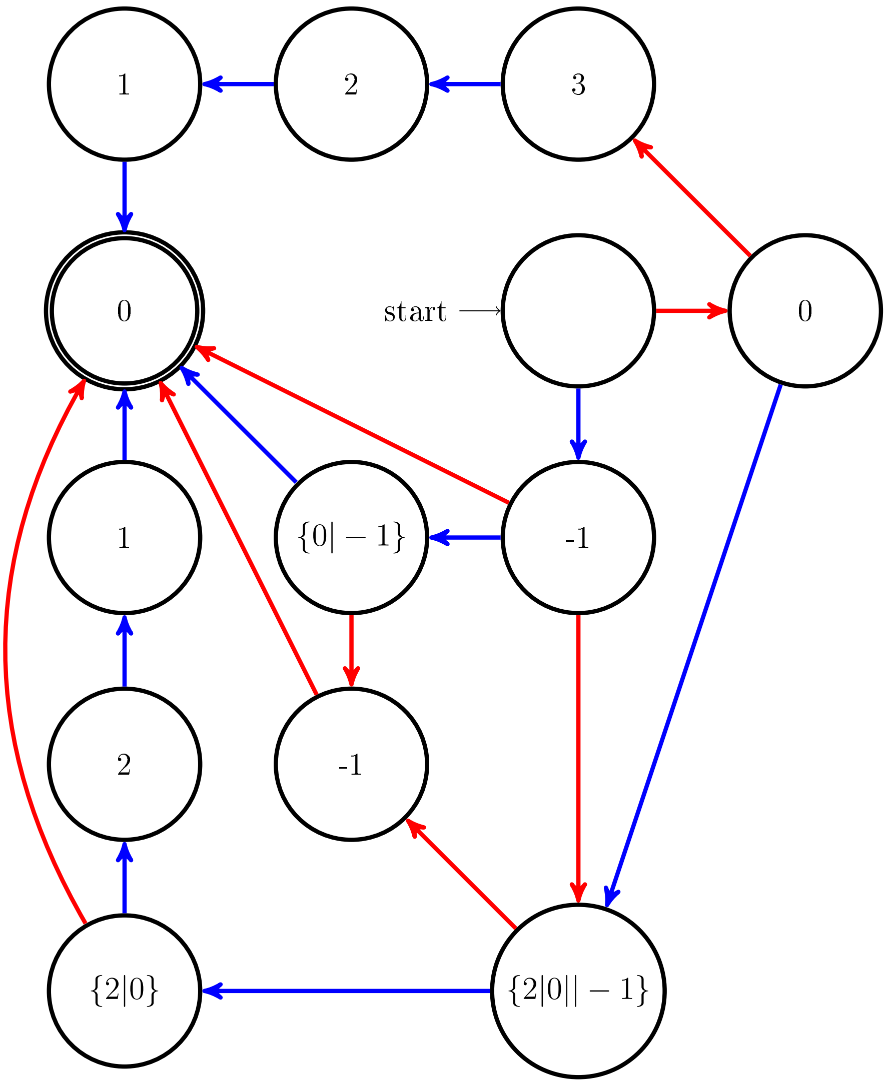
puis



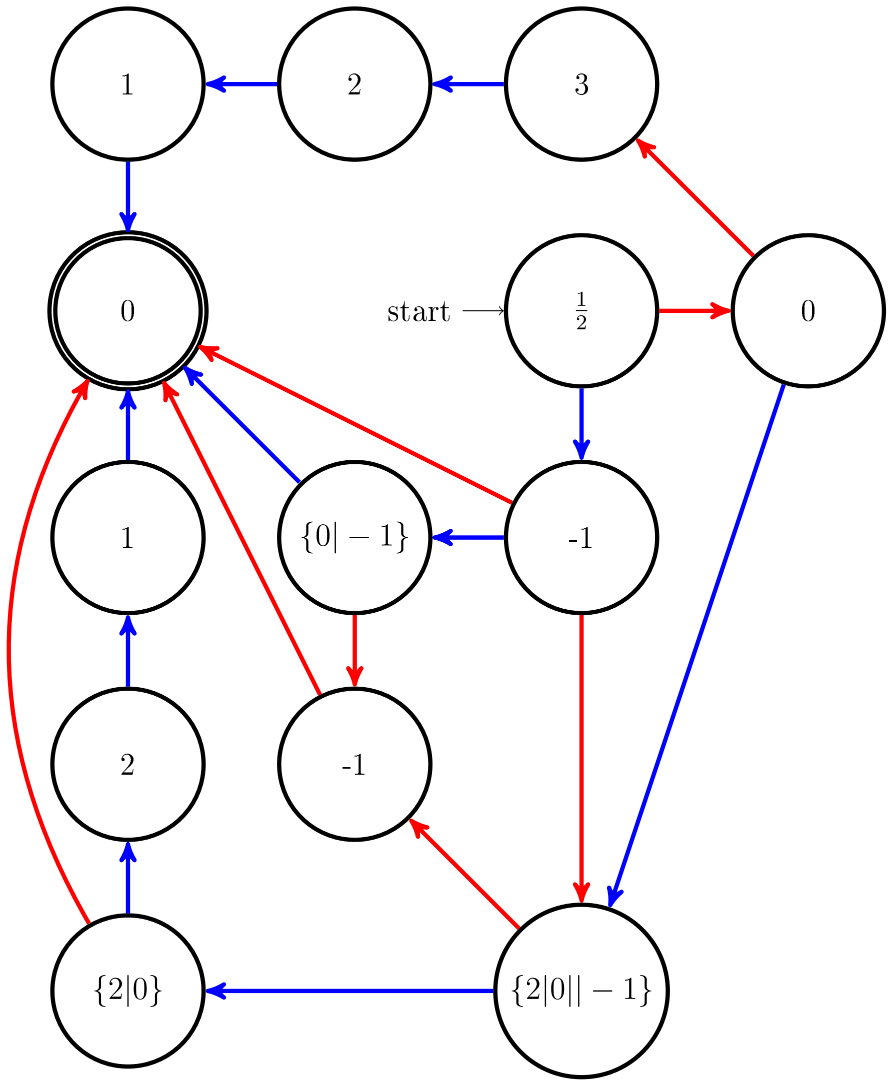
puis



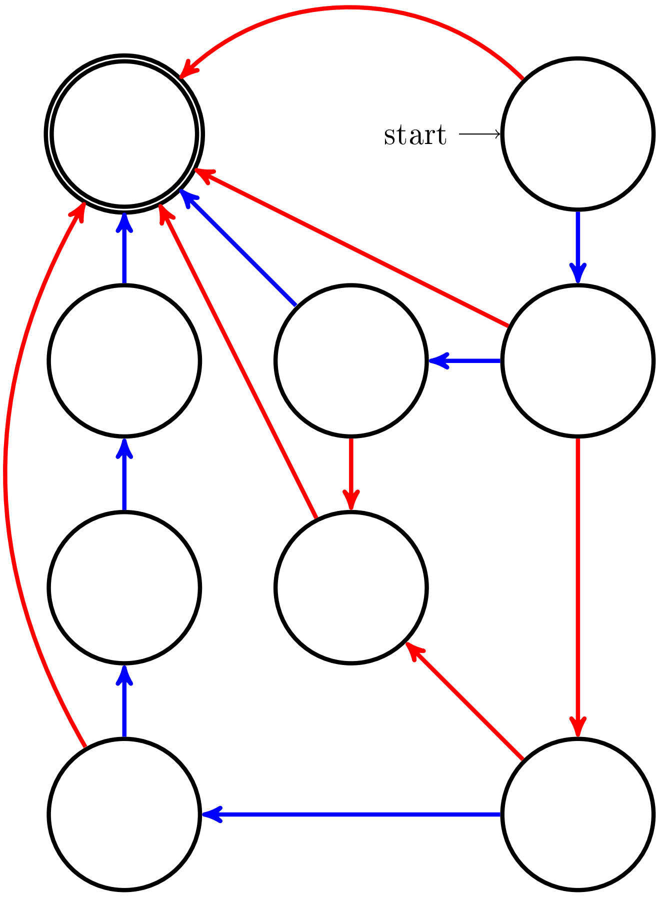
ensuite



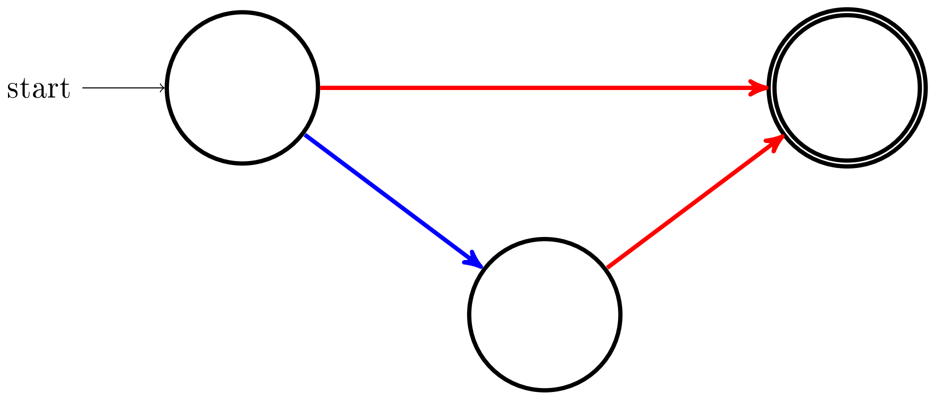
enfin



Remarques :
Maintenant qu'on sait que le sommet tout à droite vaut 0, on peut simplifier le graphe en



Comme on a calculé le jeu, et vu qu'il est égal à $-\frac{1}{2}$, on en déduit une version plus simple de ce graphe :



0.5 Plateau du jeu

Pour jouer avec un pion :