NOMBRES, OUTILS DE CALCUL ET EXPRESSIONS MATHÉMATIQUES EN CHINE ANCIENNE[1]

LIU Dun

Tout d'abord, je voudrais remercier les amis et collègues de La Réunion qui m'ont permis de participer à ce colloque. Il faut avouer qu'en ce qui concerne les cultures de l'océan Indien, je suis plutôt ignorant, mais je m'intéresse beaucoup aux échanges qui ont pu se produire, par le passé, entre les civilisations indienne, chinoise, islamique et européenne.

Pour illustrer mon propos, je voudrais parler du roman d'un auteur contemporain chinois Lu Wenfu : *Vie et passion d'un gastronome chinois*[2]. C'est l'histoire d'un gourmet. Avant 1949, il était riche et pouvait aller manger souvent dans toutes sortes de bons restaurants. Après 1949, il n'en eut plus les moyens et dut se résoudre à apprendre la cuisine auprès d'une vieille dame, afin de pouvoir continuer à satisfaire sa passion. À la fin du roman, on lui posa cette question : « Quelle est la chose la plus importante en cuisine ? » Pour certains, c'est l'art de couper la viande et les légumes, et pour d'autres, c'est l'art de les faire cuire, mais pour notre héros, c'est l'usage du sel : il faut savoir le doser.

On dit qu'un système de numération est *décimal* lorsqu'on utilise dix signes différents pour représenter tous les nombres ; on dit qu'il est *positionnel* lorsque la place du chiffre dans l'écriture du nombre va déterminer sa valeur. C'est la simplicité même d'un tel système qui va permettre l'élaboration de calculs plus sophistiqués. Si on regarde les civilisations anciennes, elles n'ont pas toutes eu recours au système décimal (les Babyloniens utilisaient la base 60, les Mayas la base 20, les Romains un système où la base 5 jouait un rôle important, les Égyptiens la base 10 sans utiliser pour autant tous les concepts qui lui sont liés). Ici, je vais présenter essentiellement le système de numération chinois, mais ce n'est pas parce que je vais dire que ce système a été très tôt positionnel, avec tous les résultats que cela entraîne (représentation des nombres, techniques de calcul, résolution algébrique d'équations et de systèmes d'équations...), que cela implique de ma part un quelconque sentiment de supériorité

---

[1] Texte traduit du chinois par Catherine Jami.

[2] Lu Wenfu, *Vie et passion d'un gastronome chinois*, trad. A. Curien et F. Chen, Arles, Philippe Picquier-UNESCO, 1988.

du système de numération chinois. Pour éclairer mon discours, je citerai Laplace (un mathématicien français) : « C'est à l'Inde que nous devons la méthode ingénieuse d'exprimer tous les nombres au moyen de dix symboles, chaque symbole ayant une valeur de position ainsi qu'une valeur absolue. Idée profonde et importante, elle nous apparaît maintenant si simple que nous en méconnaissons le vrai mérite. Mais sa réelle simplicité, la grande simplicité qu'elle a procurée à tous les calculs, met notre arithmétique au premier plan des inventions utiles, et nous apprécierons d'autant plus la grandeur de cette œuvre que nous nous souviendrons qu'elle a échappé au génie d'Archimède et d'Apollonius, deux des plus grands hommes qu'ait produits l'antiquité. » Je ne parlerai pas ici du système positionnel de numération décimale indien, car je le connais mal, mais ce que je vais pouvoir relater, c'est que la découverte d'un tel système a également eu lieu en Chine.

LA PÉRIODE DES INSCRIPTIONS ORACULAIRES

Les origines d'un tel système de numération remontent au néolithique : certaines inscriptions de cette époque peuvent être considérées comme les ancêtres du système positionnel chinois de numération décimale, système qui se retrouve sous une forme structurée dès la dynastie Shang (1600 av. J.-C.).

FIG. 1

Les traces les plus anciennes que nous ayons (fig. 1) sont les inscriptions oraculaires sur os et écailles de tortue (*jiaguwen*). Ce sont des inscriptions divinatoires. On écrivait des questions sur des omoplates de bovins ou des carapaces de tortues, qu'on approchait d'un feu. On interprétait ensuite, comme signes divinatoires, les craquelures ainsi obtenues. Ces os très anciens (encore appelés « os de dragon ») furent longtemps utilisés en préparation dans des pharmacies. Cela, jusqu'au jour où un savant (le directeur de l'Académie impériale), en achetant un remède, remarqua les inscriptions qui y figuraient et réalisa leur valeur archéologique. On commença alors à les collectionner systématiquement (fin du XIX^{e} siècle).

L'étape suivante, dans l'écriture en général, qui remonte à 2500 ans environ, est celle des inscriptions sur bronze (époque des Zhou occidentaux).

