Loi exponentielle

I/ Définitions

1) Variable aléatoire exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire X est exponentielle de paramètre λ si la probabilité qu'elle soit comprise entre a et b est $P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda \times a} - e^{-\lambda \times b}$. Les bornes a et b ainsi que le paramètre λ sont supposés positifs.

2) Fonction de répartition

La fonction de répartition de X est la fonction qui, à un nombre b, associe la probabilité que $X \leq b$. Comme X ne peut prendre que des valeurs positives, cette probabilité est $P(X \leq b) = e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda \times b} = 1 - e^{-\lambda \times b}$.

3) Densité

La loi (ou densité) d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ est la dérivée de sa fonction de répartition, soit $\lambda \times e^{-\lambda x}$. C'est son intégrale sur l'intervalle [a,b] qui donne la probabilité que $a \leq X \leq b$.

4) Lien avec la loi de Poisson

Si des événements arrivent à des instants aléatoires tels que la durée qui s'écoule entre deux tels instants suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors le nombre d'événements sur une durée unité suit une loi de Poisson de même paramètre λ.

5) Espérance

L'espérance d'une variable aléatoire exponentielle est l'inverse de son paramètre.

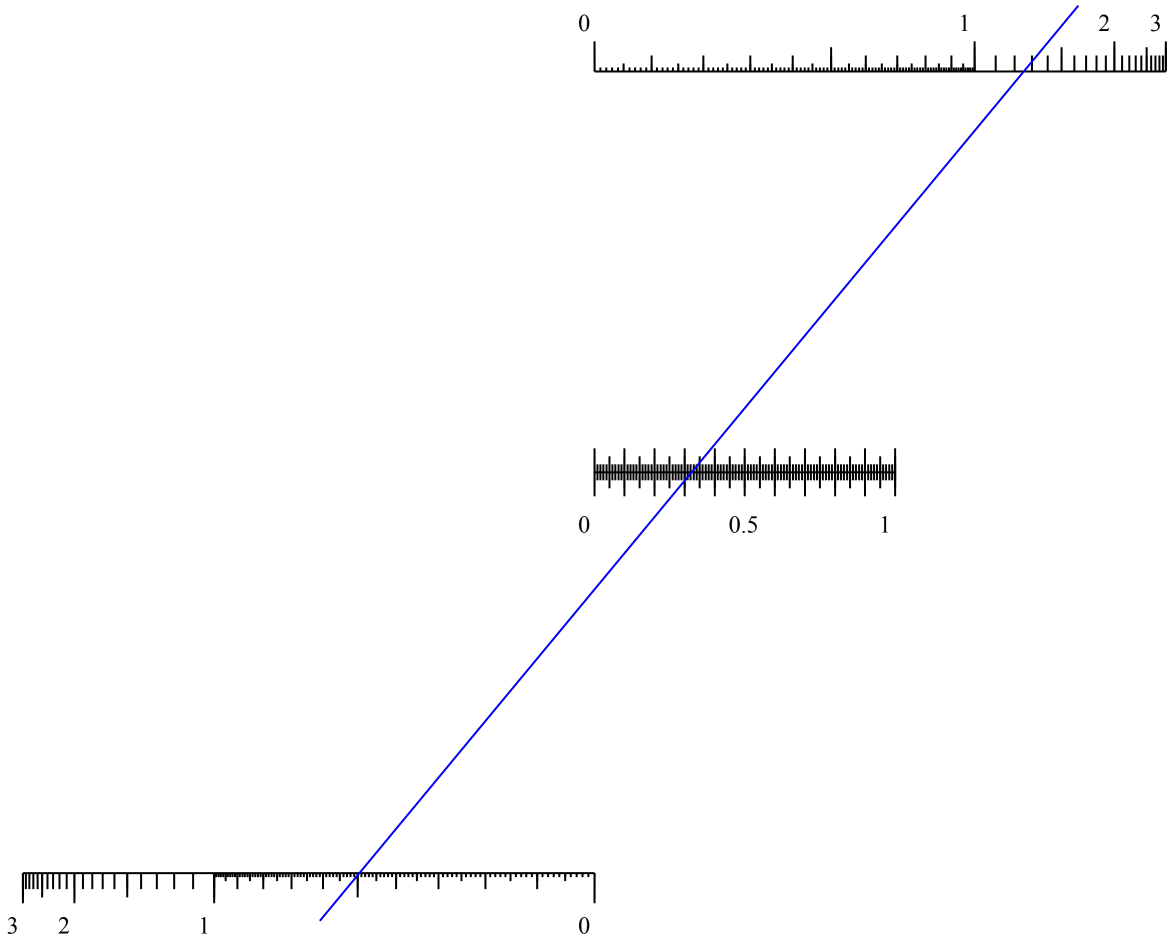
II/ Calcul de probabilités

1) Avec le nomogramme

On suppose que la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre 0,05. On voudrait connaître la probabilité que X soit comprise entre 10 et 25.

