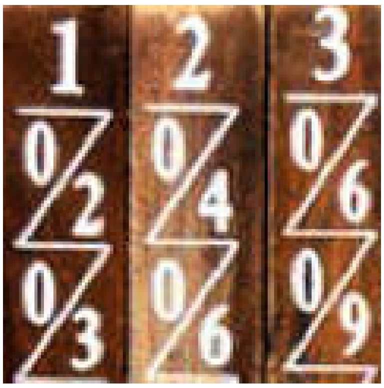
http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article753

Les abaques, outils de numération et de calcul

- Premier degré
- Abaques et bouliers
-



Date de mise en ligne : lundi 9 juin 2014

Cet article traite de l'utilisation de quelques abaques dans le domaine de la numération et du calcul.
Une première partie décrit des algorithmes anciens de multiplication (égyptienne, chinoise, per gelosia, avec les doigts), une seconde montre comment la technique de la multiplication per gelosia à donné lieu à la rabdologie (science des bâtons : réglettes de Neper et de Genaille), et une dernière parle de divers types de bouliers et en particulier de leur utilisation à l'école primaire.
Pour un exemple d'outil Â« prêt à l'emploi Â» à utiliser en classe, voir l'article Tutoriels d'apprentissage du Kit Calculus

« »

Sommaire

1. **Algorithmes de multiplication**
   [-] La multiplication égyptienne
   [-] La multiplication chinoise
   [-] La multiplication per gelosia
   [-] La multiplication avec les doigts
2. **La rabdologie**
   [-] Les bâtons de Neper
   [-] Les réglettes de Genaille-Lucas
3. **Les bouliers**
   [-] La construction du nombre et de la numération dans les programmes de l'école primaire
   [-] Boulier européen
   [-] L'abaque à tiges
   [-] Le boulier chinois
   [-] Le boulier japonais
   [-] Le boulier russe
   [-] Les bouliers numériques

Algorithmes de multiplication

1. ALGORITHMES DE MULTIPLICATION

De tout temps, l'homme a cherché à produire et utiliser des algorithmes « simples » et efficaces facilitant les calculs. C'est notamment le cas pour la multiplication. Voici quelques-uns de ces procédés manuels. Ils ont en commun l'utilisation minimale, voire nulle des tables de multiplication.

a) La multiplication égyptienne

Il s'agit d'une méthode écrite utilisant uniquement l'addition et la duplication, datant de presque 4 000 ans !
Cette technique est notamment connue grâce au papyrus *Rhind* écrit au XVIe siècle avant notre ère dans lequel le sage *Ahmès* expose les connaissances mathématiques de son temps.

Domaine d'application et intérêt : la technique de multiplication en Égypte repose sur la décomposition de l'un des nombres en puissances de deux et la création d'une table de puissance pour l'autre nombre. Elle a l'avantage de ne faire appel qu'à des multiplications par deux ; des soustractions et des additions.
Les Égyptiens de l'antiquité disposent de tables contenant un grand nombre de puissances de deux pour ne pas être obligés de les recalculer à chaque fois.

[2^0]	[2^1]	[2^2]	[2^3]	[2^4]	[2^5]	[2^6]	[2^7]	[2^8]
1	2	4	8	16	32	64	128	256

Algorithme : il est constitué de trois étapes.

1. Décomposition en puissances de deux de l'un des nombres. Les Égyptiens savent de façon empirique qu'une puissance de deux donnée n'apparaît qu'une seule fois dans un nombre. Pour la décomposition, ils procèdent méthodiquement : ils trouvent d'abord la plus grande puissance de deux inférieure ou égale au nombre en question, la soustraient et recommencent l'opération jusqu'à ce qu'il ne reste plus rien ;
2. construction de la table des puissances de deux du second nombre ;
3. calcul du résultat : il s'obtient en additionnant tous les nombres de la dernière colonne dont la puissance de deux correspondante fait partie de la décomposition du premier nombre.

Exemple.
On souhaite faire la multiplication de 25[\times]7 . On commence par décomposer le nombre 25 :
[-] La plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à 25 est 16 et 26 - 16 = 9 ;
[-] la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à 9 est 8 et 9 - 8 = 1 ;
[-] la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à 1 est 1 et 1 - 1 = rien.
Donc, 25 = 1 + 8 + 16

On a alors :

✓	1	**7**
	4	28
✓	8	**56**
✓	16	**112**

*D'où 25[\times]7 = 7 + 56 + 112 = **175**.*

b) La multiplication chinoise

Il s'agit d'une méthode qui permet de multiplier en utilisant des baguettes. Elle est parfois appelée méthode japonaise.