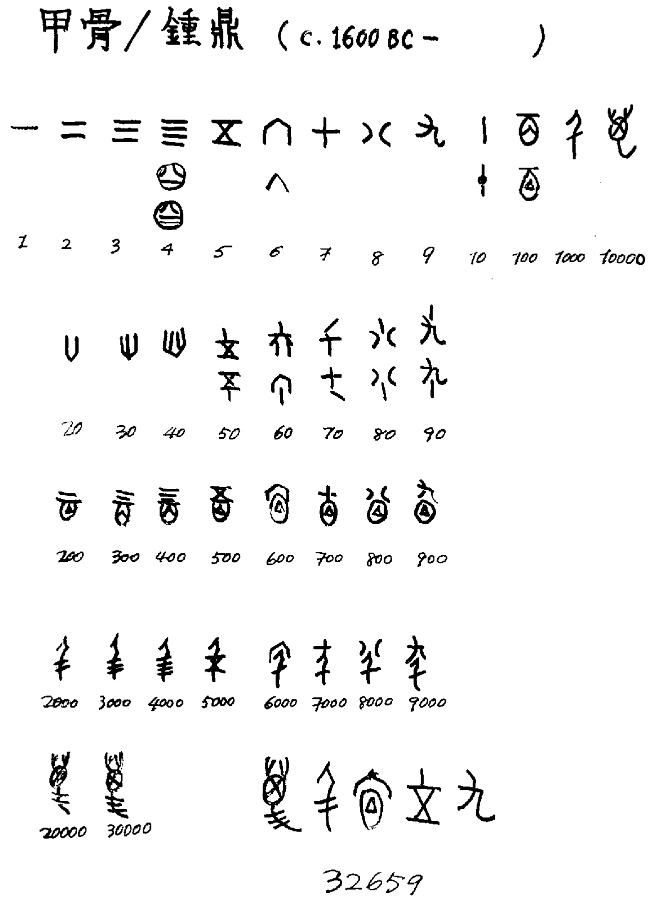


FIG. 2

Dans les inscriptions oraculaires et les inscriptions sur bronze, on utilisait treize signes, dont neuf pour représenter les nombres de 1 à 9 et les quatre autres pour 10, 100, 1 000 et 10 000 (fig. 2). Pour l'écriture de nombres composés : 20, 30, ..., 90, 200, 300, ..., 900, 2 000, 3 000, ..., on utilisait une combinaison des treize signes précédents. Ainsi, pour écrire 9 000, on employait un symbole composé du signe représentant 9 en haut et celui représentant 1 000 en dessous. Le nombre composé le plus élevé que l'on rencontre sur ces inscriptions est 30 000. En exemple, on a représenté le nombre 32 659 sur la figure 2. Les symboles utilisés représentent respectivement (en allant de la gauche vers la droite) : 30 000, 2 000, 600, 50 et 9. Notons qu'il suffirait de supprimer les parties inférieures ou supérieures (suivant le cas) des différent signes utilisés (sauf pour le signe le plus à droite : celui des unités) pour passer à une notation positionnelle. Par ailleurs, si on avait voulu représenter 32 059, on aurait utilisé un symbole (l'ancêtre du caractère *you*, qui signifie « et »), pour indiquer la place vide laissée par le chiffre des mille.

LES BAGUETTES À CALCULER

Après la période des inscriptions oraculaires, apparaissent les baguettes, qui datent de l'époque des Printemps et Automnes (770-476 av. J.-C.). Elles étaient réalisées le plus souvent en bambou, mais parfois dans d'autres matières (os, métal...). La figure 3 montre des baguettes en os qui furent découvertes en 1970, dans une tombe.

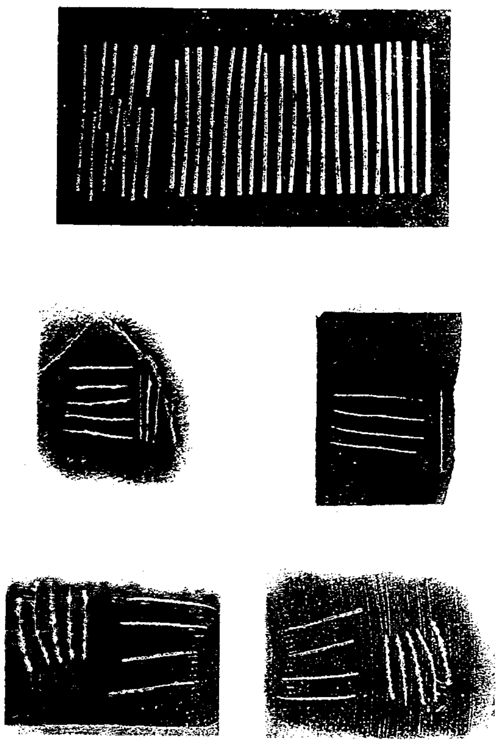


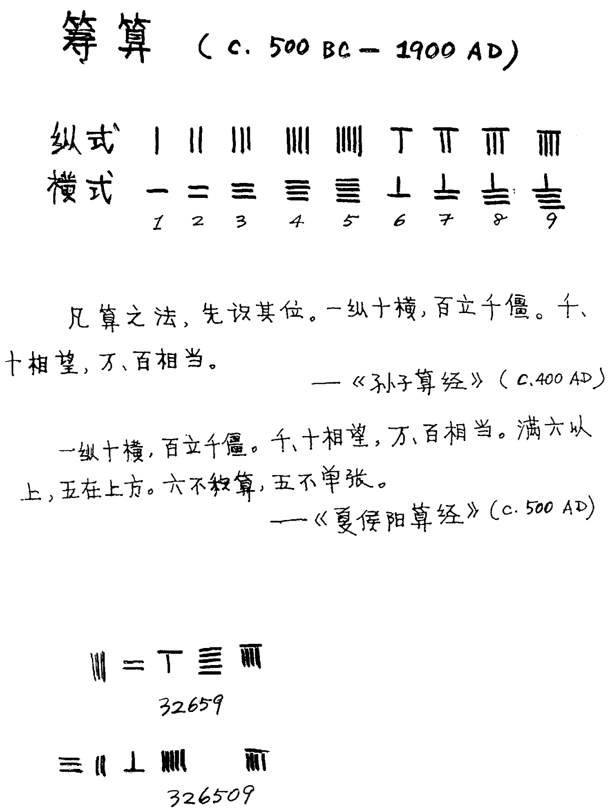
FIG. 3

L'usage des baguettes comme instrument de calcul ne commence qu'au début de la dynastie des Han (200 av. J.-C.), et va s'étendre jusqu'à celle des Yuan (1279-

1368 apr. J.-C.), où elles seront remplacées par le boulier. Cependant, on continuera à les utiliser pour représenter des nombres jusqu'au début de ce siècle. Le maniement des baguettes à calculer est enseigné dans deux livres de mathématiques de référence : le classique de Maître Sun (IVe siècle apr. J.-C.) et le classique de Xiahou Yang (Ve siècle apr. J.-C.).

