

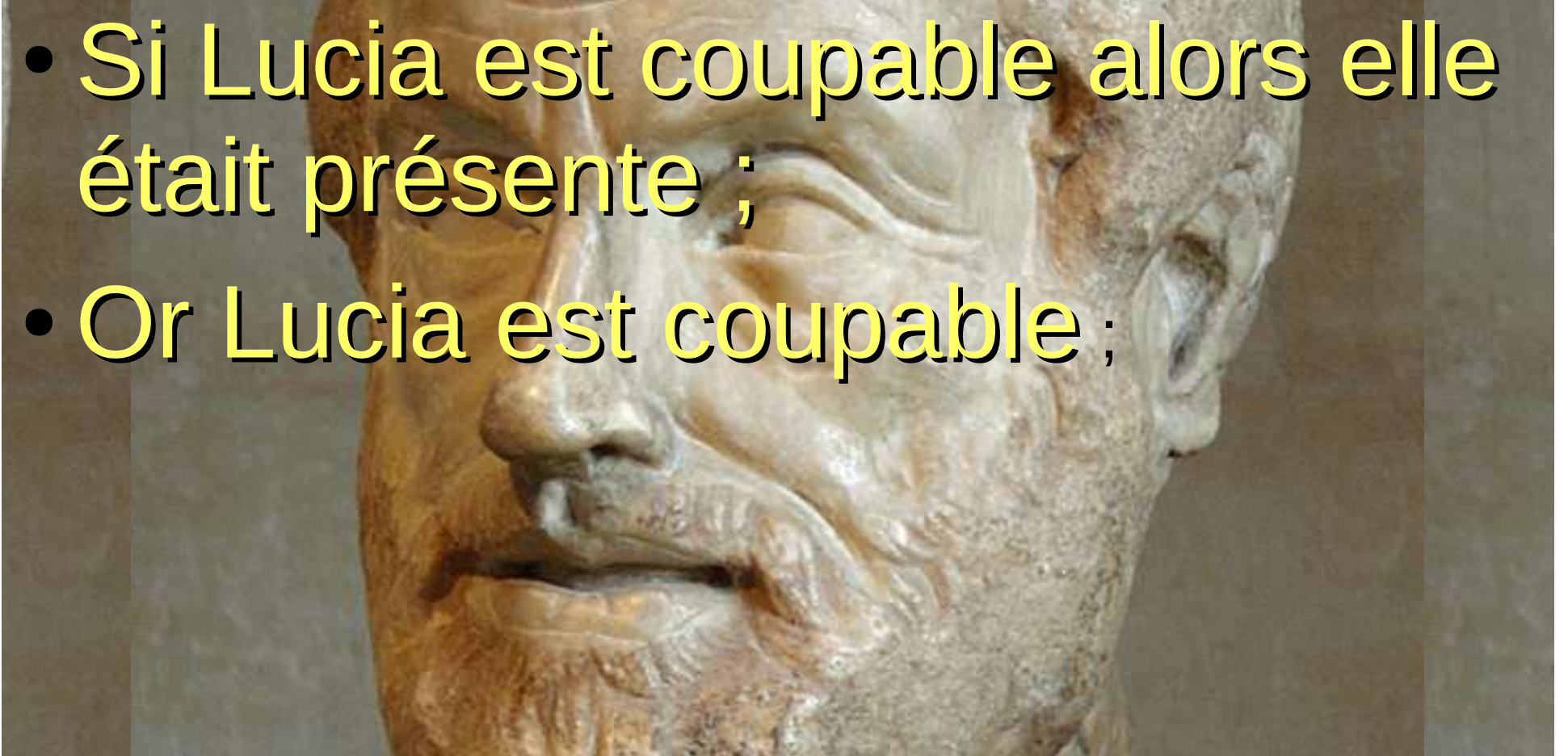
Induire ... en erreur ?



