Méthode de Héron pour extraire une racine carrée
Une explication géométrique possible

André Seguin

Le texte qui suit justifie la méthode de Héron pour extraire une racine carrée par la géométrie élémentaire. Le théorème de Thalès ainsi que les notions de moyenne proportionnelle, de médiatrice d'un segment et de partition du plan qui en découle, permettent de mettre en évidence et de comprendre l'algorithme utilisé par Héron. Nous expliquons également pourquoi le but recherché par celui-ci est finalement atteint.

Bien avant Héron, les Babyloniens savaient déjà approcher une racine carrée comme le prouve la tablette ci-dessous de la collection Yale, qui montre une approximation de $\sqrt{(2)}$.

1,41422

Dans ses *Métriques*, Héron est le premier à décrire le processus à suivre pour obtenir une approximation d'une racine carrée, créant ainsi l'un des premiers algorithmes de l'histoire.

Puisque 720 n'a pas de côté rationnel, nous extrairons le côté avec une très petite différence de la façon suivante. Comme le premier nombre carré plus grand que 720 est 729 qui a pour côté 27, divise 720 par 27 ; cela fait 26 et 2/3 ; ajoute 27, cela fait 53 2/3 ; prends-en la moitié, cela fait 26 1/2 1/3 multiplié par lui-même donne 720 1/36 , de sorte que la différence (sur les carrés) est 1/36. Si nous voulons rendre cette différence inférieure encore à 1/36 , nous mettrons 720 1/36 trouvé tout à l'heure à la place de 729 et en procédant de la même façon...[1]

1 Le texte provient du livre dirigé par J.-L. Chabert, *Histoire d'algorithmes*, Belin.

Héron propose des approximations successives de la racine carrée de 720 que l'on peut traduire aujourd'hui avec le langage des suites par la formule $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$, avec $a=720$ et $x_0=27$. Il ne met pas vraiment l'accent sur les termes $x_0, x_1, \ldots$ eux-mêmes, comme il le laissait supposer « *nous extrairons le côté* », mais parle plutôt de carrés d'aires respectives $a=720,\quad x_0^2=729,\quad x_1^2=720\frac{1}{36}$ « *prends-en la moitié, cela fait 26 1/2 1/3 multiplié par lui-même donne 720 1/36* ». Il constate alors que les différences (« *sur les carrés* ») avec l'aire a deviennent de plus en plus petites.

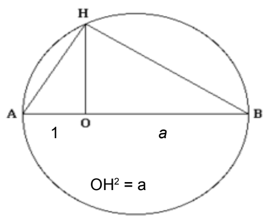
Cependant, ce faisant, il compare implicitement les nombres $x_0, x_1, \ldots$ à $\sqrt{(a)}$ et montre qu'il obtient des valeurs approchées par excès de plus en plus proches (ce qui d'ailleurs ne suffit pas pour montrer que la limite est bien $\sqrt{(720)}$, mais...).

En lisant le texte, on remarque que Héron se contente d'énoncer les étapes d'un calcul (fais ceci, fais cela), puis il constate que la différence sur les carrés est petite et peut même l'être encore plus en recommençant.

Pourquoi effectuer cette suite d'opérations, pourquoi cette formule ? On ne le sait pas ! On est un peu comme face à un programme d'ordinateur écrit sans le moindre commentaire.

Une explication géométrique

D'après Jean Dieudonné[2], la construction de la moyenne proportionnelle figure dans le Livre VI des *Éléments* d'Euclide.



Dans le triangle AHB rectangle en H, OH est la hauteur, OA = 1 et OB = a. On a la relation $OH^2 = OA.OB = a$. Ainsi OH = $\sqrt{(a)}$.