Représentation d'un nombre

Dans ces livres, on explique la disposition des baguettes. Il existe (fig. 4) deux configurations (horizontale et verticale) pour représenter un chiffre suivant sa position : 1 est vertical, 10 est horizontal, 100 est vertical..., donc 10 000 et 100 ont la même direction.



« Dans la méthode de calcul, sachez d'abord le rang. Un est vertical, dix est horizontal, cent est debout, mille est gisant. Mille et dix se regardent, dix mille et cent se correspondent. »
Classique mathématique de Maître Sun
(env. 400 apr. J.-C.)

« Un est vertical, dix est horizontal, cent est debout, mille est gisant. Mille et dix se regardent, dix mille et cent se correspondent. À partir de six, cinq est placé au-dessus, perpendiculairement. Six ne s'accumule pas dans les calculs, cinq ne se dispose pas seul. »
Classique mathématique de Xiahou Yang
(env. 500 apr. J.-C.)

FIG. 4

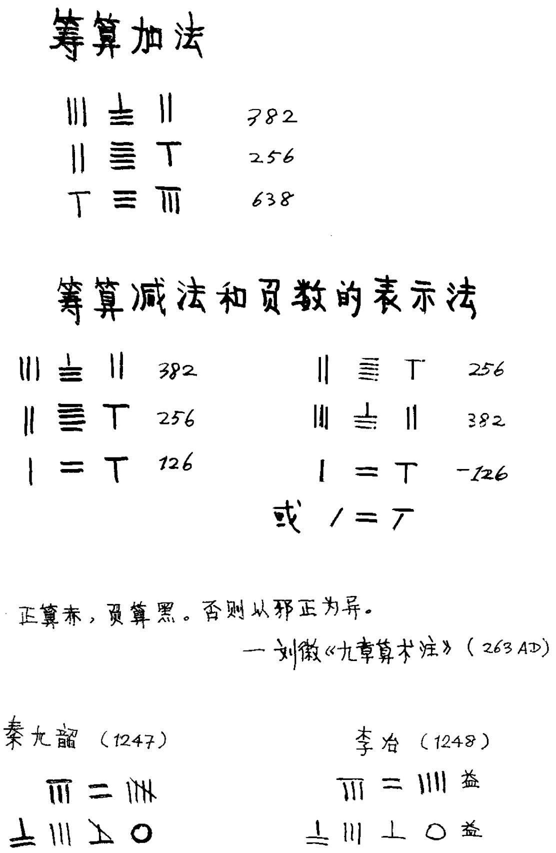
J'ai représenté sur la figure 4 les nombres 32 659 et 326 509 avec des baguettes. On pourra observer l'alternance des directions verticales et horizontales de ces baguettes. Par ailleurs, on reconnaît facilement pour 326 509 la place « vide » laissée par le chiffre des dizaines, puisqu'encadrée par des baguettes de même direction.

Les quatre opérations

Je vais, à présent, montrer comment on effectuait les quatre opérations.

L'addition et la soustraction

J'ai représenté (fig. 5) la disposition des baguettes pour une addition (382 + 256) et deux soustractions : la première (382 – 256) donne un résultat positif, la seconde (256 – 382) donne un résultat négatif.



Pour le positif les baguettes sont rouges, pour le négatif les baguettes sont noires. Sinon on les différencie en les écrivant droits et obliques (respectivement). Commentaire de Liu Hui aux *Neuf chapitres sur l'art du calcul* (263 apr. J.-C.)

FIG. 5

Je dois vous apprendre comment on représentait les nombres négatifs. C'est expliqué dans le commentaire de Liu Hui (263 apr. J.-C.) aux *Neuf chapitres sur l'art du calcul* (livre d'un auteur inconnu du Ier siècle apr. J.-C) :

• on utilisait des baguettes rouges pour les nombres négatifs, et des baguettes noires pour les nombres positifs ;

• si on disposait d'un seul type de baguettes, on inclinait toutes les baguettes verticales représentant ce nombre, pour indiquer qu'il était négatif.

Deux auteurs du XIII^{e} siècle (Li Zhi et Qin Jiushao) proposent l'un de placer une baguette oblique sur le chiffre non nul le plus à droite, et l'autre de placer à droite du nombre le caractère *yi*. On donne en exemple l'écriture de – 824 et de – 7 360 avec ces deux méthodes.

Notons que sous la dynastie des Song (960-1279), l'imprimerie xylographique était déjà développée, et on peut donc trouver, dans les ouvrages des deux mathématiciens précédents, des représentations des baguettes à calculer, tandis que dans les textes plus anciens cités plus haut ne figurent que des explications sur leur maniement.

La multiplication

On écrit les deux nombres qu'on veut multiplier (fig. 6) l'un en dessous de l'autre (ici 23 et 86). On déplace vers la gauche 23 (le multiplicateur) de sorte que 3 (son chiffre le plus à droite) soit aligné avec 8 (le chiffre le plus à gauche) de 86 (le multiplicande).