Domaine d'application et intérêt : c'est une technique graphique dérivée des mathématiques indiennes qui permet de multiplier en dessinant des traits.

Algorithme : il est basé sur le tracé de traits matérialisant les différents chiffres et du dénombrement de leurs points d'intersection.

1. On trace verticalement de gauche à droite plusieurs séries de traits correspondant aux chiffres du premier nombre et horizontalement de haut en bas plusieurs séries de lignes correspondant aux chiffres du second nombre ;
2. on matérialise le nombre de points d'intersection entre les lignes horizontales et verticales ;
3. on additionne ces points sur chacune des « diagonales » en commençant par la diagonale la plus à droite. Les retenues éventuelles sont reportées sur la diagonale suivante. Le résultat de la multiplication se lit de gauche à droite.

Exemple : 123[\times] 21 = 2 583

c) Multiplication per gelosia

Il s'agit d'une méthode utilisant un tableau venant de la civilisation indienne au XIIe siècle, puis introduite en Europe par *Fibonacci*, très utilisée jusqu'au XVe siècle. Le nom per gelosia provient des fenêtres jalousies, sorte de volets à travers lesquelles la lumière passe en diagonale et qui permettent de voir sans être vu.

Cette technique illustre bien la diffusion mondiale de certaines techniques mathématiques puisqu'on la retrouve simultanément à des périodes différentes en Chine, en Inde, dans le monde arabe et en Europe.

Domaine d'application et intérêt : cette méthode permet de multiplier deux nombres quelconques, entiers ou décimaux, écrits dans une base ou un produit n'a jamais plus de deux chiffres. Elle nécessite la connaissance des tables de multiplication, comme notre technique usuelle.

Algorithme : soient x et y deux nombres à multiplier et n et m leurs nombres de chiffres respectifs.

1. On commence par dessiner un tableau rectangulaire de n[\times] m cases carrées ainsi que les diagonales montantes des cases de ce tableau ;
2. on inscrit les deux facteurs à l'extérieur du tableau. Si le facteur horizontal est écrit de la gauche vers la droite, alors le facteur vertical est écrit de haut en bas. Si le facteur horizontal est écrit de la droite vers la gauche, alors le facteur vertical est écrit de bas en haut ;

3. on inscrit tous les produits dans les cases correspondantes, le chiffre des dizaines étant écrit dans le triangle du haut et le chiffre des unités dans celui du bas ;
4. on calcule les sommes à l'intérieur de chaque bande diagonale puis on lit le résultat dans le même sens qu'a été écrit le facteur horizontal.

Exemple : 735[\times] 42 = 30 870
[JPEG - 28.8 ko] **Multiplication per gelosia**

La multiplication par gelosia, bien que très intéressante, présente tout de même quelques défauts : elle est compliquée à « imprimer », elle demande la compréhension du système des retenues, et enfin, la connaissance des tables de multiplication est indispensable.

Exemple d'utilisation hors de l'Europe : en pays d'Islam, plusieurs mathématiciens de langue arabe ont utilisé cette technique dès le VII^*e* siècle. La figure ci-dessous, correspond à la multiplication 345[\times] 437 issue du manuscript de Pamiers.
[JPEG - 62.1 ko] **Multiplication per gelosia (arabes)**

En Chine, l'utilisation du tableau est attestée pour la première fois en 1450. Le tableau ci-dessous est tiré d'un texte de *Jiunzhiang suanfa bilei daquan* (somme des méthodes de calcul des neuf chapitres comportant des problèmes résolus par analogie avec des problèmes-type) écrit par le gouverneur financier de la province du *Zhejiang* : *Wu Jing*.

Soit 3069 liang 8 qian 4 fan de soie. Chaque liang coûte 2 guan 603 wen 7 fen 5 li.
Quel est le prix total ? Réponse : 7993 guan 95 wen 9 fen.
[JPEG - 129.1 ko] **Multiplication per gelosia (chinois)**

d) Multiplication avec les doigts

C'est une généralisation de la table de multiplication avec les doigts par 9 : il s'agit d'une méthode naturelle qui ne nécessite que ses deux mains et qui permet de calculer un produit dont les deux facteurs sont compris entre 5 et 9 connaissant les tables de multiplication de 1 à 4.

