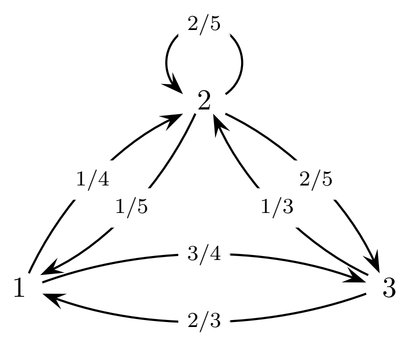
Chapitre X

Marches aléatoires : études asymptotiques de processus discrets

1. Étude d'un exemple

Soit l'expérience aléatoire qui consiste à se trouver sur l'un des sommets numérotés 1, 2 et 3 du graphe ci-dessous à une étape n.
Le passage d'une étape n à une étape $(n+1)$ consiste à se déplacer de sommet en sommet sur le graphe en suivant les arêtes orientées ; les probabilités de se trouver sur le sommet extrémité **sachant que** l'on est parti du sommet origine sont indiquées sur le schéma du graphe.
Les probabilités indiquées sont **des probabilités conditionnelles**.
Par exemple, on lit que la probabilité de se trouver au sommet 3 sachant que l'on est parti du sommet 2 est égale à 2/5.



On appelle X_n la variable aléatoire qui prend à l'étape n un des états de l'ensemble $\{1,2,3\}$. Autrement dit, X_n est la variable aléatoire qui prend la valeur d'un des sommets 1,2 ou 3 du graphe à l'étape n. La variable aléatoire suit la loi de probabilité définie par le tableau ci-dessous :

k	1	2	3
$P(X_n = k)$	$a_n = P(X_n = 1)$	$b_n = P(X_n = 2)$	$c_n = P(X_n = 3)$

Lorsque n décrit $\mathbb{N}$, on obtient une suite $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires qui prend les différents possibles de l'ensemble $\{1,2,3\}$. Cette suite $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **marche aléatoire** sur $\{1,2,3\}$.

Dans ce type de configuration, quel que soit le parcours déjà effectué sur le graphe, l'événement « arriver au somment j à partir du sommet i » est un événement indépendant de tous les événements qui ont précédé. C'est pourquoi, les probabilités indiquées sur le graphe sont toujours les mêmes quelque soit l'étape n à laquelle on se

trouve. La probabilité qui permet de passer d'un sommet i à l'étape n à un sommet j à l'étape $(n+1)$ se note $p_{i,j}$ et vaut $P_{X_{n=i}}(X_{n+1}=j)$. On parle de **probabilité de transition** d'un sommet à l'autre ou probabilité de passage de l'état i à l'état j en une étape. **Cette probabilité est une probabilité conditionnelle**.
La matrice de transition de la marche aléatoire est la matrice dont le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j est $p_{i,j}$. Cette matrice de transition permet le passage de l'étape n à l'étape $(n+1)$.

- Tous les coefficients de la matrice sont des probabilités, donc, pour tout réel i et pour tout réel j : $0 \leqslant p_{i,j} \leqslant 1$.
- La somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$

Recherche ▶ Retour à l'exemple

Exercice 1

1. Déterminer la matrice de transition M de la marche sur $\{1, 2, 3\}$.

$$M = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

   La matrice de transition obtenue est une matrice de transition d'une marche aléatoire à trois états. On appelle U_n la matrice ligne associée à la marche aléatoire à l'instant n. Elle donne les probabilités d'arrivée en chaque sommet après n étapes. On donne $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On admet que, pour tout entier naturel n, que $U_{n+1} = U_n M$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $U_n = U_0 M^n$.
3. A quoi correspond U_2 ? Calculer U_2.
4. Quelle est la probabilité de se trouver au sommet 1 du graphe à l'étape 5 ?

2. Généralités

Définition 1

- **Une marche aléatoire** sur l'ensemble des états $\mathcal{E} = \{1, 2, \cdots, N\}$ (les valeurs de $\mathcal{E}$ sont les sommets du graphe) est **une suite de variables aléatoires** (X_n), le nombre n décrivant le nombre d'étapes réalisées.

- La loi de probabilité de X_n qui donne la probabilité de chaque état à l'étape n, est appelée l'état probabiliste à l'étape n.
  On note U_n la matrice ligne : $U_n = \Big(P(X_n = 1), P(X_n = 2), \ldots\ldots, P(X_n = N)\Big)$.