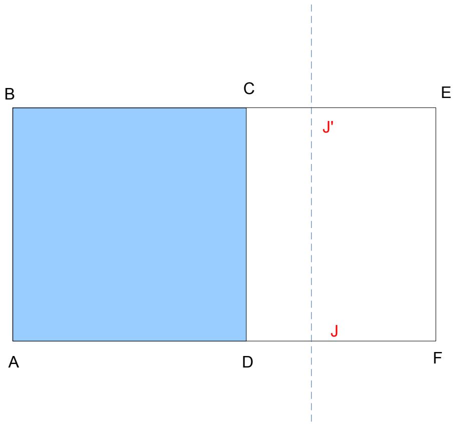
Aussi du point de vue géométrique la construction d'un carré d'aire donnée a (nombre rationnel) ne pose-t-elle pas de problème.

L'idée consiste alors à partir d'un carré ADCB d'aire a (720 par exemple) et d'augmenter l'une des deux dimensions afin d'obtenir un rectangle AFEB dont l'aire est plus grande, mais dont la longueur du côté AF est un rationnel k (27 par exemple). Puis de diminuer le surplus d'aire correspondant au rectangle DFEC afin d'obtenir un nouveau rectangle AJJ'B d'aire plus petite et dont la longueur du côté AJ est un nombre rationnel.

Le processus peut alors se répéter à l'identique, le rectangle AJJ'B se substituant au rectangle AFEB.

2 J. Dieudonné, *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette.

figure 1

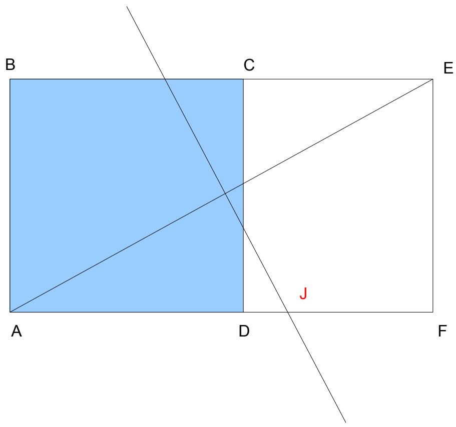


On réduit l'aire en coupant le surplus en suivant les pointillés à partir d'un point J du segment DF. On obtient un nouveau rectangle AJJ'B

La tentative très simple qui vient en premier à l'esprit et qui consiste à partager le surplus d'aire en deux pour en éliminer la moitié malheureusement échoue. Car si la construction géométrique du milieu I du segment DF afin de réaliser ce partage ne pose pas de problème, la longueur AI du côté du rectangle obtenu $\frac{\sqrt{(a)}+k}{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Le problème revient donc à construire géométriquement un point J du segment DF tel que la longueur AJ soit rationnelle. La médiatrice du segment AE vient à notre secours !

figure 2



Encore faut-il montrer qu'elle coupe le segment DF.

La médiatrice du segment AE, qui est l'ensemble des points équidistants de A et de E, partage le plan en deux demi-plans :

- le demi-plan constitué des points plus proches du point A que du point E,
- le demi-plan constitué des points plus proches du point E que du point A.

Nous allons montrer que les points D et F sont dans des demi-plans différents.

En effet, FA = FD + DA et, comme FE = DA, FE < FA, donc le point F est plus près du point E que du point A.

Par ailleurs, dans le triangle rectangle DEF, l'hypoténuse DE est plus grande que le coté FE, donc FE < DE. Comme FE = DA, on en déduit que DA < DE et que le point D est plus près du point A que du point E.

