Fractions, décimaux et proportionnalité en CM1 et CM2

Alain LEBON

Université de la Réunion
Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques
Parc technologique universitaire
2 rue Joseph-Wetzell, 97490 Sainte-Clotilde

SOMMAIRE

FONCTIONS NUMÉRIQUES ET PROPORTIONNALITÉ

ANNEXES

Remerciements :

Les expérimentations qui ont donné lieu à l'édition de cette brochure ont été conduites pendant plusieurs années avec la collaboration de :

- Madame TECHER J. classe de perfectionnement de l'école de la Chaumière à Saint-Denis
- Madame RIFFAT Dominique, C.P.E.N., classe de CM1 de l'école J.B. Bossard
- Madame PASSARELLI Danielle, C.P.E.N., classe de CM2 de l'école J.B. Bossard
- Madame DIEUDONNÉ Marie Andrée, I.M.F., classe de CM2 de l'école J.B. Bossard

- Madame CLERET Marie-Claire, institutrice qui enseigne depuis de nombreuses années en CM1 en suivant la première édition de ce travail a bien voulu me faire part de quelques remarques et m'apporter quelques précisions sur l'organisation des activités en CM1 et CM2.

- Monsieur BOYER Jean-Paul, I.M.F., classe de CM2 de l'école d'application rue Sainte-Marie à Saint-Denis qui enseigne également depuis de nombreuses années en CM2 en suivant la première édition de ce travail m'a donné les conseils du praticien pour la présentation des feuilles en annexe.

Pour cette nouvelle édition, c'est encore Madame NATIVEL Clairette qui a assuré la frappe "au kilomètre", l'auteur en ayant assuré la présentation, les schémas et dessins, et la mise en page.

Remerciements particuliers à Monsieur MALAISE Michel, chef de la MAFPEN, sans qui se travail de réédition aurait été impossible.

Nous avons pris pour base de travail les tomes 1, 2 et 3 de l'ouvrage :
"Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire", cycle moyen, ERMEL HATIER.
ainsi que des idées et des textes de problèmes dans les ouvrages suivants :
"Math et calcul" CM1 et CM2, R. EILLER, S. ET J. RAVENEL, Classiques HACHETTE.
"Calculer, mesurer, résoudre", Collection MERIGOT, NATHAN.
"Aides pédagogiques pour les maîtres du cycle moyen", par un groupe de professeurs d'École Normale, Brochure B.O. 31, CRDP de NICE.

Les recherches ont été menées dans le cadre de l'IREM d'AIX-MARSEILLE, antenne de la RÉUNION. La première édition parut en juillet 1983 sous le même titre.

L'objectif de cette publication est toujours de venir en aide aux maîtres en leur proposant une progression suffisamment lente et détaillée qui permette à tous les enfants d'atteindre les objectifs fixés par les programmes officiels.

Quelques jalons pour une organisation des activités mathématiques au cycle moyen

CM1 : 1ére et 2ème périodes.

Numération : Mise au point des connaissances des enfants, travail sur la demi-droite numérique. Introduction des grands nombres.
Opérations dans l'ensemble des entiers naturels :
S'assurer que les techniques opératoires de l'addition, de la soustraction et de la multiplication sont parfaitement maîtrisées. Ce n'est généralement pas le cas pour la soustraction, hélas, et dans certains cas, l'étude de la technique de la multiplication est à compléter.
Nombreuses situations-problèmes permettant aux enfants de reconnaître, analyser et résoudre des situations relevant de ces opérations et aux maîtres d'en contrôler le degré de maîtrise.
Division : (surtout ne pas la repousser à la 3ème période) des situations problèmes ayant pour but de faire le point des acquis des enfants puis de permettre la construction d'une technique plus affinée. Commencer dès le 15 octobre si l'étude n'a pas débuté au CE2.
Mesure et géométrie : Faire le bilan des connaissances concernant les mesures de longueurs et de masses, les savoir-faire en géométrie : maniement de l'équerre.
Calcul mental. Tables de multiplication et élaboration de procédures en liaison avec les situations-problèmes rencontrées et l'étude des opérations et des fonctions numériques (ajouter, soustraire).

3ème période.

Numération : Entretien
Opérations : Travail principalement axé sur l'étude de la division. Entretien des autres techniques.
Situations-problèmes : En plus de celles ayant pour but l'étude de la division, consacrer des blocs de plusieurs séances consécutives à l'exploration de situations plus complexes et plus globales.
Mesure : Compléter les connaissances des enfants dans l'étude des mesures des longueurs et des masses. Aborder les mesures de volumes (autrefois appelées à ce niveau mesures de capacité).
Géométrie : prévoir des blocs de plusieurs séances consécutives (sur plusieurs jours).
Calcul mental. Divisions très simples, multiplier des nombres assez grands par 2, par 5, par 10.

4ème et 5ème périodes.

Entretien en numération et opérations dans N.
Dès que l'étude de la division sera sur le point d'être "achevée", (ce qui peut se produire avant la fin de la 3ème période) le travail principal portera sur l'étude des fractions puis des nombres décimaux.
Situations-problèmes : Quelques unes auront pour principal objectif d'utiliser et d'étudier des fonctions numériques, de les représenter graphiquement et d'aborder la proportionnalité.
Mesure : Aborder les mesures de surface.
Géométrie : Toujours travailler sur plusieurs séances consécutives après avoir travaillé au 2ème trimestre les reproductions et constructions de figures, les savoir-faire concernant les parallèles et perpendiculaires, l'utilisation du compas sont à entretenir.
Des activités d'agrandissement ou de réduction seront intéressantes à conduire et seront des situations-problèmes relatives à la proportionnalité.
Calcul mental. Somme d'un nombre décimal et d'un entier; sommes de décimaux simples.
Multiplication de décimaux par 10, 100, 1000; divisions de nombres entiers ou décimaux par 10, 100, 1000.