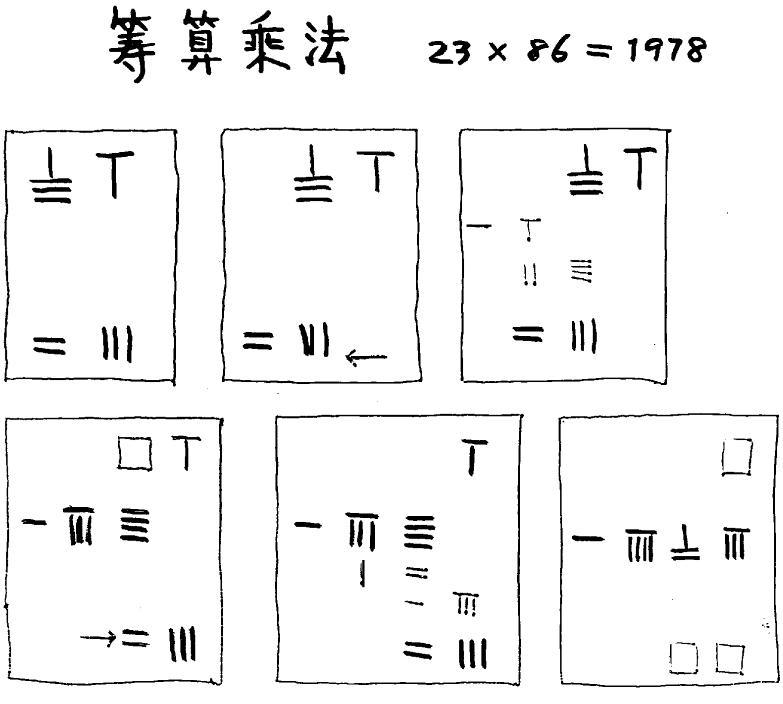


FIG. 6

On effectue ensuite le produit du chiffre le plus à gauche du multiplicande par les chiffres du multiplicateur. Remarquons qu'aujourd'hui, on procède dans le sens contraire. Par ailleurs, le deuxième résultat partiel 24 n'est pas, en fait, écrit sur la surface à calculer (comme c'est le cas sur l'illustration), il est directement ajouté au premier résultat partiel. Trois lignes sur la surface à calculer suffisent donc pour faire la multiplication.

Le chiffre le plus à gauche du multiplicande est alors enlevé de la surface à calculer, puis on décale le multiplicateur d'un rang à droite, et on recommence le procédé jusqu'à épuisement des chiffres du multiplicande. On enlève alors de la surface à calculer le multiplicateur. La multiplication est terminée.

La division

On a effectué ici la division de 1997 par 23 (fig. 7). La procédure est, en quelque sorte, inverse de celle de la multiplication.

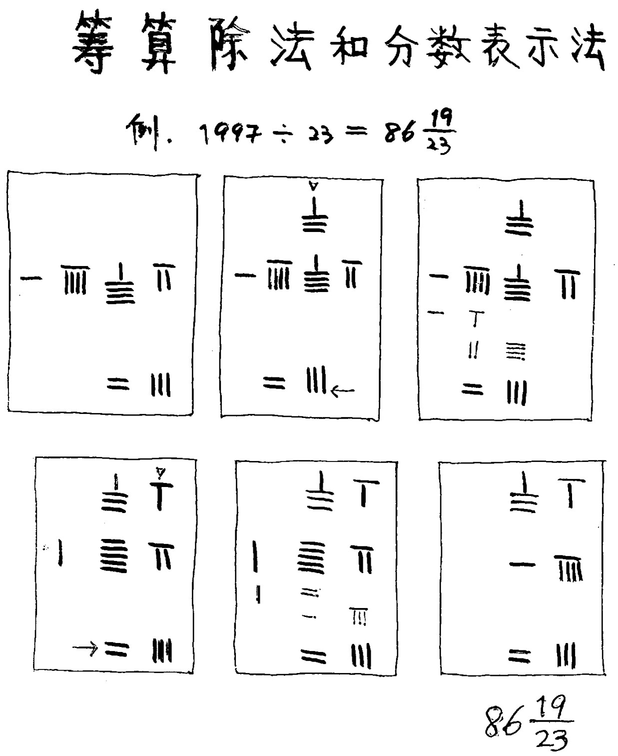


FIG. 7

On place le diviseur en dessous du dividende tandis que le quotient (en chinois : *shang*, « ce qui va être discuté, ou négocié ») sera placé au dessus. On décale le diviseur vers la gauche, de sorte que son chiffre le plus à gauche soit en dessous du chiffre du diviseur qui lui est supérieur ou égal et le plus à gauche possible.

Après avoir posé le quotient qui est 8 (dans la même colonne du chiffre le plus à droite du diviseur et au dessus de celui-ci), on retranche du dividende le produit du diviseur par le quotient. Et on recommence de même, après avoir décalé le diviseur d'un rang à droite. À la dernière étape, le dividende 19 étant plus petit que le diviseur 23, la division s'arrête. Notons la disposition des baguettes pour l'écriture du résultat 86 et 19/23 : sur la première ligne figure sa partie entière, sur la seconde le numérateur de sa partie fractionnaire et sur la dernière son dénominateur.

Extraction de racines carrées

La procédure, qui est semblable à celle de la division, est illustrée sur la figure 8 par l'extraction de la racine carrée de 55 225. Si l'exemple que j'ai pris donne un résultat exact, ce n'est pas toujours le cas, ce qui conduit naturellement à l'usage des nombres décimaux.