Domaine d'application et intérêt : l'intérêt de cet algorithme est qu'il suffit de connaître la partie plus facile de la table de multiplication où les deux facteurs sont compris entre un et quatre pour trouver les multiplications plus difficiles.

Algorithme : soient x et y les deux entiers compris entre cinq et neuf à multiplier.

1. Sur une main, on replie autant de doigts que ce qui dépasse cinq dans x ;
2. sur l'autre main, on replie autant de doigts que ce qui dépasse cinq dans y ;
3. le nombre de doigts repliés correspond au nombre de dizaines du produit, auquel on ajoute le produit des doigts levée sur chacune des deux mains.[JPEG - 29.9 ko] **Multiplication avec les doigts**

Justification :

- le nombre x est représenté sur une main par x - 5 doigts repliés et 10 - x doigts levés ;
- le nombre y est représenté sur l'autre main par y - 5 doigts repliés et 10 - y doigts levés.
- Calcul des dizaines : d = (x - 5) + (y - 5) = x + y - 10 ;
- calcul des unités : u = (10 - x)(10 - y) = 100 - 10(x + y) + xy.
- Calcul du produit : 10d + u = 10(x + y - 10) + 100 - 10(x + y) + xy
  = 10x + 10y - 100 + 100 - 10x - 10y + xy = xy.

Haut de la barre d'onglets

La rabdologie

2. LA RABDOLOGIE

Les instruments ont été introduits afin de faciliter les calculs et de les rendre accessibles à un plus grand nombre de personnes.
La rabdologie (du grec *rhabdos*, bâton et *logos*, discours) est la science du calcul par l'utilisation de bâtonnets.

a) Les bâtons de Neper

Le mathématicien écossais *John Napier* inventa en 1617 un abaque facilitant le calcul des produits, quotients, puissances et racines, qui est connu en français sous le nom de *bâtons de Napier*, ou *réglettes de Neper*. Son nom anglais est *Napier's bones* en raison de la matière originelle de l'instrument : l'os. Il décrit sa nouvelle invention dans son ouvrage *Rabdologiae*.

L'abaque est constitué d'un plateau sur lequel peuvent être placée des bâtonnets gravés. Le bâton le plus à gauche constitue l'index, il est divisé en neuf cases numérotées de 1 à 9. Les autres bâtons sont divisés en une case supérieure qui porte un nombre entre 0 et 9 et de neuf cases correspondants aux résultats de la table de multiplication par le nombre de la case supérieure.
Ce sont des réglettes en forme de pavé droit comportant 4 « faces » avec chacune une table de multiplication différentes. Cela permet de multiplier le nombre de possibilités de former les nombres du multiplicande.

Ces bâtons permettent d'effectuer des multiplications, des divisions et des extractions de racines carrées.
[JPEG - 321.4 ko] **Bâtons de Néper**

Les bâtons de Néper permettent de simplifier la multiplication « per gelosia » en s'affranchissant de la connaissance des tables de multiplication.
Pour faire la multiplication d'un nombre x par un nombre y à un chiffre, il suffit de disposer du bâton index, puis d'aligner les bâtons constituant le nombre x de gauche à droite.
Puis, à la manière de la multiplication per gelosia, on lit le nombre obtenu en additionnant en diagonale les nombres correspondants à la ligne du y.

Exemple : 7[\times] 2732 = 19 124
[JPEG - 76.2 ko] **Bâtons de Néper : exemple**

Exemple de bâtons imprimables ici.

Les bâtons numériques d'Alain Busser ici.

b) Les réglettes de Genaille-Lucas

À la fin du XIXe siècle, l'ingénieur de l'Armement *Henri Genaille* et le mathématicien *Edouard Lucas* inventent des réglettes qui permettent par simple lecture d'effectuer le produit d'un nombre quelconque par un nombre à un chiffre. Ces réglettes sont fabriquées de telle sorte qu'il n'y a pas à se soucier des retenues, contrairement aux règlettes de Néper.

Comme pour les bâtons de Neper, on dispose d'une réglette index et de dix réglettes, une par chiffre, de zéro à neuf.
[JPEG - 73.8 ko] **Réglettes de Genaille-Lucas**

Le principe est que chaque réglette x donne, pour chacun des nombres y de 0 à 9, les possibilités de résultat de la multiplication de x par y en incluant les éventuelles retenues issues des ordres inférieurs.