CM2

1ére et 2ème périodes.

Numération - Opérations dans N.
Bilan des connaissances et mise au point en particulier pour la soustraction et la division.
Les grands nombres : décomposer, comparer, ranger, encadrer.
Travaux sur les multiples.
Fractions et nombres décimaux (partie principale).
Révision du CM1, approfondissement.
Produits de fractions, de décimaux.
Situations-problèmes permettant des mises au point et des réinvestissements en particulier comprendre un énoncé.
Mesure : Bilan et mise au point (pas de nouveauté ou les aires si cela n'a pas encore été vu).
Géométrie : Reproduction de figures planes. Droites perpendiculaires, droites parallèles.
Les polygones, les triangles et les quadrilatères particuliers.
Calcul mental : Sommes de plusieurs nombres, différences.
Tables de multiplication et multiples, multiplier par 10, 100,...,par 20, 30,...
Divisions à reste nul, divisions pa r 10, 100,...,par 20, 30,...

3ème , 4ème et 5ème périodes.

Principalement consacrées à l'étude des fonctions numériques et de la proportionnalité.
Au cours de ces séances, on complétera l'étude des fractions et des décimaux.
Numération - Opérations dans N.
Entretien : grands nombres et nombres décimaux. Lecture, écriture, comparaison, encadrements.
Nombres sexagésimaux, calculs de durées par addition et soustraction.
Entretien : Produits de fractions, de décimaux.
Quotients de décimaux
Situations-problèmes. Presque toutes les séances sont consacrées à différents types de situations-problèmes.
Mesure : - Terminer les mesures de surfaces. Aire du disque, longueur du cercle.
- Mesures de volumes.
Géométrie : - Constructions de quadrilatères
- Transformations géométriques.
- cercle et disque et utilisation du compas (au plus tard en 3ème période).
Calcul mental : Calculs simples sur les durées.
Sommes et différences de décimaux. Produits et quotients de décimaux par 2, 3, 4,...par 10, 100,...,
Ajouter ou soustraire des nombres tels que 0,1 - 0,2 - 0,3 - 0,5 - 1,5 - 2,5.
Trouver la moitié, le tiers, le quart, le dixième de nombres entiers ou décimaux dans des cas simples.

Remarque : ne pas hésiter à faire utiliser des calculatrices par les enfants, soit pour vérifier des calculs, soit pour faire porter toute l'attention sur la compréhension des textes en délivrant les enfants de la tâche de calculer (et en les empêchant de se cacher derrière une activité calculatoire).

Nous avons choisi ici de présenter les nombres décimaux comme étant ceux qui peuvent s'écrire sous la forme de fractions décimales.

Nous commençons donc par l'introduction des fractions. Nous avons été amenés à développer l'étude des fractions de façon sensiblement plus importante que ne semblent le suggérer les instructions pédagogiques. En effet, l'observation des résultats et des comportements des élèves des classes où l'étude des fractions avait été menée de façon très succincte, dans le but d'aborder au plus tôt les nombres décimaux, a fait apparaître que si les enfants acquièrent bien les techniques relatives à ces nombres, la compréhension de ces techniques est nettement insuffisante ; les enfants appliquent ces techniques particulières aux fractions et écrivent facilement :

$\frac{45}{7} = 4 + \frac{5}{7}$ ou même 4,5 comme il le font pour $\frac{45}{10}$

A PROPOS DU MOT "FRACTION".

• On appelle **rationnels positifs** les nombres **r** solutions d'équations du type $a = b \times \mathbf{r}$ où a est un entier naturel et b est un entier naturel non nul.

Les nombres entiers naturels sont donc aussi des nombres rationnels positifs.

• De même que les signes ou assemblages de signes suivants :

$\boxed{4}$, $\boxed{2 + 2}$, $\boxed{12 : 3}$, $\boxed{137 - 133}$

ne sont pas des nombres, mais des désignations d'un seul et même nombre que nous appelons "quatre", les fractions ne sont pas des nombres mais des désignations de nombres.

$\frac{2}{3}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{20}{30}$ sont diverses écritures d'un même nombre.

Contrairement aux entiers naturels, ce nombre n'a pas de nom propre. Pour le nommer, il faudrait dire "le nombre dont une écriture est $\frac{2}{3}$" ce qui n'est pas bien sûr d'un usage courant.

• De même qu'il y a égalité entre les 2 représentations $\boxed{12 : 3}$ et $\boxed{2+2}$ du même nombre quatre, il y a égalité entre 2 représentations d'un même nombre rationnel données sous forme de fractions.

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ $\quad 12 : 3 = 2 + 2 \quad$ $2 + 2 = \frac{20}{5}$

• Une fraction est un assemblage de signes désignant un nombre.

• <u>Définition de l'égalité</u> : on dit que a est égal à b si a et b sont deux désignations d'un même objet. On parlera donc d'**égalité de fractions** : les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$ sont deux désignations d'un même nombre rationnel.

La fraction $\frac{2}{3}$ est égale à la fraction $\frac{4}{6}$. La fraction $\frac{2}{3}$ signifie la même chose que la fraction $\frac{4}{6}$.