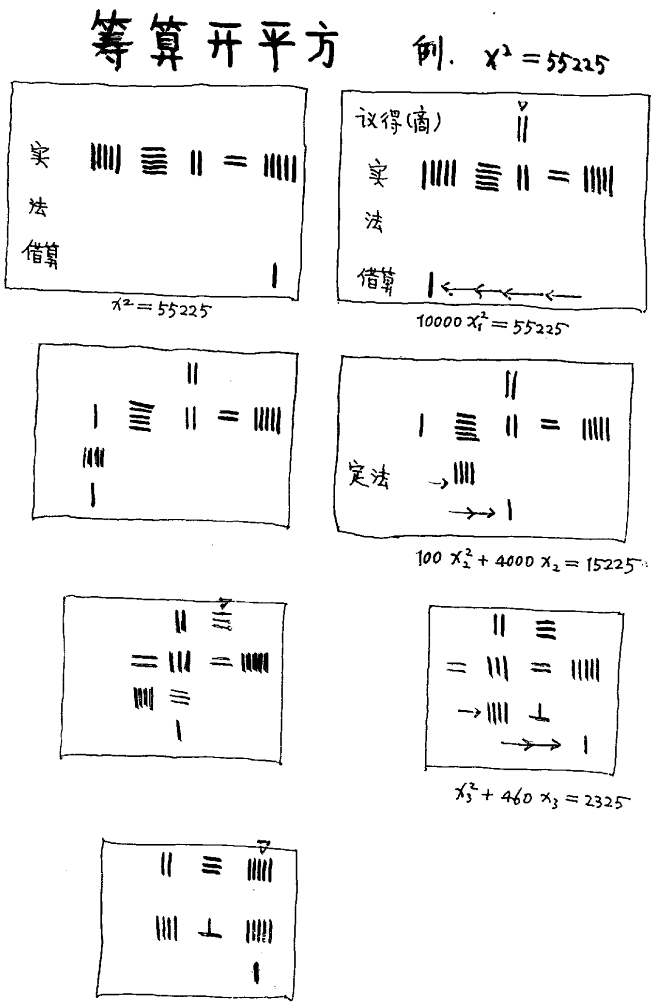
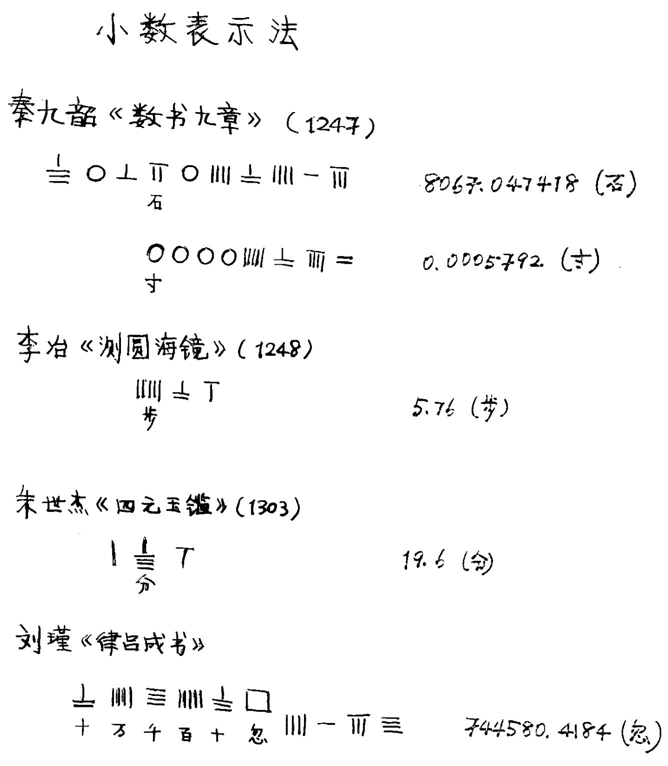


FIG. 8

Écriture décimale d'un nombre

On connaît (fig. 9) plusieurs représentations des nombres décimaux par des mathématiciens qui les utilisaient, en général, pour écrire des mesures de masses et de longueurs dans une unité donnée (par exemple : Liu Hui dans son commentaire des *Neuf chapitres*, Zhao Shuang en 250 apr. J.-C. ou Zhu Shijie en 1299 dans son *Introduction à la science des calculs*). Le symbole représentant l'unité de mesure est placé sous le chiffre des unités, la partie décimale se trouvant à sa droite. C'est le cas des quatre premiers exemples, pris dans les ouvrages des mathématiciens cités plus haut. Liu Jin (époque Yuan, 1279-1368) utilise dans son *Ouvrage accompli sur les tubes musicaux* une autre représentation des nombres décimaux : il décale vers le bas (c'est le cinquième exemple) tous les chiffres après la virgule.



Qin Juishao, *Écrits sur les nombres en neuf livres* (1247)

Li Zhi, *Reflets des mesures du cercle sur la mer* (1248)

Zhu Shijie, *Miroir de jade des quatre inconnues* (1303)

Liu Jin, *Ouvrage accompli sur les tubes musicaux*

FIG. 9

Systèmes d'équations linéaires et équations polynomiales

Dès le I[er] siècle, on sait représenter (fig. 10) l'équivalent d'un système d'équations linéaires et l'équivalent d'une équation polynomiale à une ou plusieurs variables, problèmes qui relèvent tous, comme nous allons le voir, d'un système positionnel.

L’écriture d’un système d’équations linéaires (exemple 1) est semblable à notre notation matricielle (sur les 1re, 2e et 3e lignes se trouvent les coefficients des 1re, 2e et 3e inconnues, et sur la dernière ligne les termes constants).

