Chapitre I

Calcul matriciel

Introduction

A titre d'exemple

1. Soient a et b deux nombres réels tel que $a \neq 0$.

   Pour résoudre l'équation $ax = b$, il suffit de multiplier à gauche et à droite du symbole d'égalité « = » par l'inverse de a noté a^{-1} ; cela est possible car a est différent de 0 et donc a^{-1} existe.

$$\begin{array}{rcll} ax & = & b & \\ a^{-1}ax & = & a^{-1}b & \\ x & = & a^{-1}b & \qquad\qquad (\text{car } a^{-1}a = 1) \end{array}$$

2. On considère le système $\left\{\begin{array}{l} 5x + 2y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{array}\right.$; on peut dire que ce système est une équation dont l'inconnue est le vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Comme dans le **1.**, on souhaite résoudre cette équation à l'aide d'une multiplication.

   Notons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ (B est aussi égale à $\begin{pmatrix} 5x + 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}$) ; ces objets sont appelés matrices :

   - A est une matrice de format $(2; 2)$ (2 lignes et 2 colonnes) ;
   - B et X sont des matrices de format $(2; 1)$ (2 lignes et 1 colonne).

   On peut écrire le système sous la forme de l'équation $\mathrm{A} \times X = \mathrm{B}$ (« A multiplié par X égale B ») en définissant une multiplication sur les matrices de façon à avoir :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}.$$

   Voici comment s'effectue cette multiplication :

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ & & \vdots \\ \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ & \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} ---- \\ \\ ---- \end{array} & \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad & \\ & \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

Résoudre l'équation matricielle $\mathrm{A} \times X = \mathrm{B}$ nécessite de savoir si la matrice A est inversible et le cas échéant, de multiplier de part et d'autre du symbole de l'égalité les deux membres par A^{-1}. Les conditions de l'inversibilité d'une matrice seront étudiées ultérieurement ainsi que la résolution de l'équation matricielle $\mathrm{A} \times X = \mathrm{B}$.

1. Notion de matrice

Définition 1

n et p sont deux entiers naturels non nuls.
On appelle **matrice de format $(\mathbf{n}, \mathbf{p})$** un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes.
Ces nombres sont les **coefficients** de la matrice.

La matrice M ci-contre peut être notée $M = (a_{ij})$ où a_{ij} désigne le coefficient situé à la $i-$ième ligne et la $j-$ième colonne.
On appelle a_{ij} coefficient $(i; j)$.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

- Lorsque $p = 1$, on dit que M est une **matrice colonne** : $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$.
- Lorsque $n = 1$, on dit que M est une **matrice ligne** : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix}$.
- Lorsque $n = p$, on dit que M est une **matrice carrée d'ordre n** : $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.
- Une matrice carrée A est une **matrice diagonale** si, et seulement si, les coefficients situés hors de la première diagonale « haut gauche - bas droit » (les coefficients a_{ij} avec $i \neq j$) sont tous nuls.

  Exemples de matrices diagonales : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Recherche

Exercice 1 : Pour chacune des matrices ci-dessous : donner le format puis, en cas d'existence, les coefficients (1 ;2) ; (2 ;1) ; (2 ;2) ; (1 ;3) ; (2 ;3).

A= $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 10 \\ 5 & 8 & -9 \end{pmatrix}$ C= $\begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ D= $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ E= $\begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ F= $\begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix}$

2. Opérations sur les matrices

a) Égalité de deux matrices

Définition 2

Deux matrices A et B de même format $(n; p)$ sont égales si, et seulement si : pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $1 \leq j \leq p$, $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemple :

On considère les deux matrices colonnes M et N définies par : $M = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
.
$M = N$ équivaut au système : $\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 1 \\ -x & + & 2y & = & -2 \end{array} \right.$