• Il est inutile d'alourdir le vocabulaire en parlant de fractions équivalentes.

Par contre, nous commettons des abus de langage quand nous disons "produit de fractions" (au lieu de produit de rationnels écrits sous forme de fractions), "additionner deux fractions", "multiplier une fraction par un nombre". En effet, on additionne ou multiplie deux nombres et non pas des dessins ou signes que sont les fractions.

<u>Remarque</u> : une fraction ne désigne pas forcément un nombre rationnel: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ représentent des nombres réels et non rationnels.

C.M.1

FRACTIONS

I. INTRODUCTION DE LA NOTATION FRACTIONNAIRE À PARTIR DE PLIAGES.

I.1. - Pliage de bandes de papier.

Objectifs : **- introduction de la notation fractionnaire**
- lui donner un statut de désignation d'un nombre

Matériel : 3 bandes de 21 cm, par enfant, découpées dans des feuilles blanches $21 \times 29{,}7$ au cutter, d'environ 2 cm de large.

Déroulement : Chaque enfant prend une bande.

1) Pliez exactement en 2 ; ouvrez ; on obtient 2 morceaux. Ils sont de la même longueur.
Écriture : **Comment peut-on appeler chaque morceau ?** (un demi)
Comment l'écrire avec des chiffres ? (beaucoup connaissent $\frac{1}{2}$)
Écrivez $\frac{1}{2}$ **sur chaque morceau.**
Quelle est la longueur de la bande entière ? Écrivez sur votre cahier.
Les enfants proposent $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$ (Il arrive que certains écrivent $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$.)
Effectivement on a plié en 2, on a eu 2 morceaux, 2 demis ; on écrit $\frac{2}{2}$ lu $\frac{\text{deux}}{\text{demis}}$
(Attendre les activités suivantes avant de faire écrire $\frac{2}{2}=1$ sauf si des enfants le proposent.)
Donner les conventions d'écriture :
barre (de fraction) sur la ligne, signe + sur la ligne, signe = dessiné de part et d'autre de la ligne.

2) Prenez une autre bande de papier, pliez-la exactement en 2 puis encore exactement en 2.
Dépliez. On obtient 4 morceaux. On a plié en 4.
Comment s'appelle chaque morceau ? Comment écrire avec des chiffres.
Les enfants écrivent $\frac{1}{4}$ sur chaque morceau..
En comparant les 2 bandes, Écrivez des égalités.
(les enfants ont trouvé :
$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ $\frac{2}{2}=\frac{4}{4}$ $\frac{4}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ et aussi $\frac{4}{4}=4\times\frac{1}{4}$ lu 4 fois $\frac{1}{4}$
que l'on provoquera si ce n'est pas trouvé,
$\frac{4}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ $\frac{4}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ etc.)
Toutes ces écritures sont mises au tableau et vérifiées sur les dessins et sur les bandes, puis copiées par les enfants sur leur cahier.

3) Prenez une autre bande de papier. Pliez la bande exactement en 8.
Demander comment ils ont procédé puis :
On a donc 8 morceaux de la même longueur, comment écrire la longueur d'un morceau ?

La plupart écrivent $\frac{1}{8}$ mais quelques uns écrivent un demi quart : $\frac{\frac{1}{2}}{4}$. Ne pas refuser mais demander une façon plus simple. Généralement, le maître doit apporter l'appellation "**un huitième**"

• **Écrivez des égalités comme précédemment.**

(on obtient $\frac{8}{8}=\frac{4}{4}$ $\quad \frac{4}{8}=\frac{2}{4}$ $\quad \frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ etc. $\quad \frac{8}{8}=8\times\frac{1}{8}$)

• **Trouvez différentes façons d'écrire $\frac{6}{8}$ en utilisant $\frac{1}{2}\,;\frac{1}{4}\,;\frac{1}{8}\,;+\,;-\,;\times$ en s'aidant des bandes.**

(on attend : $\frac{6}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ $\quad \frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ $\quad \frac{6}{8}=\frac{4}{4}-\frac{2}{8}$ $\quad \frac{6}{6}=6\times\frac{1}{6}$ etc.)

4) Reprenez la dernière bande et refaites le pliage qui donne 8 morceaux.
Si on plie encore en 2, on aura combien de morceaux ?
Comment va-t-on appeler chaque morceau ?
Faire écrire la fraction et la lire. ($\frac{1}{16}$, un seizième)
Si on pliait encore une fois en 2, on aurait combien de morceaux?

I.2.Pliages de carrés de papier.

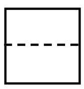
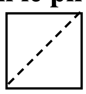
NE PAS SAUTER CETTE ACTIVITÉ QUI S'AVÈRE INDISPENSABLE.

Objectif : **Retrouver, sous un autre aspect, les notions abordées la séance précédente.**

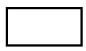
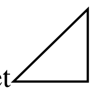
Matériel : Des carrés de 21 cm de côté faits à partir de feuilles 21 × 29,7. Chacun de ces carrés est coupé en 4. Prévoir 3 carrés par enfant.

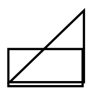
Déroulement :

1) Pliez un carré exactement en 2, marquez bien le pli et ouvrez.

(On obtient généralement  et quelquefois )

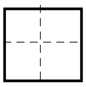
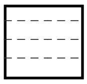
Comment s'appelle chaque morceau obtenu ? Écrire $\frac{1}{2}$ sur chaque morceau.