Mardi 17 novembre 2015
Alain Busser
IREM

Modus ponens

- Si Lucia est coupable alors elle était présente ;
- Or Lucia est coupable ;



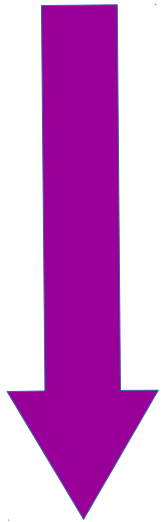
Aristote (384 av JC – 322 av JC)

Implications

Implication
 $C \Rightarrow P$



Obverse
 $\text{Non } C \Rightarrow \text{non } P$



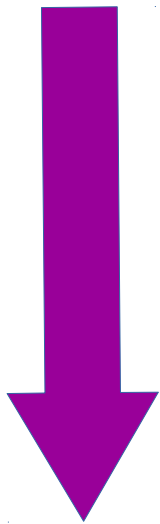
réciproque
 $P \Rightarrow C$

Implications

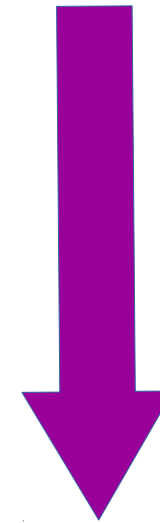
Implication
 $C \Rightarrow P$



Obverse
 $\text{Non } C \Rightarrow \text{non } P$



réciproque
 $P \Rightarrow C$



contraposée
 $\text{Non } P \Rightarrow \text{non } C$

Exemples

- Obverse : Si Lucia est innocente alors elle ne pouvait pas être là
- Réciproque : Si Lucia était présente alors elle est coupable
- Contraposée : Si Lucia était absente elle ne pouvait pas être coupable

(modus tollens)

Sophisme du procureur

- Si Lucia est coupable alors elle était sur les lieux ;
- Or elle était sur les lieux ;
- Donc elle est coupable.

Exemple : Utiliser le théorème de Pythagore pour montrer qu'un triangle est rectangle.

Probabilités



Jacques Bernoulli (1654-1705)

Une urne contient
40 boules rouges
et 60 boules bleues.
On extrait une boule
au hasard. La probabilité
qu'elle soit rouge est 0,4.

Problème inverse



Jacques Bernoulli (1654-1705)

On extrait une boule au hasard d'une urne dont la composition est inconnue. Elle est **bleue**. Quelle est la probabilité que l'urne contienne 60 % de **boules bleues** ?

Problème inverse



Jacques Bernoulli (1654-1705)

On extrait 10 boules au hasard d'une urne dont la composition est inconnue. Elles sont toutes **bleues**. Quelle est la probabilité que toutes les boules de l'urne soient **bleues** ?

Probabilité conditionnelle



Thomas Bayes (1702-1761)

$$P(L \text{ et } C) = P(C) P(L/C)$$

- $P(L/C) = 1$
- $P(C) = 1$
- $P(L \text{ et } C) = 1$
- $P(L) = 1$

Probabilité conditionnelle



Thomas Bayes (1702-1761)

$$P(L \text{ et } C) = P(C) P(L/C)$$
$$P(L \text{ et } C) = P(L) P(C/L)$$
$$P(C/L) = P(L/C) \frac{P(C)}{P(L)}$$