Recherche 1

Soient E et F deux matrices définies par : $E=\begin{pmatrix} a+b & 2a & -1 \\ -3 & 3a+b & a^2 \end{pmatrix}$ et $F=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -b+1 \\ a-b & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les conditions sur les nombres a et b pour que $E=F$.

$$E=F \iff \left\{\begin{array}{lcrl} a+b & = & 1 & L_1 \\ 2a & = & -2 & L_2 \\ -1 & = & -b+1 & L_3 \\ -3 & = & a-b & L_4 \\ 3a+b & = & -1 & L_5 \\ a^2 & = & 1 & L_6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcrl} a+b & = & 1 & L_1 \\ 2a & = & -2 & L_2 \\ -b+1 & = & -1 & L_3 \\ a-b & = & -3 & L_4 \\ 3a+b & = & -1 & L_5 \\ a^2 & = & 1 & L_6 \end{array}\right.$$

La ligne L_2 donne $a=-1$. Par substitution dans L_1, on trouve $b=1-(-1)=2$.
Vérifions que $a=-1$ et $b=2$ vérifient toutes les lignes du système :
Dans L_3 : $-b+1=-2+1=-1$ ✓
Dans L_4 : $a-b=-1-2=-3$ ✓
Dans L_5 : $3a+b=-3+2=-1$ ✓
Dans L_6 : $a^2=(-1)^2=1$ ✓.
Les matrices E et F sont égales si, et seulement si $a=-1$ et $b=2$.

b) Multiplication par un réel

Définition 3

Soit M une matrice, et soit a un réel.
aM est la matrice définie ainsi : les coefficients $(i;j)$ de aM sont les coefficients $(i;j)$ de M multipliés par a.

Exemple 1 :

Le produit de la matrice $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ par le nombre 2 est la matrice :

$$P=2.A=\begin{pmatrix} 2\times 5 & 2\times 2 & 2\times(-1) \\ 2\times(-4) & 2\times 0 & 2\times 5 \\ 2\times 2 & 2\times 1 & 2\times 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -8 & 0 & 10 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 : Réciproquement

$$E=\begin{pmatrix} -20 & 0 & -15 \\ -40 & 0 & 25 \\ 0 & 50 & -45 \end{pmatrix}=-5\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & -5 \\ 0 & -10 & 9 \end{pmatrix}$$

Recherche

Exercice 2 : On donne les matrices suivantes

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -7 & 10 \\ 5 & 8 & -9 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};\quad E=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix};\quad F=\begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrire les matrices $2A$, $\frac{1}{4}B$, $-\frac{3}{2}C$, $5D$, $-E$, $0F$.

c) Multiplication de matrices

Définition 4

Cas général :

- Soient A une matrice de format $(n;p)$ et B une matrice de format $(r;s)$.
  Si $p=r$, c'est-à-dire si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B, alors on peut définir le produit de A par B.
- Soient A une matrice de format $(n;p)$ et B une matrice de format $(p;s)$.
  Notons $C=A\times B$: les coefficients c_{ij} de C sont définis ainsi :

$$\boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}.}$$

- Soient A une matrice de format $(n;p)$ et B une matrice de format $(p;s)$.
  Notons $C=A\times B$: la matrice C est de format $(n;s)$.

Technique pour multiplier deux matrices

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}5&6&0\\7&8&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\color{red}{19}&22&2\\43&50&4\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\underbrace{c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}}_{1\times5+2\times7=5+14=19}$$

Par exemple, si on multiplie une matrice A de format $(3,2)$ par une matrice B de format $(2,3)$ on obtient une matrice P de format $(3,3)$, alors que le produit $D=B\times A$ est une matrice de format $(2,2)$.