Faire comparer les 2 types de morceau que l'on a éventuellement obtenus,  et .
Laisser venir les idées.

On arrive à la superposition des 2 morceaux (après qu'ils aient été découpés) ; 
On coupe l'un des 2 triangles et on le reporte sur l'autre.
Conclure : les 2 morceaux n'ont pas la même forme mais ils ont la même quantité de papier.
(Si des activités similaires ont déjà été faites pour introduire les notions de surface et d'aire, on les rappellera et indiquera que les deux morceaux ont la même aire que l'on peut écrire $\frac{1}{2}$).

On pourra enfin donner par convention que l'on ne pliera pas selon une diagonale dans la suite puisque c'est la même chose mais moins facile.

2) **Reprenez le carré, repliez-le en 2 (tous de la même façon) puis pliez encore en 2.**
On obtient 4 morceaux, écriture sur chaque morceau, au verso cette fois puisqu'on a déjà écrit les demis au recto.

Comparaison des pliages obtenus :  et 
En découpant puis superposant chacun des 2 types de quart on constate rapidement qu'ils ont la même quantité de papier.

3). **Prenez un autre carré de papier, pliez-le pour obtenir 8 morceaux de la même grandeur.**
Observations des pliages.
Pliez encore en 2. On obtient 16 morceaux.
• **Hachurez un morceau de** $\frac{1}{16}$. Y écrire $\frac{1}{16}$ même chose avec $\frac{1}{8}$.

• **Tracez le tour d'un morceau de** $\frac{7}{16}$ **et trouvez différentes façons d'écrire** $\frac{7}{16}$.
(ex : $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ ou $7\times\frac{1}{16}$ ou $\frac{1}{2}-\frac{1}{16}$ ou ...) faire justifier au tableau toutes les écritures trouvées.
Coller dans le cahier le dernier carré et recopier les égalités trouvées.

• **Reprenez le 1er carré.** <u>Synthèse</u> du travail fait :

on a plié en 2	**on a eu 2 morceaux**
on a plié en 2, encore en 2	**on a eu 2 $\times$ 2 morceaux soit 4 on a des** $\frac{1}{4}$.
on plie en 2, encore en 2, encore en 2	**on a eu 2 $\times$ 2 $\times$ 2 morceaux soit 8 on a des** $\frac{1}{8}$.

• **Même chose avec une bande de 21 cm déjà utilisée**

4) **Prenez le 3ème carré et pliez-le en 3.** (Aider les enfants)
On obtient 3 morceaux. Nom, écriture (tiers, $\frac{1}{3}$) et égalités : $\frac{3}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ etc.

• **Comparez** $\frac{1}{3}$ **avec** $\frac{1}{2}$ **et** $\frac{1}{4}$. (il suffit de reprendre le 2ème carré)

• **Repassez les deux plis au stylo rouge pour marquer les tiers. Repliez.**
Maintenant pliez en 4. Sans ouvrir, deviner le nombre de morceaux que l'on a faits.
Les enfants doivent justifier les réponses données. Ensuite faire ouvrir et compter les morceaux.
Justification collective des explications données par les élèves à leur réponse précédente.

Conclusion : on a plié en 3 puis en 4 on a eu 3 $\times$ 4 ou 4 $\times$ 3 morceaux soit 12 morceaux.
Chaque morceau : un douzième $\frac{1}{12}$.
Observer un morceau d'un tiers. (Il est partagé en 4.)
Donc si on divise un tiers en 4 parties, on a des douzièmes.
Observer un morceau d'un quart ; il est partagé en 3. Si on divise un quart en 3 parties, on a aussi des douzièmes.

5) Sur le cahier tracez un carré de 12 carreaux de côté. Représentez les plis que l'on vient de faire avec le dernier carré

6) Tracez un carré de 10 carreaux de côté. Hachurez un dixième de ce carré.
Y écrire $\frac{1}{10}$. Tracez en rouge tous les plis que l'on aurait si on avait plié en 10.

• **Maintenant, pour avoir des $\frac{1}{100}$ (centièmes), que faut-il faire ?**
Tracez en bleu les plis que l'on aurait. Hachurez un centième.
Remarquer que pour obtenir des centièmes, chaque dixième est encore divisé en 10 parties. On a alors 10×10 morceaux.
Ceci est important : au CM2 mais aussi plus tard beaucoup d'enfants croient qu'un centième s'obtient en partageant un dixième en <u>2</u> .

7) Tracez un autre carré de 10 carreaux de côté. Hachurez un cinquième ; écrire ($\frac{1}{5}$) .
Tracer en rouge les "plis".

• **Comment faire pour avoir des vingtièmes ?**
Synthèse : Si je plie en 5 puis en 4, j'ai 20 morceaux, 20 vingtièmes.

• **Si on voulait obtenir 30 morceaux avec une bande de papier, ou un carré, comment devrait-on plier ?**

• **On a obtenu des centièmes ; on voudrait avoir des millièmes?**

8) Reprendre les travaux faits sur les carrés de papier. Par observation de ces carrés, faire compléter :

$$\frac{1}{2} = \frac{.}{12} \quad \frac{1}{2} = \frac{.}{100} \quad \frac{1}{2} = \frac{.}{10} \quad \frac{1}{2} = \frac{.}{6}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{.}{12} \quad \frac{1}{4} = \frac{.}{100} \quad \frac{30}{100} = \frac{.}{10} \quad \frac{4}{12} = \frac{.}{3} \quad \frac{2}{3} = \frac{.}{12}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{.}{10} \quad \frac{4}{10} = \frac{.}{5} \quad \frac{7}{10} = \frac{.}{100}$$

II. TRAVAIL SUR LA DEMI-DROITE NUMÉRIQUE.

Objectifs : **Faire comprendre que $\frac{2}{2}=1$ et introduire des fractions supérieures à 1.**

Matériel : - les bandes de 21 cm déjà utilisées.
- une bande de 47,5 cm par enfant

1) Consigne : Mesurez la grande bande avec une de vos petites bandes comme unité.