Pour écrire une équation polynomiale à une variable (exemple 2), on plaçait les différents coefficients les uns en dessous des autres, en allant du terme constant au terme de plus haut degré. Dans l’exemple 2, on a représenté une équation de degré 5.

Zhu Shijie dans son *Miroir de jade des quatre inconnues* (1303) traite d’équations polynomiales à quatre inconnues (exemple 3). Au centre on place le terme constant (ici 0, représenté par le caractère *tai*), puis, en partant du centre, les coefficients des quatre inconnues, suivant leurs puissances croissantes, respectivement dans les directions sud, ouest, nord et est ; les termes rectangles sont alors placés naturellement dans l’un des quadrants, à l’intersection de la ligne et de la colonne correspondant aux puissances des deux inconnues.

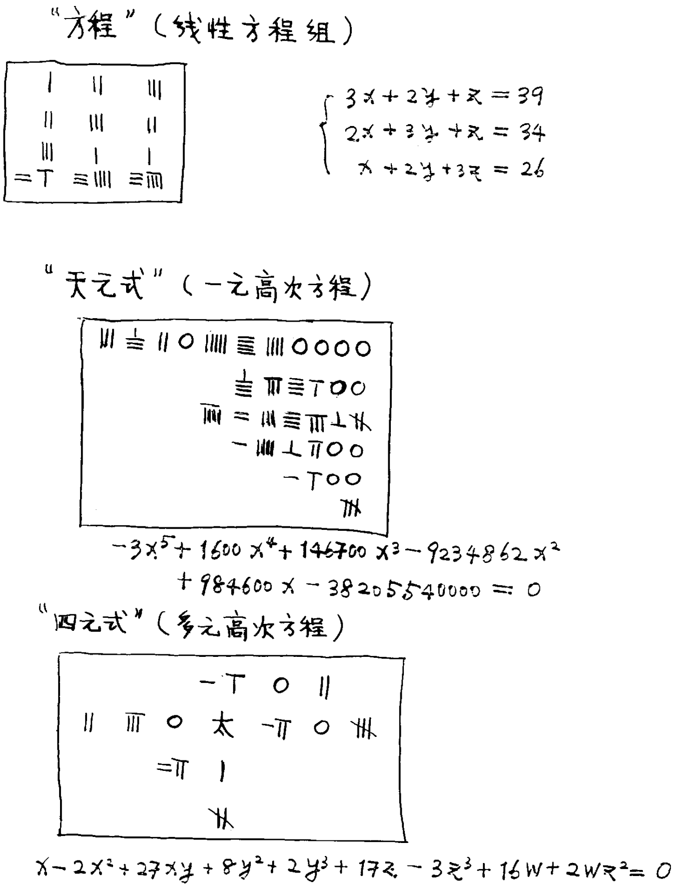


FIG. 10

Cette disposition permet bien sûr l'écriture d'un système d'équations linéaires, mais aussi sa résolution comme le montre la figure 11. En multipliant et soustrayant les colonnes, on obtient de proche en proche un système triangulaire qu'on sait résoudre facilement.

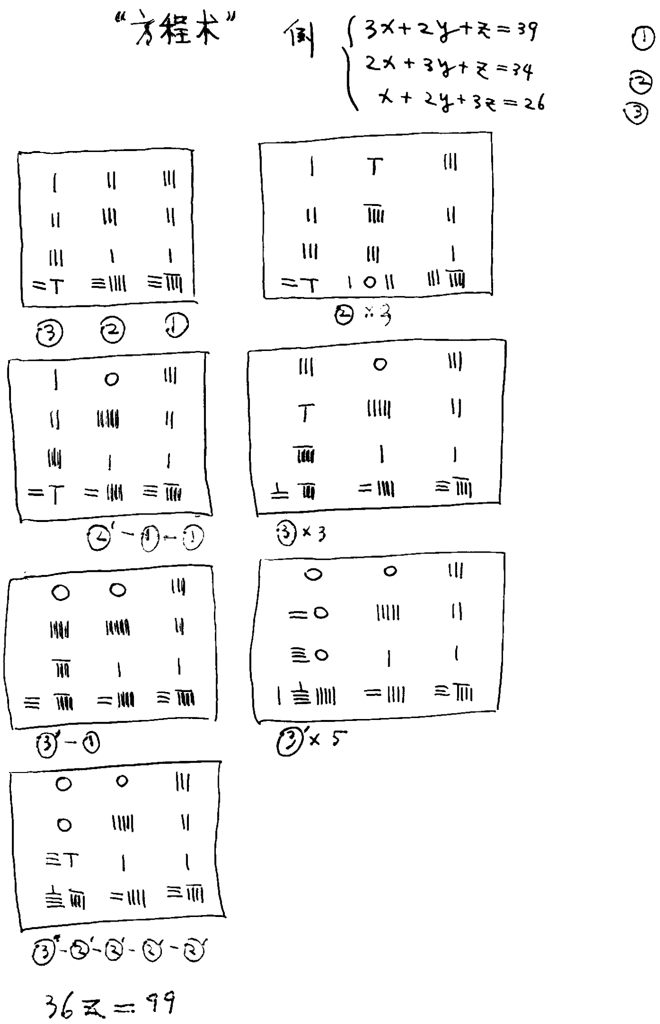


FIG. 11

Bien que, pour expliquer la méthode utilisée, on ait dû « écrire » les différentes étapes de la résolution du système précédent, il faut garder à l'esprit que cette résolution s'effectuait uniquement en manipulant les baguettes sur la surface à calculer. On peut ainsi admirer les prouesses de Liu Hui qui, au III[e] siècle, en manipulant seulement des baguettes à calculer, était parvenu à approcher le nombre π avec six décimales exactes.