A titre d'exemple ▶ Etude de quelques cas

Cas $(2,2)\times(2,2)$: calcul de $A\times M$

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \text{ et } M=\begin{pmatrix}x&u\\y&v\end{pmatrix} : \quad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}x&\quad&u\\y&&v\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a&b\\ \\c&d\end{pmatrix} & \end{array}$$

Cas $(1,2)\times(2,1)$: calcul de $A\times M$

$$A=\begin{pmatrix}a&b\end{pmatrix} \text{ et } M=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} : \quad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a&b\end{pmatrix} & \end{array}$$

Cas $(1,2)\times(2,2)$: calcul de $A\times M$

$$A=\begin{pmatrix}a&b\end{pmatrix} \text{ et } M=\begin{pmatrix}x&u\\y&v\end{pmatrix} : \quad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}x&\quad&u\\y&&v\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a&b\end{pmatrix} & \end{array}$$

Développer les automatismes avec Labomep/wim's

Exercice 3 : Calcul du produit d'une matrice 2×2 par une matrice colonne ou ligne.
Exercice 4 : Calcul du produit d'une matrice 3×3 par une matrice colonne ou ligne.
Exercice 5 : Calcul du produit de deux matrices 2×2.
Exercice 6 : Calcul du produit de deux matrices 3×3.

Exercice 3 **Exercice 4** **Exercice 5**

Recherche

Exercice 6 : On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$;
$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer (si possible) $A \times D$; $C \times B$; $C \times F$; $A \times B$; $B \times A$; $E \times F$; $F \times E$; $C \times D$.

A titre d'exemple

- Dans l'exercice précédent, on constate que $A \times B \neq B \times A$; on dit que le produit matriciel n'est pas **commutatif** ; cependant il existe des matrices qui commutent, c'est-à-dire des matrices A et B telles que $A \times B = B \times A$, par exemple $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- Pour toutes matrices A, B et C telles que le produit $(A \times B) \times C$ existe, on a :

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) \text{ ; on note } A \times B \times C \text{ ce produit.}$$

On dit que le produit matriciel est **associatif**.

d) Somme de matrices

Définition 5

La somme de deux matrices A et B de même format est une matrice C de même format dont les coefficients c_{ij} sont la somme des coefficients a_{ij} et b_{ij} pour tous les couples (i, j).

$$\text{Ainsi : } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

A titre d'exemple

La somme des matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice :

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -7 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+0 & 2-7 & -1+0 \\ -4+4 & 0+2 & 5+1 \\ 2+1 & 1-3 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Recherche

Exercice 7 : Calculer la somme des deux matrices A et B.

On donne : $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -9 \\ 2 & -3 & 13 \end{pmatrix}$

Propriété 1

Soit A, B et C trois matrices de même format. Alors on a :

- $A + B = B + A$: on dit que la somme de matrices est **commutative** ;
- $(A + B) + C = A + (B + C)$: on dit que la somme de matrices est **associative** ;
- Soient B et C deux matrices de format $(p; s)$, et A une matrice de format $(n; p)$. Alors on a :

  $$A \times (B + C) = A \times B + A \times C.$$

  On dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Définition 6

Une matrice nulle est une matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0.
La somme d'une matrice A et de la matrice nulle de même format est égale à A.

Recherche

Exercice 8 : Une personne possède deux magasins de jouets. Avant Noël, les stocks du magasin A (colonne 1) et du magasin B (colonne 2) de consoles PS Vita (ligne 1) et 3DS (ligne 2) sont donnés par la matrice : $S = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Le propriétaire décide d'augmenter de 50% chaque stock.
   Donner, en fonction de S, la nouvelle matrice des stocks.
2. Après réflexion, le propriétaire décide d'augmenter d'une dizaine d'unités pour chaque type de console le stock de chacun des magasins.
   Traduire cette décision à l'aide d'une opération sur les matrices.

Exercice 9 : Soit x un réel.

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{e}^x + 3}{\mathrm{e}^x} & \dfrac{4}{\mathrm{e}^x} \\ \dfrac{5}{\mathrm{e}^x} & \dfrac{\mathrm{e}^x + 6}{\mathrm{e}^x} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A peut s'écrire sous la forme $A = sI_2 + tB$, où s et t sont des réels à déterminer.