Faire graduer ensuite la grande bande en veillant à ce que les enfants placent bien les chiffres : certains enfants écrivent 1 et 2 dans les intervalles et non aux extrémités.

• **Écrivez la mesure de la grande bande.**

Examiner collectivement toutes les écritures proposées. On a souvent : $\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{1}{4}$ $\quad \frac{2}{2}+\frac{2}{2}+\frac{1}{4}$

Pour beaucoup d'enfants $\frac{4}{4}$ ou $\frac{2}{2}$ c'est toute la petite bande. Il faut rappeler que nous l'avons prise comme unité. On peut la faire graduer en quarts: 0 , $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$.

Par comparaison avec les graduations de la grande bande on a alors :

$$\frac{4}{4}=1 \quad \frac{2}{2}=1 \quad \frac{8}{4}=\frac{4}{4}+\frac{4}{4} \qquad \frac{4}{4}+\frac{4}{4}=2 \quad \frac{8}{4}=2$$

Ces égalités sont recopiées sur le cahier.

Longueur de la grande bande : $2+\frac{1}{4}$

On peut demander aussi d'avoir tout en quarts : $\frac{9}{4}$

2) Exercice :

Matériel : trois types de bandes fabriquées par le maître, de longueur :

$$\frac{5}{8}\ (13{,}2\text{ cm}) \qquad 1+\frac{3}{4}\ (37\text{ cm}) \qquad 1+\frac{7}{8}\ (39{,}5\text{ cm})$$

Chaque enfant reçoit une bande (une lettre peut être écrite sur les bandes pour pouvoir les nommer).

• **Mesurez la bande que je viens de vous donner avec une de vos bandes.**

Mise en commun : les enfants ayant mesuré la 1ère bande $(\frac{5}{8})$ donnent leur réponse :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\ ,\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ ,\quad \frac{5}{8}\ .$$

Comparaison des différentes écritures trouvées, justifications.

Recherche de la ou des écritures les plus simples, même chose pour les 2 autres bandes;

écritures les plus simples : $\frac{5}{8}$, $1+\frac{3}{4}$ ou $\frac{7}{4}$, $1+\frac{7}{8}$ ou $\frac{15}{8}$.

3) Reprenez la grande bande déjà graduée 0, 1, 2. Ajoutez des graduations en demis.

Écrivez-les en bleu $\frac{0}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$

(Souvent des enfants écrivent à tous les traits : $\frac{1}{2}$)

<u>Égalités</u> : $0 = \frac{0}{2}$ $1 = \frac{2}{2}$ $2 = \frac{4}{2}$ demander de poursuivre :

$3 = \frac{.}{2}$ $4 = \frac{.}{2}$ $5 = \frac{.}{2}$ $12 = \frac{.}{2}$ $30 = \frac{.}{2}$ $148 = \frac{.}{2}$

A la correction, faire référence aux travaux de pliages :

1	c'est	2 demis	donc	
2	c'est	(2 × 2) demis		$2 = \frac{2 \times 2}{2}$
3	c'est	(3 × 2) demis		$3 = \frac{3 \times 2}{2}$
12	c'est	(12 × 2) demis		$12 = \frac{12 \times 2}{2}$
148	c'est	(148 × 2) demis		$148 = \frac{148 \times 2}{2}$

• **Graduez la grande bande en quarts. Écrivez en rouge** ($\frac{0}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, …)

Égalités : $0 = \frac{0}{2} = \frac{0}{4}$ $1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4}$ $2 = \frac{4}{2} = \frac{8}{4}$

de même $3 = \frac{3 \times 4}{4} = \frac{12}{4}$ $23 = \frac{23 \times 4}{4} = \frac{92}{4}$

et aussi $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ …

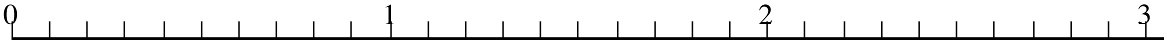
4) Prenez le cahier dans l'autre sens, tracez un trait de 8 carreaux . Ce sera l'unité.
Écrire 0, 1 aux extrémités.
Tracez un trait sur toute la longueur de la page et graduez-le : 0, 1, 2, 3.
Sautez 3 lignes, exactement au dessous, tracez un autre trait et graduez en demis.
Sautez encore 3 lignes, tracez juste au dessous, un autre trait gradué en quarts et enfin un dernier trait gradué en huitièmes (mais sans écrire toutes les fractions sur ce dernier trait).

• **Retrouvez des égalités comme précédemment et écrivez-les.**

• **Placez** $2 + \frac{1}{4}$, $3 - \frac{1}{4}$ $1 + \frac{3}{8}$, $2 + \frac{5}{8}$

5) Exercices individuels sur feuille polycopiée :

• Placer le point A qui correspond à $2 + \frac{3}{5}$, le point B qui correspond à $\frac{17}{10}$, le point C qui correspond à $2 + \frac{1}{2}$



Puis compléter : $2 + \frac{3}{5} = \frac{.}{5}$ $2 + \frac{1}{2} = \frac{.}{2}$ $\frac{17}{10} = . + \frac{.}{10}$

• Trouver les écritures qui correspondent aux points D, E, F. Trouver différentes écritures pour chacun.