Concrètement, pour multiplier un nombre x par un nombre y à un chiffre, on aligne les différentes réglettes afin de former le nombre x à droite de la réglette index, puis on « lit » de droite à gauche le résultats obtenu en commençant par le nombre le plus haut à l'intersection de la ligne du y et de la réglette la plus à droite.
Ensuite, il suffit de suivre les flèches unes à unes qui indiquent successivement les chiffres du résultat de l'opération.

Exemple : 7[\times] 5 802 = 40 614
[PNG - 349.2 ko] **Réglettes de Genaille-Lucas : exemple**

Exemple de réglettes numériques ici.

Les réglettes numériques d'Alain Busser ici.

Exemple de réglettes imprimables ici.

Haut de la barre d'onglets

Les bouliers

3. LES BOULIERS

Les bouliers constituent des outils intéressants pour l'apprentissage de la numération et la compréhension des techniques expertes de calcul. Leur utilisation par les professeurs des écoles par exemple est un plus indéniable à la matérialisation de ces concepts !

a) La construction du nombre et la numération dans les programmes de l'école primaire

Dans les années 50, les nombres étaient étudiés les uns après les autres en même temps que les opérations, comme en témoigne ce manuel : le « livre de calcul pour les tout petits » de *Hattemer-Prignet*.
[JPEG - 109.1 ko] **Livre de calcul pour les tout petits**

On y voit dans la table des matières « les nombres 1 et 2 », puis successivement « le nombre 3 », « le nombre 4 »... « le nombre 20 », « de 21 à 30 » et ainsi de suite jusqu'à 100.
[JPEG - 41.3 ko] **Table des matières**

Voici par exemple comme est étudié les nombre 5 : le boulier de type européen n'est pas utilisé en tant qu'outil de numération décimale, mais plus comme outil de décomposition du nombre 5 en somme de deux ou trois nombres.
On remarque différentes représentations du nombre 5 grâce à des lapins, des bâtonnets, des dominos, des boules...
[JPEG - 53.6 ko] **Le cinq**

Actuellement, on construit le nombre à la maternelle. D'après le B.O. n°2 du 26 mars 2015, cette construction intervient notamment dans le domaine « Construire les premiers outils pour structurer sa pensée » qui décrit les objectifs visés par cette construction :

- construire le nombre pour exprimer les quantité ;
- stabiliser la connaissance des petits nombres ;
- utiliser le nombre pour désigner un rang, une position ;
- construire des premiers savoirs et savoir-faire avec rigueur

Une fois ces aspects du nombre parfaitement maitrisés, d'après les programmes qui entreront en rigueur à la rentrée 2016 « Les élèves consolident leur compréhension des nombres entiers. Ils étudient différentes manières de désigner les nombres, notamment leurs écritures en chiffres, leurs noms à l'oral, les compositions-décompositions fondées sur les propriétés numériques, ainsi que les décompositions en unités de numération. »

De nombreux outils « classiques » existent afin d'aider les élèves dans leur représentation des nombres : picbille, multibase, fourmillions, compteurs, abaques. . .
L'abaque donne du sens à la numération et aide à l'installation de représentations mentales favorisés par :

- les groupements par 5 et/ou 10 ;
- les échanges ;
- l'aspect « positionnel ».

b) Le boulier Européen

C'est un boulier à 10 tiges, comportant 10 boules par tige. Il est souvent utilisé sans lien direct avec notre système positionnel, afin de faire comprendre le rôle de la dizaine aux élèves du CP (ou du CE1) et lié au principe cardinal.
[JPEG - 25.9 ko] **Boulier européen**

Au cycle 2, une boule vaut une unité, le boulier vaut donc 100 unités, ce qui est conforme au programme du CP, où les élèves doivent savoir compter jusqu'à 100.
Une rangée vaut alors 10, ou encore une dizaine. Si 3 rangées et 2 boules sont activées en étant déplacées vers la droite par exemple, le nombre représenté est 32, qui correspond à 3 dizaines et 2 unités.
Il existe sur la toile des fiches d'exercice de lecture ou de représentation des nombres liées à ce boulier.

L'utilisation peut également être faite de manière positionnelle, en considérant chaque ligne comme un ordre du système décimal.

Au cycle 3, et notamment à partir du CM1 où apparaissent les fractions décimales et leur codage en nombres décimaux, le boulier entier devient une unité. (Une boule représente alors 1/100 ou 0,01 et une rangée représente 10/100 (en nombre de boules) = 1/10 (en nombre de rangée) = 0,1 (écriture décimale).