LA RÉFORME DES INSTRUMENTS DE CALCUL

Cependant, l'usage des baguettes n'était pas toujours pratique, notamment pour les militaires (il fallait s'arrêter en pleine manœuvre et étaler ses baguettes sur le sol pour faire ses calculs). Une substitution des baguettes à calculer par d'autres moyens commence dès les Ve et VIe siècles. Zhen Luan, dans son *Mémoire sur l'art des nombres* (550 apr. J.-C. ?), propose pour cela plusieurs méthodes, dont les perles à calculer et le calcul mental. On verra plus tard l'apparition du boulier. Une réforme des instruments de calcul est donc commencée et elle va se réaliser, dans les milieux marchands, pendant quatre à cinq siècles, entre le Xe et le XIVe siècle de notre ère. Nous allons voir maintenant quelques méthodes de substitution qui ont en commun une représentation positionnelle décimale des nombres.

Perles à calculer

Zhen Luan ne propose pas moins de quatre méthodes pour représenter des nombres par des perles.

《数术记遗》(550 AD ?) 中
提到的 14 种算法

积算　计数
太一算　两仪算　三才算　珠算
五行算　八卦算　九宫算　运筹算　了知算　成数算
把头算　龟算

太　一　算

太一之行，来去九道。
〔注〕刻板横为九道，竖以为柱。柱上一珠，数从下始，故曰"来去九道"也。

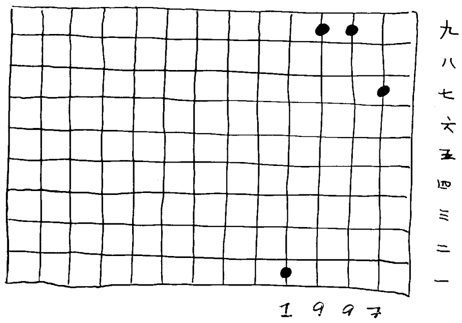


FIG. 12

Dans la première méthode (fig. 12), on utilise des perles de la même couleur et un instrument qu'on a reconstitué à partir de certains textes (mais aucune découverte archéologique n'a encore permis d'en retrouver un). Il est composé de neuf « chemins » horizontaux (correspondant aux neuf chiffres) dans lesquels on peut déplacer les perles et des lignes verticales (correspondant à la position du chiffre dans l'écriture du nombre). Sur la figure 12, on a représenté le nombre 1 997.

Dans la deuxième méthode (fig. 13), on réduit le nombre de chemins de l'instrument à cinq en utilisant des perles de deux couleurs différentes (jaune et rouge), dont la valeur suivant leur position dans les cinq chemins, sera évaluée de façon différente (à savoir : 1, 2, 3 et 4 pour les perles jaunes en partant du bas vers le haut, 5, 6, 7, 8 et 9 pour les perles rouges en allant dans le sens inverse). On peut lire le nombre 207 408 sur l'exemple de la figure 13.

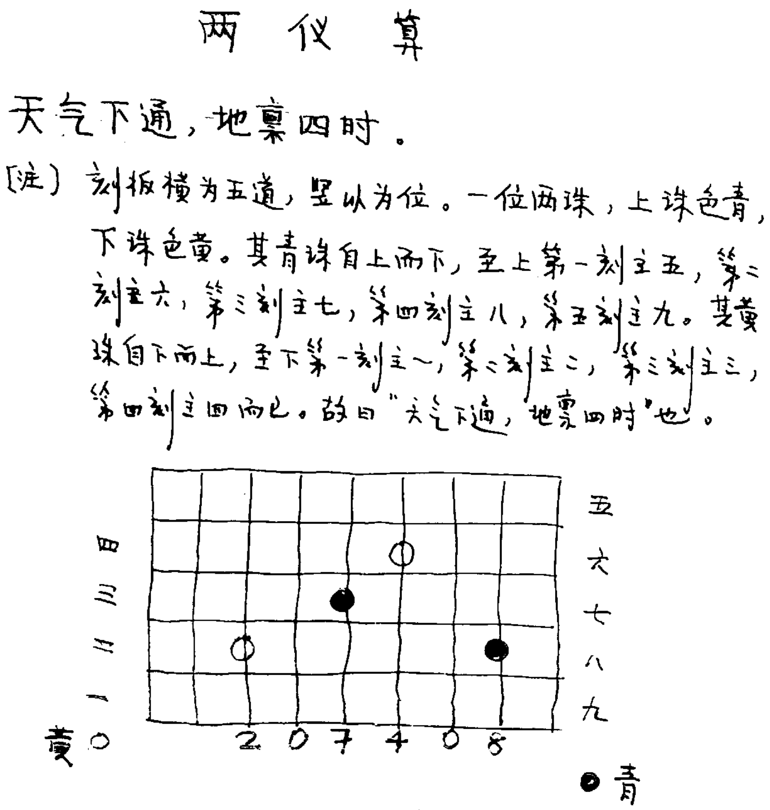


FIG. 13

On peut ramener le nombre de chemins à trois (fig. 14) en utilisant une couleur supplémentaire (la blanche) pour les perles, c'est la troisième méthode de Zhen Luan.