Exercice 10 : x et y sont deux nombres réels. On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Déterminer les réels x et y tels que $A \times X = B$

e) Puissance d'une matrice carrée

Définition 7 ▶ Matrice Identité

- On appelle **matrice identité** (ou **matrice unité**), la matrice diagonale d'ordre n dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1, tous les autres coefficients étant nuls. Elle est notée I_n.

$$\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Pour toute matrice carrée A d'ordre n, $A \times \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n \times A = A$.
- Pour toute matrice B de format (p, n), $B \times I_n = B$.
- Pour toute matrice B de format (n, p), $I_n \times B = B$.
- **A retenir :** Si on peut multiplier une matrice A par une matrice identité, alors le produit est égal à A.

Définition 8

Soit A une matrice carrée d'ordre p et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. La **puissance n-ième** de la matrice A est la matrice carrée d'ordre p obtenue en multipliant la matrice A par elle-même n fois :

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ fois}}.$$

Par convention $A^0 = I_p$ et $A^1 = A$.

Exemple

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ alors } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\text{et } A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Propriété 2 ▶ Puissances des matrices diagonales

Dans le seul cas des matrices diagonales, on a :

- Dans le cas des matrices diagonales d'ordre 2 :
  Soient deux nombres réels a et b.
  Si $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, alors pour tout entier naturel n non nul on a : $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

- Dans le cas des matrices diagonales d'ordre 3 :
  Soient trois nombres réels a, b et c.
  Si $D = \begin{pmatrix} a & & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, alors pour tout entier naturel n non nul on a : $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$.

f) Inverse d'une matrice carrée

Recherche

Exercice 11 : Reprenons l'introduction de ce chapitre : A $= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; B $= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et X $= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
On veut résoudre l'équation $A \times X = B$.

- Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; calculer $C \times A$.
- Calculer $(C \times A) \times X$.
- Résoudre le système.

Définition 9 ▶ Matrice inversible

On ne s'intéresse ici qu'à des matrices carrées d'ordre n.
Une matrice A est inversible si, et seulement s'il existe une matrice B telle que $A \times B = \mathrm{I}_n$. Dans ce cas, la matrice B est l'unique matrice à vérifier cette égalité, est appelée **matrice inverse de A**, notée A^{-1}, et commute avec A :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = \mathrm{I}_n.$$

A titre d'exemple

La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Recherche

On donne $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 24 & -9 \\ -15 & 6 \end{pmatrix}$.
Calculer $A \times B$ et $B \times A$. En déduire que A est inversible. Déterminer A^{-1}.

Propriété 3

On ne s'intéresse ici qu'à des matrices carrées d'ordre 2.

- Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; le déterminant de A est défini par :

$$\det A = ad - bc.$$

- La matrice A est inversible si, et seulement si $detA \neq 0$; dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Développer les automatismes avec Labomep/wim's

Exercice 12 : Inverse d'une matrice 2×2.
Exercice 13 : Résolution d'un système de 3 équations et 3 inconnues dont la solution est unique.

Exercice 12 Exercice 13

Recherche

Exercice 14 :

1. Déterminer si les matrices ci-dessous sont inversibles ; si oui, donner leur matrice inverse.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} ; \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} ; \mathrm{C} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Résoudre les systèmes $\left\{\begin{array}{l} -2x - 3y = 1 \\ 3x + 4y = 5 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} 2x + 4y = 0 \\ -3x + 5y = 11 \end{array}\right.$.

Exercice 15 : On s'intéresse au système $\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 6x + 7y + 8z = 9 \\ 12x + 11y + 13z = 14 \end{array}\right.$.
Ecrire matriciellement ce système , c'est-à-dire donner les matrices A et B telles que ce ce système soit équivalent à

l'égalité de matrices $AX = B$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, puis le résoudre à l'aide du calcul matriciel (on pourra s'aider de la calculatrice pour les calculs).