Dans cette vidéo, vous pouvez voir son utilisation par des professeurs des écoles en cycle 2 et en cycle 3.

c) L'abaque à tiges

Sur l'abaque à tiges, l'écriture des chiffres qui composent un nombre est représentée par sa quantité sur une tige qui lui correspond. Chaque tige ne peut comporter que 9 objets au maximum.

On peut faire varier le nombre de tiges en fonction du niveau :

- 2 au CP ;
- 3 au CE1 ;
- 6 ou 2 X 3 au CE2...[JPEG - 17.8 ko] **L'abaque à tiges**

Généralement, on dispose de jetons totalement identiques (forme et couleur). 10 jetons d'un tige sont échangés contre un jeton que l'on met sur la tige située immédiatement à sa gauche et ainsi de suite. (L'abaque permet de travailler l'aspect positionnel de la numération écrite en chiffres.

Les objectifs que l'on peut travailler avec l'abaque sont :

- pratiquer les échanges jusqu'à 10 contre 1 (ceci permet d'aborder plus facilement la technique de l'addition à retenue) ;
- donner du sens à la notion de dizaine ; mettre en place une stratégie de comparaison ne reposant pas seulement sur la notion de cardinal ;
- comprendre le fonctionnement de la numération de position ;
- reconstituer la collection à partir de l'écriture chiffrée (cette activité permet aussi d'aborder plus facilement une technique opératoire de la soustraction à retenue)...

Dans cette vidéo, vous pouvez voir son utilisation par des professeurs des écoles en cycle 2 et en cycle 3.

d) Boulier chinois ou suanpan

Une tige représente une position du système décimal, elle possède deux quinaires (cinq unités) et cinq unaires (une unité). Une boule est activée lorsqu'elle est déplacée vers la barre transversale.
En général, le suanpan est composé de 13 tiges (mais pas tout le temps), il permet de coder les nombres étudiés à l'école primaire (de 0,000 1 à 1 000 000 000).

On y effectue des échange à 10 contre 1, mais aussi à 5 contre 1.
[JPEG - 34.9 ko] **Boulier chinois (suan-pan)**

Les opérations au boulier chinois : lorsque l'on fait des opérations, le boulier permet de voir les états successifs au cours des différentes phases de calcul cela permet de suivre son mécanisme et par suite d'en analyser le

fonctionnement. Les différentes façons d'échanger permettent de suivre plusieurs « stratégies » pour effectuer des calcul.
[JPEG - 17.3 ko] **Addition au boulier chinois**

Pour la soustraction, il existe actuellement dans les programmes de 2008 trois techniques utilisables :

- l'addition à trou
- la technique classique
- la technique anglo saxonne, par emprunt, par cassage C'est cette dernière qui est utilisée sur le boulier

Pour une utilisation en classe par les élèves, la manipulation du boulier se faisant à l'horizontale, l'utilisation du boulier numérique à vidéo-projeter, par exemple celui de sésamath peut être pertinent afin de montrer en même temps les déplacements.
[JPEG - 39.2 ko] **Boulier numérique sesamath**

e) Le boulier japonais ou soroban

Le principe est semblable au boulier chinois, mais il dispose de moins de boules par tige : une quinaire et quatre unaires. Il s'apparente ainsi à l'abaque romain portatif.

L'écriture d'un nombre est donc unique, contrairement au boulier chinois.
Le calcul est en moyenne plus rapide que pour le suan-pan, ceci étant dû d'une part au fait que les possibilités d'écriture sont moins nombreuses, mais aussi de la forme des boules elles-mêmes qui permettent une manipulation légèrement plus rapide, car le doigt s'insère plus facilement dans l'espace entre deux boules.
[JPEG - 31.1 ko] **Boulier japonais (soroban)**

On peut voir sur cette vidéo le dextérité des élèves d'une école de boulier japonais !

f) Le boulier russe ou stchoty

Il s'utilise verticalement et possède dix boules par tiges sauf une qui n'en possède que quatre : elle servait pour noter les quarts de rouble. Les tiges sont en général incurvées, ce qui permet aux boules de tomber naturellement d'un côté ou de l'autre.

Une boule est activée lorsqu'elle est déplacée vers la gauche. Il a été enseigné dans les écoles de l'union soviétique jusque dans les années 1990.
[JPEG - 29.1 ko] **Boulier russe (stchoty)**

g) Les bouliers numériques d'Alain Pauty

Alain Pauty a créé des bouliers numériques très progressifs de la GS au CE1.
Plusieurs articles y sont consacrés sur ce site même, n'hésitez pas à y faire un tour !

Haut de la barre d'onglets