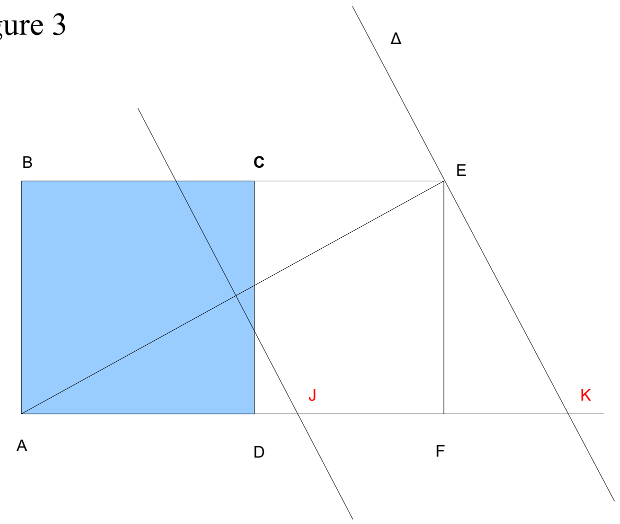
Ainsi les deux points D et F sont de part et d'autre de la médiatrice du segment AE et celle-ci coupe le segment DF en un point J.

Comment évaluer la longueur AJ ?

Il suffit de tracer la droite Δ parallèle à la médiatrice passant par le point E. Comme on a déjà montré que la droite AF est sécante à la médiatrice au point J, la droite AF est sécante à Δ au point K. (*Si deux droites sont parallèles, toute droite sécante à l'une est sécante à l'autre.*)

On obtient la figure suivante :

figure 3



En appliquant le théorème de Thalès, on prouve que J est le milieu de AK, donc AJ = $\frac{1}{2}$ AK. Pour évaluer AK on écrit : AK =AF + FK = k + FK.

Dans le triangle rectangle AEK, FE est la moyenne géométrique de FA et FK, autrement dit on a la relation

$$a = \mathrm{FE}^2 = \mathrm{FA.FK} = k.\mathrm{FK},$$

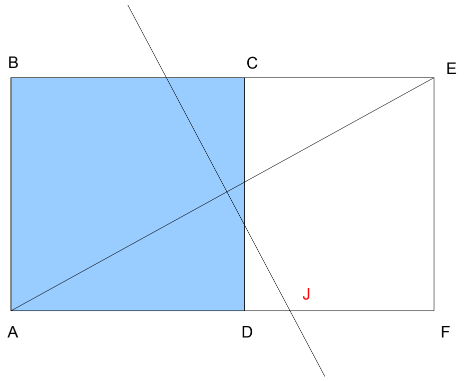
ce qui donne FK = $\frac{a}{k}$, AK = $k+\frac{a}{k}$ et finalement AJ = $\frac{1}{2}(k+\frac{a}{k})$, c'est-à-dire la formule utilisée par Héron.

a et k étant rationnels, AJ est également rationnel et le rectangle AJJ'B peut se substituer au rectangle AFEB pour obtenir une meilleure approximation – c'est l'idée novatrice de Héron.

Remarquons que l'inégalité $\sqrt{(a)}<\frac{1}{2}(k+\frac{a}{k})<k$, que Héron évite en comparant les carrés, s'obtient de façon purement géométrique : AD < AJ < AF.

Nous allons terminer en établissant la convergence vers $\sqrt{(a)}$ qui découle du fait que le point J est plus près du point D que du point F.

Revenons à la figure 2



Nous allons démontrer que JD < JF.

En géométrie euclidienne, le plus court chemin entre deux points est la ligne droite :
JE < JF + FE (inégalité triangulaire).

Par ailleurs JA = JE, car J est sur la médiatrice du segment AE. Comme JA = JD + DA, on en déduit que JD + DA < JF + FE c'est-à-dire que JD < JF, car DA = FE.

Ainsi le point J est-il plus près du point D que du point F.

Plus de la moitié du surplus d'aire est donc éliminé, ce qui explique le passage « *nous trouverons que la différence sur les carrés est beaucoup plus petite que 1/36* » dans le texte de Héron.

Le nombre $\frac{aire(DFEC)}{2^n}$ qui majore le surplus d'aire à l'étape n, tend vers 0 quand n devient grand, ce qui prouve la convergence vers $\sqrt{(a)}$.

Pour programmer l'algorithme, on peut consulter l'article d'Alain Busser sur le site de l'IREM de la Réunion :

Héron, et ronds, petits patapons
http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article444