Sommets	k	1	...	N
Etape 1	$P(X_1 = k)$	$P(X_1 = 1)$	....	$P(X_1 = N)$
	$\vdots$	$\vdots$	....	$\vdots$
Etape n	$P(X_n = k)$	$P(X_n = 1)$	....	$P(X_n = N)$
Etape $n+1$	$P(X_{n+1} = k)$	$P(X_{n+1} = 1)$	....	$P(X_{n+1} = N)$

- Cette suite de matrice (U_n) décrit l'évolution du système.
- La probabilité de passage ou de transition de l'état i à l'état j en une étape (ou transition) est la probabilité $P_{\ X_n=i}\ (X_{n+1} = j)$, noté $p_{i,j}$.
- La matrice dont le coefficient situé sur la $i$ème ligne et la $j$ème colonne est $p_{i,j}$ est la matrice de transition de la marche aléatoire ; elle permet le passage de l'état probabiliste U_n à l'étape n à l'état probabiliste U_{n+1} à l'étape $(n+1)$.

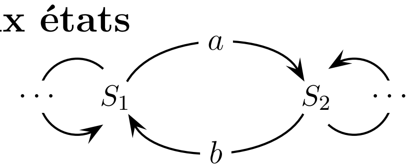
Propriété 1

1. Les coefficients d'une matrice aléatoire sont compris entre 0 et 1 : $0 \leqslant p_{i,j} \leqslant 1$.
2. La somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$

<u>Graphe associé à une matrice de transition</u> :

A toute marche aléatoire, on peut associer un graphe. Ce graphe est construit de la manière suivante : les états sont représentés par des points qui sont les sommets du graphe. Sur chaque arête orienté qui permet de passer de l'état i à l'état j, on note la probabilité $p_{i,j}$.

3. Marche aléatoire à deux états



Propriété 2

Toute matrice de transition d'une marche aléatoire à deux états est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \cdots & a \\ b & \cdots \end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} a = & P_{X_n=S_1}(X_{n+1} = S_2) \\ b = & P_{X_n=S_2}(X_{n+1} = S_1) \end{cases}$$

<u>Remarques</u> :
On s'assure toujours que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

Propriété 3

Soit U_n la matrice ligne associée à une marche aléatoire à l'instant n.
Si M est sa matrice de transition, alors $U_{n+1} = U_n M$. On en déduit que $U_n = U_0 M^n$ (qui peut se démontrer par récurrence).

<u>Etude asymptotique d'une marche aléatoire à deux états</u> :

Propriété 4

Soit une marche aléatoire à deux états, de matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$.
Pour (a, b) différents des couples (0 ;0) et (1 ;1), la suite des états probabilistes converge vers un état indépendant de la distribution initiale.
Cet état probabiliste est l'état stable $\pi = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b} \end{pmatrix}$.
L'état stable π est solution de l'équation $UM = U$ où U est la matrice ligne $\pi = \begin{pmatrix} 1-x & x \end{pmatrix}$ dont il faut déterminer l'inconnue x.

-

4. Problèmes

Exercice n° 1

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition. Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :

S : « l'individu est sain, c'est-à-dire non malade et non infecté »,

I : « l'individu est porteur sain, c'est-à-dire non malade mais infecté »,

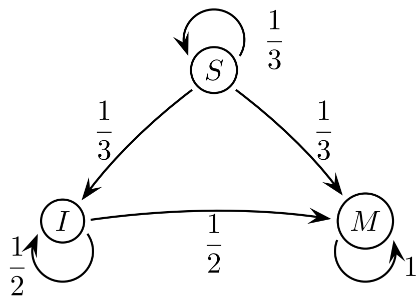
M : « l'individu est malade et infecté ».

Partie A

Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

- parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\frac{1}{3}$ et la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{3}$,
- parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{2}$.

La situation peut être représentée par un graphe probabiliste comme ci-dessous.



On note $P_n = (s_n \quad i_n \quad m_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où s_n, i_n et $m_n$désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la n-ième semaine. On a alors $P_0 = (0,99 \quad 0 \quad 0,01)$ et pour tout entier naturel n,

$$\left\{\begin{array}{lcl} s_{n+1} & = & \frac{1}{3}s_n \\ i_{n+1} & = & \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} & = & \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n \end{array}\right.$$

1. Écrire la matrice A appelée *matrice de transition*, telle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times A$.
2. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.

3. Déterminer l'état probabiliste P_4 au bout de quatre semaines. On pourra arrondir les valeurs à 10^{-2}.

   Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines ?

Partie B

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.
L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $Q_n = (S_n \quad I_n \quad M_n)$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n-ième semaine après la vaccination.
Pour tout entier naturel n, on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.
D'après la partie A, $Q_0 = P_4$. Pour la suite, on prend $Q_0 = (0,01 \quad 0,10 \quad 0,89)$ où les coefficients ont été arrondis à 10^2.

1. Exprimer S_{n+1}, I_{n+1} et M_{n+1} en fonction de S_n, I_n et M_n.
2. Déterminer la constante réelle k telle que $B^2 = kJ$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

   On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$.
3. a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

   b) Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie.
   Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

Exercice n° 2

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.
On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1. a) Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=1\right)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=0)}\left(X_{n+1}=1\right), P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=1\right) \text{ et } P_{(X_n=2)}\left(X_{n+1}=1\right).$$

   b) Exprimer $P\left(X_{n+1}=1\right)$ en fonction de $P\left(X_n=0\right)$, $P\left(X_n=1\right)$ et $P\left(X_n=2\right)$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :

$$R_n=\begin{pmatrix}P\left(X_n=0\right) & P\left(X_n=1\right) & P\left(X_n=2\right)\end{pmatrix}$$

   et on considère M la matrice $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

   On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

   On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n, $R_{n+1}=R_n\times M$.

   Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n=R_0\times M^n$.

3. On admet que $M=P\times D\times P^{-1}$ avec :

$$P=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

   Établir que, pour tout entier naturel n, $M^n=P\times D^n\times P^{-1}$.

   On admettra que, pour tout entier naturel n, $D^n=\begin{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

4. a) Calculer $D^n\times P^{-1}$ en fonction de n.

   b) Sachant que $R_0P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.

5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(X_n=0\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(X_n=1\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(X_n=2\right)$.

   Interpréter ces résultats.

Exercice n° 3

Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé. Trois marques X, Y et Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel.

On note : X_n l'évènement « la marque X est utilisée le mois n »,
Y_n l'évènement « la marque Y est utilisée le mois n »,
Z_n l'évènement « la marque Z est utilisée le mois n ».

Les probabilités des évènements X_n, Y_n, Z_n sont notées respectivement x_n, y_n, z_n.
La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition.
Un acheteur de la marque X le mois n, a le mois suivant :

50 % de chance de rester fidèle à cette marque,

40 % de chance d'acheter la marque Y,

10 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Y le mois n, a le mois suivant :

30 % de chance de rester fidèle à cette marque,

50 % de chance d'acheter la marque X,

20 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Z le mois n, a le mois suivant :

70 % de chance de rester fidèle à cette marque,

10 % de chance d'acheter la marque X,

20 % de chance d'acheter la marque Y.

1. a) Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.
   On admet que :
   $y_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2z_n$ et que $z_{n+1} = 0,1x_n + 0,2y_n + 0,7z_n$.
   b) Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n. En déduire l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2. On définit la suite (U_n) par $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

   On admet que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$.

   Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n = 0$), on estime que $U_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$.

   On considère l'algorithme suivant : n et i désignent des entiers naturels, A, B et U sont des matrices.

```
Demander la valeur de n
i ← 0
A ← (0,4  0,4 ; 0,2  0,1)
B ← (0,1 ; 0,2)
U ← (0,5 ; 0,3)
Tant que i < n
    U ← A × U + B
    i ← i + 1
Fin de Tant que
```

a) Que contient la matrice U une fois l'algorithme finalisé pour $n = 1$ puis pour $n = 3$.

b) Quelle est la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril ?

Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n.

On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - A$.

3. On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

   a) Démontrer que $C = A \times C + B$ équivaut à $N \times C = B$.

   b) On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{45}{23} & \dfrac{20}{23} \\ \dfrac{10}{23} & \dfrac{30}{23} \end{pmatrix}$.

   En déduire que $C = \begin{pmatrix} \dfrac{17}{46} \\ \dfrac{7}{23} \end{pmatrix}$.

4. On note V_n la matrice telle que $V_n = U_n - C$ pour tout entier naturel n.

   a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = A \times V_n$.

   b) On admet que $U_n = A^n \times (U_0 - C) + C$.

   Quelles sont les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai ?

Exercice n° 4

Le gestionnaire d'un site web, composé de trois pages web numérotées de 1 à 3 et reliées entre elles par des liens hypertextes, désire prévoir la fréquence de connexion sur chacune de ses pages web.

Des études statistiques lui ont permis de s'apercevoir que :

- Si un internaute est sur la page n° 1, alors il ira, soit sur la page n° 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit sur la page n° 3 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n° 2, alors, soit il ira sur la page n° 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ soit il restera sur la page n° 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit il ira sur la page n° 3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n° 3, alors, soit il ira sur la page n° 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit il ira sur la page n° 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$,soit il restera sur la page n° 3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n, on définit les évènements et les probabilités suivants :
A_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 1 » et on note $a_n = P(A_n)$.
B_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 2 » et on note $b_n = P(B_n)$.
C_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 3 » et on note $c_n = P(C_n)$.

1. Faire un graphe, puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$.

   On admet que, de même, $b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$.

   Ainsi :
$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{array}\right.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   $U_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ représente la situation initiale, avec $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

   Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice 3×3 que l'on précisera.

   En déduire que, pour tout entier naturel $n, U_n = M^n U_0$.

3. Montrer qu'il existe une seule matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x + y + z = 1$ et $MU = U$.

4. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir l'expression de M^n, n étant un entier naturel non nul :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix}$$

   Pour tout entier naturel n non nul, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n. En déduire que les suites (a_n), (b_n) et (c_n) convergent vers des limites que l'on précisera.

5. Interpréter les résultats obtenus et donner une estimation des pourcentages de fréquentation du site à long terme.