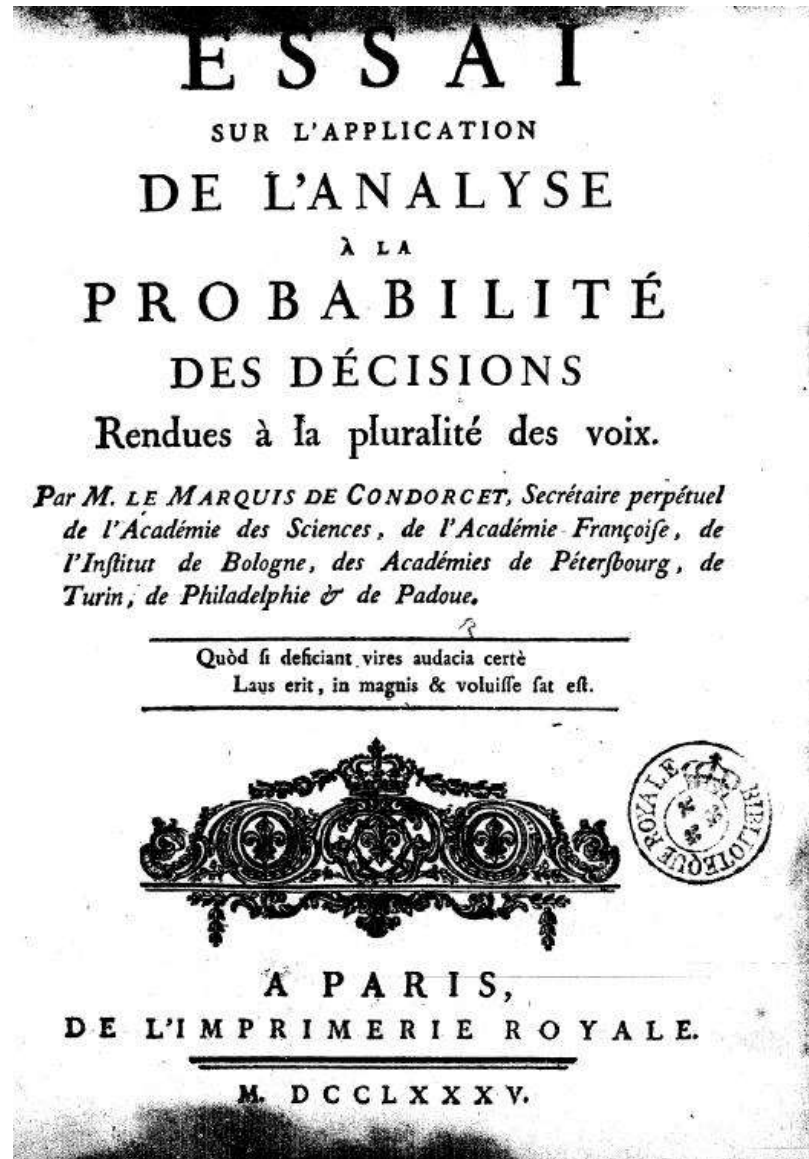
$P(C)/P(L)$ s'appelle le *rapport de vraisemblance*.

Le sophisme du procureur consiste à croire qu'il vaut 1

Probabilité conditionnelle



Nicolas de Condorcet (1743-1794)



Évènements rares



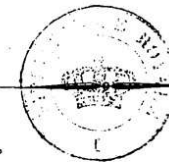
POISSON.

Bachelier

RECHERCHES
SUR LA
PROBABILITÉ DES JUGEMENTS
EN MATIÈRE CRIMINELLE
ET EN MATIÈRE CIVILE,
PRÉCÉDÉS
DES RÈGLES GÉNÉRALES DU CALCUL DES PROBABILITÉS;

PAR S.-D. POISSON,

Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés Royales de Londres et d'Édimbourg; des Académies de Berlin, de Stockholm, de Saint-Petersbourg, d'Upsal, de Boston, de Turin, de Naples, etc.; des Sociétés, italienne, astronomique de Londres, Philomatique de Paris, etc.

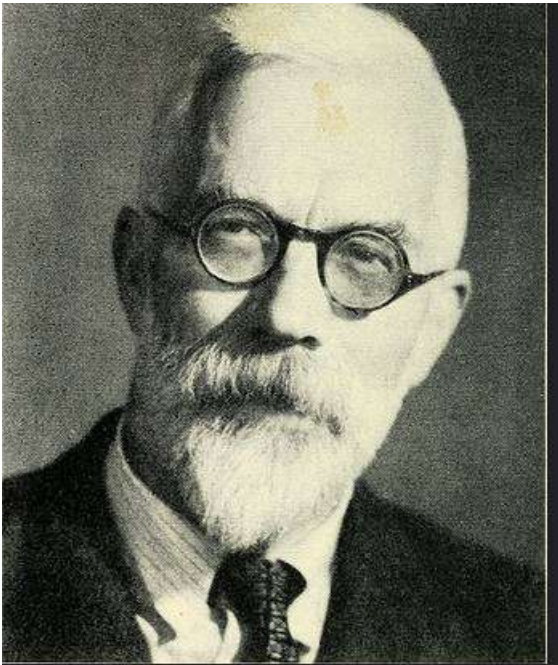


PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE, etc.
QUAI DES AUGUSTINS, n° 55.