Comme le nomogramme est fait pour une loi exponentielle de paramètre 1, on s'y ramène en multipliant les bornes 10 et 25 par le paramètre 0,05 : $10 \times 0{,}05 = 0{,}5$ et $25 \times 0{,}05 = 1{,}25$. On cherche donc nomographiquement la probabilité qu'une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1 soit comprise entre 0,5 et 1,25.

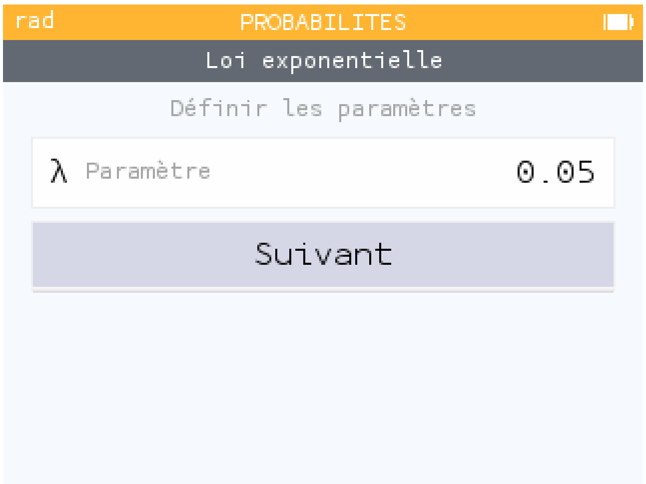
On relie alors la graduation 0,5 en bas avec la graduation 1,25 en haut :



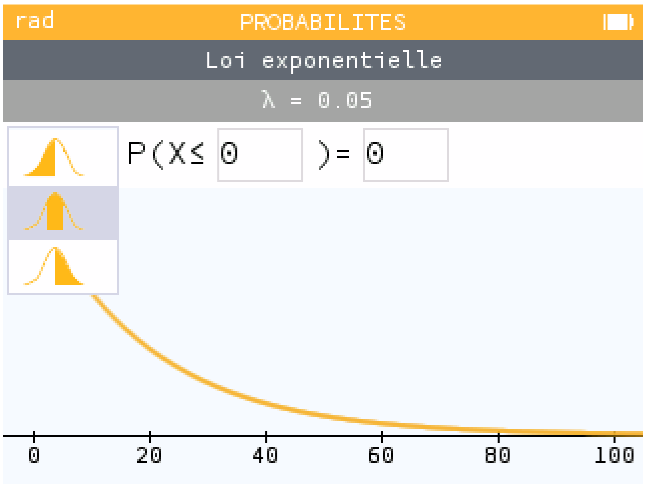
On lit sur l'axe du milieu la probabilité : environ 0,32.

2) Avec la Numworks

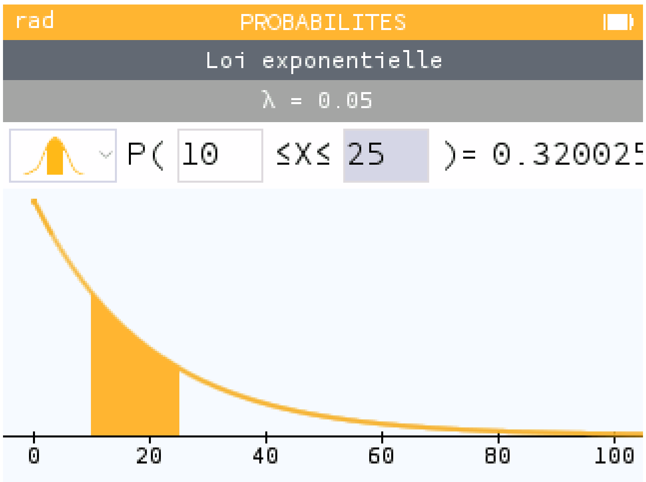
Dans l'application de probabilités, on choisit la loi exponentielle et on entre le paramètre :



On choisit la version intervalle :



et on entre les bornes de l'intervalle :



On trouve environ 0,32.

3) Avec la Ti

a) Par la densité

Si on se rappelle l'expression donnant la densité, on représente graphiquement celle-ci qui, dans le cas présent, est $0,05\times e^{-0,05\times x}$. On choisit `Xmin` plus petit que 10 et `Xmax` plus grand que 25, puis on fait 2nde trace et là, on choisit le calcul d'intégrale.

On peut aussi calculer directement l'intégrale de $0,05\times e^{-0,05\times x}$ en passant par le menu math.

b) Par la fonction de répartition

On calcule directement $e^{-0,05\times 10}-e^{-0,05\times 25}$ et on trouve environ 0,32.