(D : $4+\frac{1}{3}$ ou $4+\frac{4}{12}$ ou après avoir écrit $\frac{48}{12}$ sous 4 ou bien $\frac{12}{3}$, on pourra avoir $\frac{13}{3}$, $\frac{52}{12}$)

III. SYNTHÈSE DES RECHERCHES EFFECTUÉES.

Une mise au point et sur cahier de tout ce qui a été fait jusque là peut être entreprise collectivement.

III.1 Écrire un nombre entier sous forme fractionnaire.

• Fractions égales à 1.

$$1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}=\frac{8}{8}=\frac{10}{10}=\frac{12}{12}= \ \dots\ =\frac{100}{100}= \ \dots\ =\frac{235}{235}= \ \dots\ =\frac{1000}{1000}= \ \dots$$

On remarque que l'on a le même nombre en haut et en bas. En bas : le nombre indique en combien de morceaux de la même grandeur on a partagé l'unité, il donne le nom de famille de la fraction.
exemple : $\frac{2}{12}$, $\frac{5}{12}$ se lisent deux douzièmes, cinq douzièmes...
C'est le **DÉNOMINATEUR**
En haut : le nombre indique le nombre de morceaux que l'on a pris, il donne aussi le numéro de la fraction dans la famille. ex : $\frac{0}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, ...
C'est le **NUMÉRATEUR**.

• Fractions égales à un entier.

Les enfants ont déjà vu : $2=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{10}{5}= \ \dots\ =\frac{20}{10}= \ \dots\ =\frac{200}{100}= \ \dots$

que l'on peut écrire $2=\frac{2\times 2}{2}=\frac{2\times 3}{3}=\frac{2\times 4}{4}=\frac{2\times 5}{5}=$ ... lu 2 fois 2 demis, 2 fois 3 tiers,

on arrivera aussi à $2=\frac{2\times 1}{1}=\frac{2}{1}$ en lisant dans l'autre sens.

Exercices :

• Trouver des fractions égales à 7.

• Compléter $7=\frac{\cdot}{15}$ $24=\frac{\cdot}{10}$ etc...

(7 c'est 7 fois "15 quinzièmes" : $7\times\frac{15}{15}$ ou "7 × 15" quinzièmes $7=\frac{7\times 15}{15}$

• Inversement, trouver le nombre entier égal à $\frac{15}{3}$, $\frac{36}{12}$, $\frac{500}{100}$, **....** c'est chercher combien d'unités représente $\frac{15}{3}$, combien de fois 3 tiers, donc en 15 combien de fois 3.

III.2. - Multiplication d'une fraction par un entier.

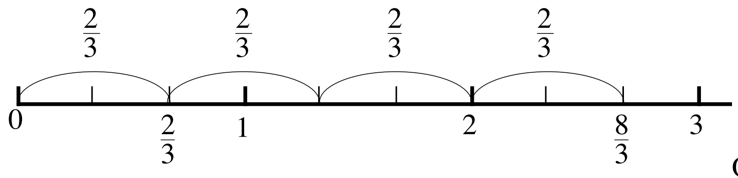
1) On a déjà vu $\frac{4}{4} = 4 \times \frac{1}{4} \qquad \frac{8}{8} = 8 \times \frac{1}{8}$.

Complétez : $\frac{3}{10} = \ . \times \frac{.}{10}$ (3 fois 1 dixième ou $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$)

$\frac{17}{4} = \ . \times \frac{.}{4}$ etc...

2) Cherchons à écrire sous forme fractionnaire le produit $4 \times \frac{2}{3}$.

S'aider d'une droite graduée :



On arrive facilement à $4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

Combien de tiers ? sur le dessin on voit bien que l'on en a 4 fois 2,d'où $\boxed{4 \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{3}}$

• **Même chose à partir d'un autre exemple..** $(5 \times \frac{3}{4})$

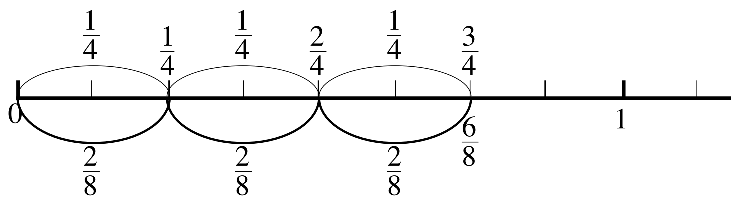
Exercices : $\boxed{12 \times \frac{7}{5} = \quad , \quad 37 \times \frac{3}{4} = \quad , \quad \frac{2}{8} \times 9 =}$

Conclusion : pour multiplier une fraction par un nombre entier, on multiplie seulement le numérateur par le nombre entier.

On peut donner des problèmes : calculer le $\frac{1}{3}$, les $\frac{3}{4}$ d'une somme d'argent, d'une longueur de tissu etc. Les enfants divisent par 3 sans difficulté pour trouver le tiers, divisent par 4 puis multiplient par 3 pour avoir les $\frac{3}{4}$.

III.3. Fractions égales.