1837

Siméon Denis Poisson (1781-1840)

Statistique inférentielle

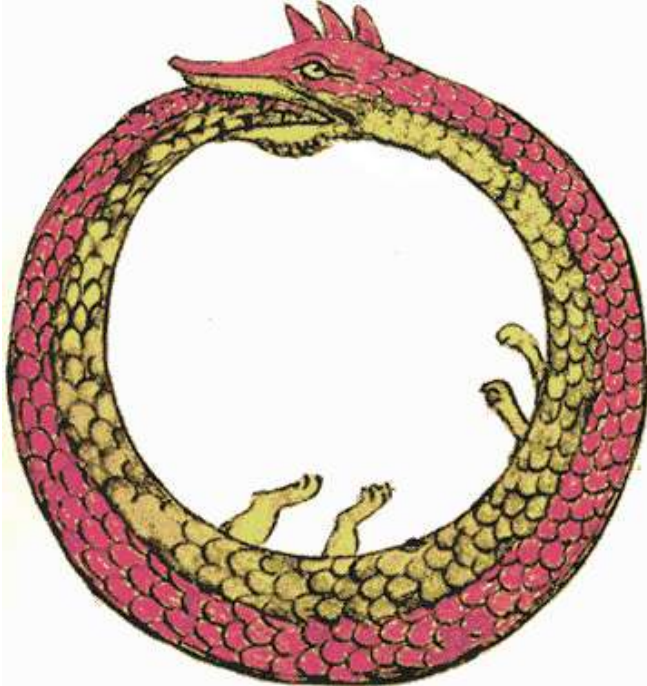


Ronald Fisher (1890-1962)

On veut savoir si H_0 est vraie.

- On **suppose** que H_0 est vraie.
- On en déduit un intervalle de fluctuation.
- On regarde si le résultat d'une mesure est dans l'intervalle de fluctuation
- Si oui, H_0 est considérée vraie.
- Si non, H_0 est fausse.

Statistique inférentielle



On veut savoir si H_0 est vraie.

- On **suppose** que H_0 est vraie.
- On en déduit un intervalle de fluctuation.
- On regarde si le résultat d'une mesure est dans l'intervalle de fluctuation
- **Si oui, H_0 est considérée vraie.**
- Si non, H_0 est fausse.

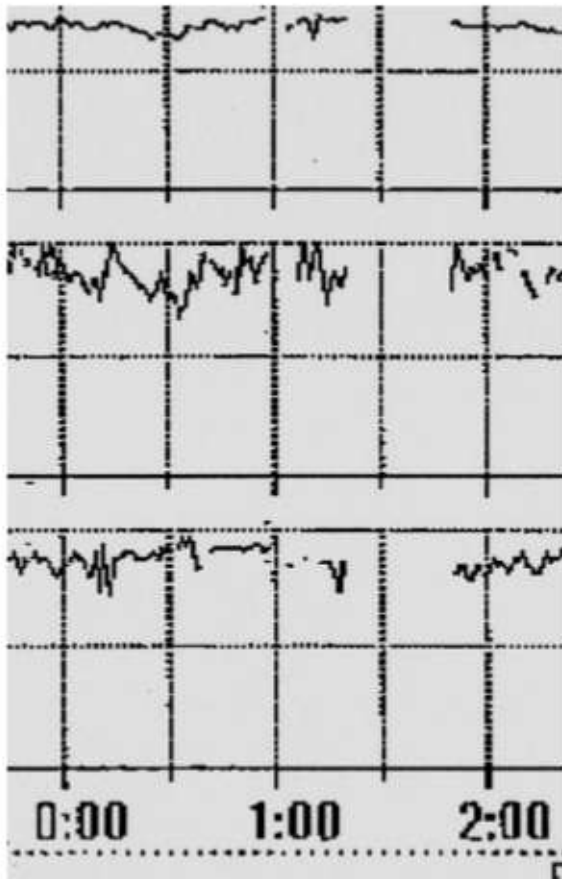
Statistiquement coupable



Lucia de Berk (1961-)