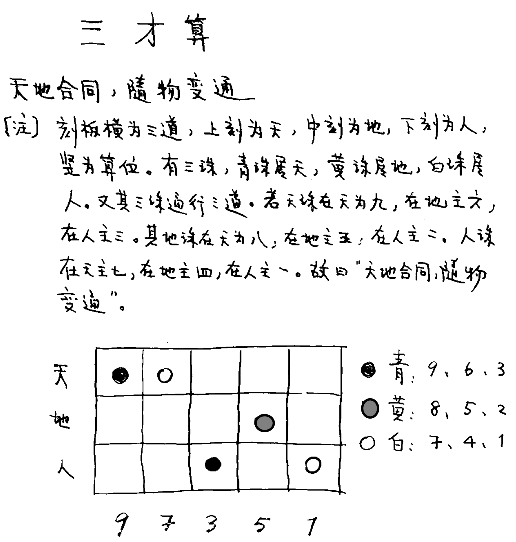


FIG. 14

Dans la quatrième méthode (fig. 15), on utilise un instrument différent, comportant dans la partie supérieure des perles rouges (valant 5 unités chacune) et dans la partie inférieure des perles noires (valant 1 unité chacune), qui sont placées dans des chemins verticaux afin de représenter un nombre. On ne manquera pas de noter la filiation de cette méthode avec celle des baguettes à calculer (rôle privilégié du 5) d'une part, et sa ressemblance avec le principe du boulier d'autre part.

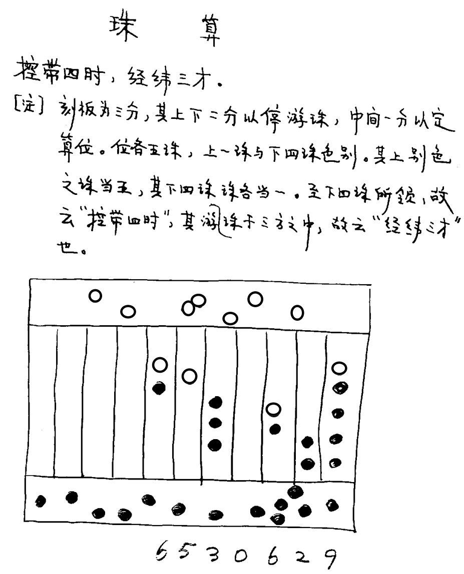


FIG. 15

Les doigts de la main

Ce que vous pouvez voir sur la figure 16 est une méthode plus populaire, qu'on retrouve dans le *Traité systématique de mathématiques* de Cheng Dawei (1592). Chaque doigt est partagé en neuf parties (la droite, le centre et la gauche des trois phalanges) représentant les neuf chiffres qu'on montre avec l'autre main, le doigt ainsi désigné donne alors la position du chiffre dans le nombre (chiffre des centaines, des dizaines, des unités, des dixièmes et des centièmes en partant du pouce vers l'annulaire). La grande commodité de cette méthode, dit-on, est de pouvoir faire les calculs « les mains dans les manches ». Cette pratique continue encore aujourd'hui dans les marchés clandestins (encore appelés marchés « fantômes »). Si on veut, par exemple, acheter un bœuf sans que les concurrents soient avertis du prix proposé, on peut communiquer ainsi par des signes de la main.

FIG. 16

Le boulier

La figure 17 montre le boulier tel qu’il est représenté dans le *Traité systématique de mathématiques* (1592) de Cheng Dawei.

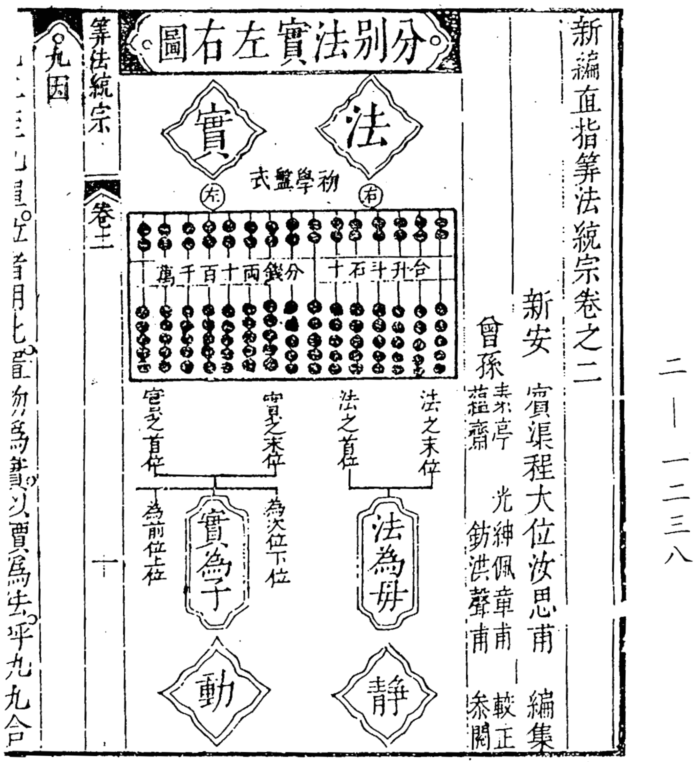


FIG. 17

Les origines du boulier sont assez mystérieuses. Les historiens proposent en général trois dates : les Printemps et Automnes (770-476 av. J.-C.), la dynastie des Han (206 av. J.-C.-220 apr. J.-C.), la fin des Yuan (1279-1368). Je pencherai personnellement pour la fin des Yuan. En effet, de la même façon que les Chinois distinguaient le *suanchou* (c’est-à-dire les baguettes à calculer) du *chousuan* (c’est-à-dire le calcul à l’aide des baguettes), je pense qu’il faudrait distinguer le boulier, en tant qu’instrument, des techniques de calcul qui lui sont associées. Or c’est seulement à l’époque des Yuan qu’apparaissent ces techniques.

Comme j’ai appris qu’un atelier sera consacré au maniement du boulier et aux techniques de calcul associées, je n’en dirai pas plus sur ce dernier sujet.