Exercice 16 : On considère le système $\begin{cases} 5x + 4y = a \\ 10x + 7y = b \end{cases}$.

1. A l'aide d'une résolution matricielle, exprimer x et y en fonction de a et b.
2. Dans un repère du plan, deux droites (d) et (d') ont pour équations cartésiennes respectives $20x + 16y = 7$ et $10x + 7y = 15$.
   Déduire de la question précédente les coordonnées de leur point d'intersection.

3. Matrices diagonales

Définition 10 ► Rappels

Pour toute matrice carrée M et pour tout entier naturel k non nul,

$$M^k = \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{k \text{ fois}}.$$

Par définition, une matrice à la puissance 0 est égale à la matrice unité I.

Propriété 4 ► Puissance d'une matrice diagonale

Soit D une matrice diagonale d'ordre n : $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$D^k = \begin{pmatrix} {d_1}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {d_2}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {d_n}^k \end{pmatrix}$$

A titre d'exemple

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B^3 = \begin{pmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B^0 = I_3$.

Propriété 5 ► matrice diagonalisée

Soit M une matrice carrée, P une matrice inversible et D une matrice diagonale telle que $M = P \times D \times P^{-1}$ (on dit que M a été diagonalisée).
Alors pour tout entier naturel n,

$$M^n = P \times D^n \times P^{-1}.$$

Démonstration :

....
....
....
....

A titre d'exemple

Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ les suites définies par :

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ b_1 = 2 \end{array}\right. \quad \text{et pour tout entier } n \geqslant 2\ , \ \left\{\begin{array}{l} a_n = \frac{5}{2}a_{n-1} - \frac{3}{2}b_{n-1} \\ b_n = -\frac{3}{2}a_{n-1} + \frac{5}{2}b_{n-1} \end{array}\right.$$

1. Calculer a_2 et b_2.
2. Déterminer la matrice M telle que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
3. Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; montrer que Q est inversible, et calculer $Q \times D \times Q^{-1}$; que peut-on dire de cette matrice ?
4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer la matrice M^n.
5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer a_n en fonction de n, puis b_n en fonction de n.

1.

$$\begin{cases} a_2 = \frac{5}{2} \times a_1 - \frac{3}{2} \times b_1 = \frac{5}{2} \times 1 - \frac{3}{2} \times 2 = -\frac{1}{2} \\ b_2 = -\frac{3}{2}a_1 + \frac{5}{2}b_1 = -\frac{3}{2} \times 1 + \frac{5}{2} \times 2 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

2. Notons $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice M ; le produit $M \times \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ s'obtient ainsi :

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \\ & & \vdots \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{matrix} ---- \\ ---- \end{matrix} & \begin{pmatrix} a \times a_{n-1} + b \times b_{n-1} \\ c \times a_{n-1} + d \times b_{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

, et est égal à $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, donc à $\begin{pmatrix} \frac{5}{2}a_{n-1} - \frac{3}{2}b_{n-1} \\ -\frac{3}{2}a_{n-1} + \frac{5}{2}b_{n-1} \end{pmatrix}$.

$$\text{Donc } M = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

3. $\det Q = 1 \times 1 - 1 \times (-1) = 2 \neq 0$, donc Q est inversible et $Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -(-1) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Calcul de $Q \times D$:

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ & & \vdots \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} ---- \\ ---- \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times 0 & 1 \times 0 + (-1) \times 4 \\ 1 \times 1 + 1 \times 0 & 1 \times 0 + 1 \times 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

, donc $Q \times D = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Calcul de $(Q \times D) \times Q^{-1}$:

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ & & \vdots \\ \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} ---- \\ ---- \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 \times \frac{1}{2} + (-4) \times \left(-\frac{1}{2}\right) & 1 \times \frac{1}{2} + (-4) \times \frac{1}{2} \\ 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) & 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

donc $Q \times D \times Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

$$\text{On a montré que } Q \times D \times Q^{-1} = M.$$

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathrm{P}(n)$ la propriété : « $M^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$ ».
   - Initialisation : elle est vérifiée à la question précédente.
   - Hérédité : Soit $n \geqslant 1$; supposons que $\mathrm{P}(n)$ est vraie ; montrons que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $M^{n+1} = Q \times D^{n+1} \times Q^{-1}$:
     $M^{n+1} = M^n \times M = (Q \times D^n \times Q^{-1}) \times (Q \times D \times Q^{-1}) = Q \times D^n \times (Q^{-1} \times Q) \times D \times Q^{-1}$ $M^{n+1} = Q \times D^n \times I_2 \times D \times Q^{-1} = Q \times D^n \times D \times Q^{-1} = Q \times D^{n+1} \times Q^{-1}$.
   - *Conclusion :* Pour tout entier $n \geqslant 1$, $M^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

D étant une matrice diagonale, pour tout entier $n \geqslant 1$, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

Calcul de $Q \times D^n$:

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} ---- \\ ---- \end{array} & \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times 0 & 1 \times 0 + (-1) \times 4^n \\ 1 \times 1 + 1 \times 0 & 1 \times 0 + 1 \times 4^n \end{pmatrix} \end{array}$$

, donc $Q \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & -4^n \\ 1 & 4^n \end{pmatrix}$.

Calcul de $(Q \times D^n) \times Q^{-1}$:

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -4^n \\ 1 & 4^n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} ---- \\ ---- \end{array} & \begin{pmatrix} 1 \times \frac{1}{2} + (-4^n) \times \left(-\frac{1}{2}\right) & 1 \times \frac{1}{2} + (-4^n) \times \frac{1}{2} \\ 1 \times \frac{1}{2} + 4^n \times \left(-\frac{1}{2}\right) & 1 \times \frac{1}{2} + 4^n \times \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

,

donc $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 4^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 4^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 4^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 4^n \end{pmatrix}$.

5. *On utilise ici une propriété similaire à celle donnant l'expression explicite d'une suite géométrique :* $u_n = u_0 \times q^n$ *;* $u_{n-1} = u_0 \times q^{n-1}$ *; etc...*

   Comme $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$, pour passer de $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, on effectue $(n-1)$ multiplications par M.

   $$\text{Donc } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

   Calcul de $M^{n-1} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$:

   $$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 4^{n-1} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 4^{n-1} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 4^{n-1} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 4^{n-1} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} ---- \\ ---- \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 4^{n-1} + 1 - 4^{n-1} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 4^{n-1} + 1 + 4^{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

   On a, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\begin{cases} a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times 4^{n-1} \\ b_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times 4^{n-1} \end{cases}$.

Recherche

Exercice 17 : Soient $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(v_n)_{n \geqslant 0}$ les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ v_0 = -2 \end{cases} \text{ et pour } n \in \mathbb{N} \text{ , } \begin{cases} u_{n+1} = 22u_n + 10v_n \\ v_{n+1} = -50u_n - 23v_n \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1.
2. Déterminer la matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} & v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix} \times A$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; montrer que P est inversible, et calculer P^{-1}.
4. Calculer $P^{-1} \times A \times P$; que peut-on dire de cette matrice ?
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la matrice A^n.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n, puis v_n en fonction de n.

Exercice 18 : On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.
L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant,
- chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année $(2013 + n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n.
2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$.

   On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et $Y = AX$.

   Déterminer, en fonction de a et b, les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n,
$X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer PQ et QP. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.
   b) Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
   c) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Démontrer l'égalité ci-dessous :

$$v_n = \frac{1}{6}\left(1 + 5 \times 0,94^n\right) v_0 + \frac{1}{6}\left(1 - 0,94^n\right) c_0.$$

   Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?