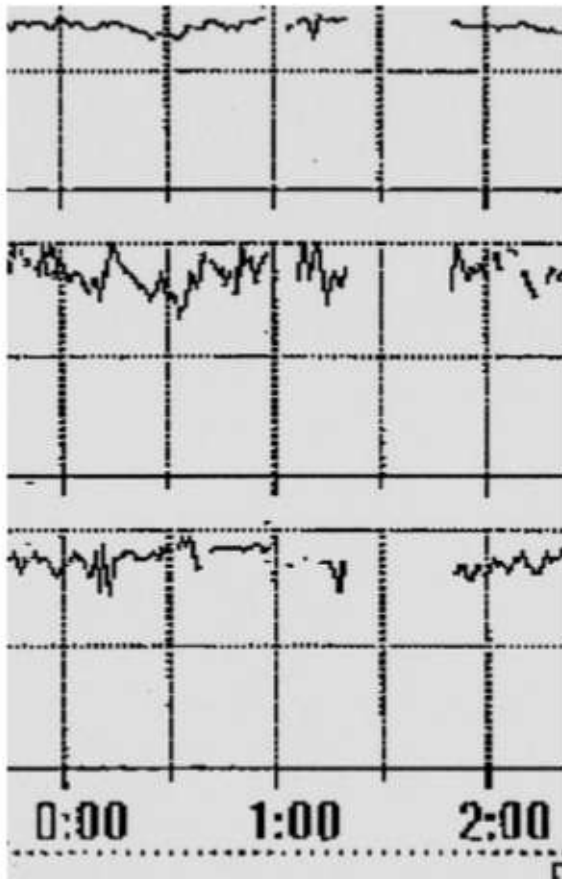
Le 3 septembre 2001, à La Haye, la petite Amber Zuiderwijk (6 mois), hospitalisée au *Juliana Kinderziekenhuis*, endure des difficultés respiratoires (baisse de la saturation en O₂). À 23h, l'infirmière branche le moniteur.

Statistiquement coupable



À minuit 15 le 4 septembre, malgré l'oxygène, la saturation reste basse. Lucia augmente donc l'oxygène. Vers 1h, Lucia appelle la pédiatre et réclame un examen médical pour Amber. Les médecins estimant que son état n'est pas si grave la ramènent dans la chambre.

Statistiquement coupable



À 2h 10 une prise de sang est effectuée. Le Na et le K sont normaux.

À 2h46 Amber fait une crise cardiaque.

Le pédiatre vient à 2h52 et appelle la réa. Le cœur s'arrête.

À 3h35 le décès est annoncé (mort naturelle).

Amber n'avait pas 6 mois.

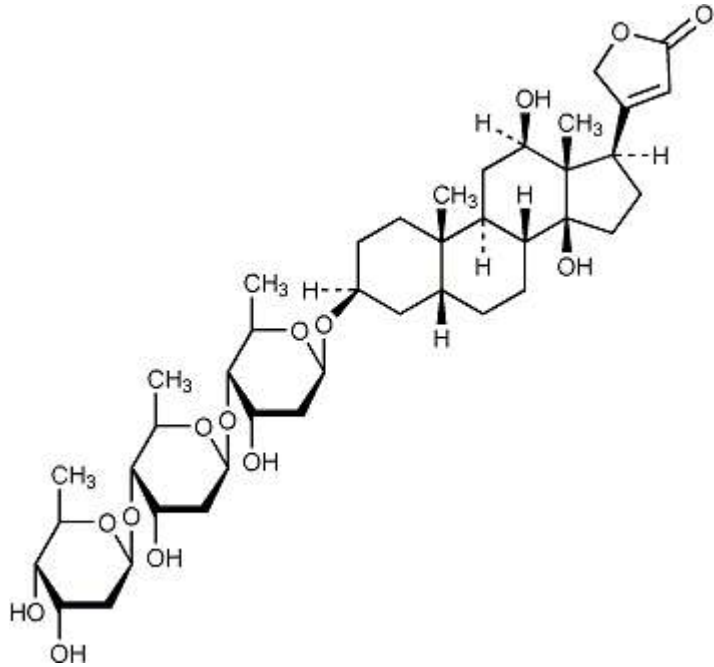
Statistiquement coupable



Le 5 septembre 2001, une infirmière va voir le chef pédiatre et dit « Oh non, Lucia a recommencé ». Le décès d'Amber, ainsi que 5 autres décès, se voient enlever la cause « naturelle » et la police est prévenue. On réautopsie Amber, et on trouve un fluide mystérieux.