On a déjà vu que $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$



Sur le dessin on retrouve : $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$ c'est $\frac{2}{8}$

3 fois $\frac{1}{4}$ c'est donc 3 fois $\frac{2}{8}$ $\qquad 3 \times \frac{1}{4} = 3 \times \frac{2}{8} \qquad \frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2}$

Si nous prenons des graduations en seizièmes (le faire)

alors $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$ et $3 \times \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{16}$ $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 4}{4 \times 4}$

De même en utilisant un exercice fait en douzièmes

$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ $3 \times \frac{1}{4} = 3 \times \frac{3}{12}$ $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3}$

$$\boxed{\text{d' où } \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 2} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3 \times 4}{4 \times 4} = \ \ldots \ = \frac{3 \times 10}{4 \times 10} = \ \ldots \ = \frac{3 \times 100}{4 \times 100} = \ \ldots}$$

<u>Exercices</u> :

Compléter : $\frac{2}{5} = \frac{.}{10} = \frac{.}{30} = \frac{.}{100}$

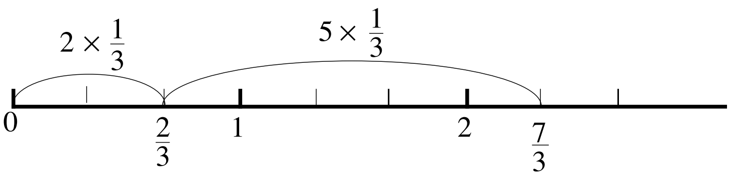
$\frac{7}{4} = \frac{.}{8} = \frac{.}{32}$ $\frac{11}{8} = \frac{.}{24}$

Inversement on pourra proposer la recherche de la fraction égale à une fraction donnée qui s'écrit avec le plus petit numérateur et le plus petit dénominateur possible dans des cas simples.

Exemples pour $\frac{8}{12}$, $\frac{35}{25}$, … $\frac{70}{100}$, …mais l'étude en sera approfondie au CM2.

<u>III.4. Somme et différence de fractions de même dénominateur.</u>

• Ne pose aucune difficulté pour les enfants. On pourra introduire si on le juge utile le schéma suivant :



$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \ (2 \times \frac{1}{3}) \ + \ (5 \times \frac{1}{3})$$

$$= (2+5) \ \times \ \frac{1}{3} = \frac{2+5}{3}$$

• Proposer en contre exemple $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ et trouver le résultat à l'aide d'une graduation en douzièmes (demander de représenter cette somme après avoir tracé un trait sur la longueur du cahier et avoir pris 12 carreaux pour unité)

Conclure : Si les fractions ont le même dénominateur, pour faire leur somme ou leur différence, on fait la somme ou la différence des numérateurs seulement.
Si elles n'ont pas le même dénominateur, il faut trouver des fractions qui leur soient égales, et qui aient le même dénominateur.

III. 5. Écriture avec partie entière.

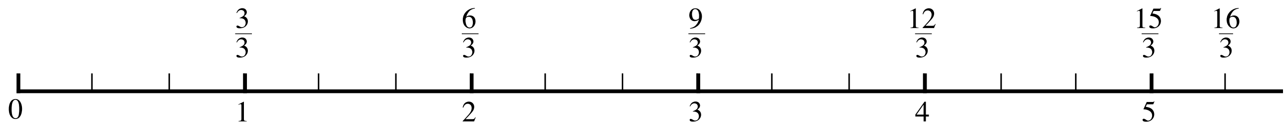
On a déjà vu : $\frac{17}{10} = 1 + \frac{7}{10}$ $\quad \frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}$ $\quad \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

On fera remarquer que $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{1}{3}$ sont des fractions plus petites que l'unité, que 1.

A ce propos on pourra vérifier sur les exercices du cahier que les **fractions plus petites que 1 ont le numérateur plus petit que le dénominateur et que celles plus grandes que 1 ont ...**

• **Problème : Écrire la fraction $\frac{16}{3}$ sous la forme $\cdot + \frac{\cdot}{\cdot}$ où le nombre entier est le plus grand possible et la fraction est plus petite que 1.**

Aux enfants qui ne réussissent pas, on demandera de graduer un trait en tiers en prenant 3 carreaux comme unité et de marquer les nombres entiers.



On lira alors $\frac{15}{3} = 5$ $\quad \frac{16}{3} = \frac{15}{3} + \frac{1}{3} = 5 + \frac{1}{3}$

• Après plusieurs exercices de ce type que les enfants résolvent en tâtonnant plus ou moins, on demandera aux plus rapides d'exposer leur méthode.

Ils disent quelquefois qu'ils cherchent 2×3, 3×3, 4×3, 5×3 ... (c'est à dire le multiple du dénominateur qui est juste inférieur au numérateur). A partir de là on peut faire trouver qu'on cherche "dans le numérateur, combien de fois le dénominateur"..

Exemple : $\frac{34}{5}$ $\quad$ en 34, on a 6 fois 5. $\quad 6 \times 5 = 30$. $\quad \frac{34}{5} = \frac{30}{5} + \frac{4}{5} = 6 + \frac{4}{5}$

Selon le niveau de compréhension des enfants et sur proposition de certains, on peut amener la méthode de division.