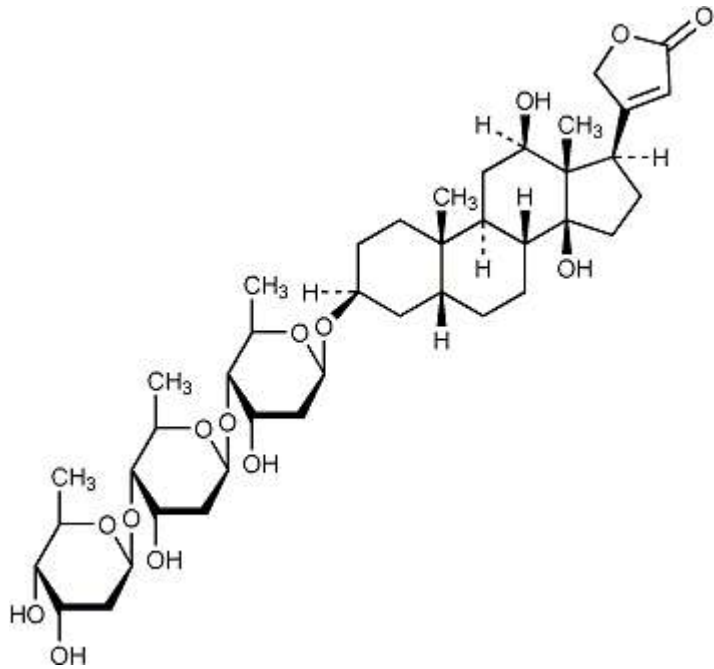
Lucia de Berk (1961-)

Statistiquement coupable



On y trouve de la digoxine, qui n'était plus prescrite à Amber. Lucia est suspectée de meurtre par digoxine. Celle-ci aurait été injectée 60 à 90 minutes avant le décès. Il pourrait s'agir d'une substance immunoréactive qui donne de faux positifs.

Statistiquement coupable



Le taux de digoxine augmente considérablement post mortem. Le moniteur ne montre aucun signe d'intoxication aiguë et le cœur aurait été contracté au moment du décès.

Il n'y avait pas de digoxine dans le foie du bébé.

Mais il y en avait dans les reins.

Expertise



Henk Elffers, psychologue

Elffers a fait des statistiques sur les gardes de 3 services où a travaillé Lucia : Sur 1029 gardes Lucia en a fait 142 et était présente lors de 8 incidents sur 8. Soit p la probabilité d'un incident lors d'une garde, $n=1029$ et $r=142$. La probabilité que Lucia observe x incidents sachant qu'on en a observé k en tout suit une loi *hypergéométrique* de paramètres n , k et r .

Expertise

En combinant avec les données du *Rode Kruis Ziekenhuis* :

- Service 41, 336 gardes dont 1 avec Lucia, 1 incident sur 5 ;
- Service 42, 339 gardes dont 58 avec Lucia, 5 incidents sur 14 ;

1 chance sur 342 millions que Lucia observe autant d'incidents



Henk Elffers, psychologue

Contre-expertise



En combinant **utilisant** les données du *Rode Kruis Ziekenhuis* :

- Service 41, 336 gardes dont ± 3 avec Lucia, 1 incident sur 5 ;
- Service 42, 339 gardes dont 58 avec Lucia, 5 incidents sur 14 ;

1 chance sur ~~342 millions~~ 49...

Richard Gill, spécialiste de R

Contre-expertise



Si les incidents sont rares, ils suivent une loi de Poisson dont on cherche à estimer le paramètre pour chaque infirmière. La conclusion est que Lucia avait une chance sur 25 pour observer autant d'incidents.

Richard Gill, spécialiste de R

Statistiquement coupable



- Le 24 mars 2003, Lucia est condamnée à la prison à vie
- Le 18 juin 2004, la cour d'appel confirme la sentence et l'assortit d'un placement en hôpital psychiatrique
- En avril 2010, Lucia est définitivement innocentée (faits nouveaux)

Lucia de Berk (1961-)