Exemple : $\frac{139}{8}$ $\quad \begin{array}{r|l} 139 & 8 \\ \cline{2-2} 59 & 17 \\ 3 & \end{array}$ $\quad 139 = (17 \times 8) + 3$

donc 139 huitièmes c'est 17×8 huitièmes plus 3 huitièmes : $\frac{139}{8} = \frac{17 \times 8}{8} + \frac{3}{8}$

$$\frac{139}{8} = 17 + \frac{3}{8}$$

Exercices : $\frac{23}{10} = \cdot + \frac{\cdot}{\cdot}$ $\quad \frac{47}{7} = \cdot + \frac{\cdot}{\cdot}$ $\quad \frac{67}{12} = \cdot + \frac{\cdot}{\cdot}$

et $\quad \frac{4}{7} + \frac{8}{10} = \frac{\cdot}{10}$ $\quad 3 + \frac{2}{7} = \frac{\cdot}{7}$

$\quad 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\cdot}{4}$ $\quad 3 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} = \frac{\cdot}{100}$

IV. FRACTIONS DÉCIMALES.

<u>Matériel</u> : Une bande de papier millimétré de plus de 20 cm de long et d'environ 5 cm de large par enfant ou la feuille jointe en annexe.

1) Observez les traits les plus épais (correspondant aux centimètres), **graduez 0, 1, 2 en prenant dix "grands" carreaux pour unité.**

2) Graduez en dixièmes.

• Faire noter : $0 = \frac{0}{10}$, $1 = \frac{10}{10}$, $2 = \frac{20}{10}$ et demander : $15 = \frac{.}{10}$ $34 = \frac{.}{10}$, …

• **Placez** $1 + \frac{5}{10}$. Demander ensuite d'en trouver différentes écritures : $1 + \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{10}$

• Faire chercher l'écriture avec partie entière de $\frac{5}{10}$ $(\frac{5}{10} = 0 + \frac{5}{10})$, de $\frac{12}{10}$, de $\frac{21}{10}$

poursuivre avec $\frac{53}{10} = \;.\; + \frac{.}{10}$ $\frac{136}{10} = \;.\; + \frac{.}{10}$, …

3) Placez $\frac{1}{100}$.

Il est généralement nécessaire de rappeler les premières activités faites pour trouver des centièmes : il faut partager l'unité en 100 morceaux. On a déjà partagé en 10, il faut encore partager chacun en 10.

• **Placez** $\frac{0}{100}$, $\frac{10}{100}$, $\frac{20}{100}$, … , $\frac{100}{100}$, … , $\frac{200}{100}$, …

Faire faire les remarques $0 = \frac{0}{10} = \frac{0}{100}$ $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$, …

poursuivre : $\frac{12}{10} = \frac{.}{100}$, $\frac{25}{10} = \frac{.}{100}$, …

• **Placez** $\frac{23}{100}$, $\frac{45}{100}$, $\frac{147}{100}$ (marquer un petit trait).

• **Complétez :** $\frac{23}{100} = \frac{.}{10} + \frac{.}{100}$ $\frac{45}{100} = \frac{.}{10} + \frac{.}{100}$ $\frac{147}{100} = \frac{.}{10} + \frac{.}{100}$

Pour beaucoup d'enfants, il est nécessaire de décomposer la recherche :

$$\frac{23}{100} = \frac{20}{100} + \frac{3}{100}$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$$ car on lit $\frac{20}{100} = \frac{2}{10}$ "sur la bande".

d'autre part, on sait que $\frac{2}{10} = \frac{2 \times 10}{10 \times 10} = \frac{20}{100}$

de même : $\frac{147}{100} = \frac{100}{100} + \frac{40}{100} + \frac{7}{100} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100}$

• Faire faire un assez grand nombre d'exercices de ce type.

Si les acquisitions en numération sont insuffisantes, faire faire des exercices du type :

$$147 = 100 + 40 + 7$$

$$3\,423 = 3\,000 + 400 + 20 + 3$$

$$3\,423 = (3 \times 1000) + (4 \times 100) + (2 \times 10) + 3$$

et aussi $3\,423 = (. \times 100) + (. \times 10) + .$

• Exercices inverses : $\frac{1}{10} + \frac{4}{100} = \frac{.}{100}$ $\quad 1 + \frac{3}{100} = \frac{.}{100}$ $\quad 1 + \frac{6}{10} + \frac{7}{100} = \frac{.}{100}$

$2 + \frac{7}{10} = \frac{.}{10}$ $\quad 12 + \frac{9}{10} = \frac{.}{10}$

4) Reprenez la bande de papier millimétré.

Placez $\frac{0}{1000}$, $\frac{1000}{1000}$, $\frac{2000}{1000}$ puis $\frac{500}{1000}$, $\frac{600}{1000}$, $\frac{1300}{1000}$, $\frac{1800}{1000}$.

Où est placé $\frac{10}{1000}$? $\frac{50}{1000}$?

Que faudrait-il faire pour placer $\frac{1}{1000}$?

• <u>Écritures d'égalités</u> : $\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{.}{1000}$ $\quad \frac{2}{10} = \frac{.}{100} = \frac{.}{1000}$ $\quad \frac{24}{10} = \frac{.}{100} = \frac{.}{1000}$

et inversement $\frac{400}{1000} = \frac{.}{100} = \frac{.}{10}$ $\quad \frac{.}{1000} = \frac{130}{100} = \frac{.}{10}$

• <u>Exercices du type</u> : $\frac{3456}{1000} = \frac{3000}{1000} + \frac{400}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{6}{1000}$

$$= 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000}$$

• Revenir aussi à : **écrire avec partie entière** $\frac{45}{15}$, $\frac{29}{6}$, …

(On a eu la désagréable surprise de voir des enfants répondre mécaniquement, sur la lancée des fractions décimales : $\frac{45}{15} = 4 + \frac{5}{15}$. Un retour à cet exemple permet aux enfants de comprendre ce qu'ils font quand ils écrivent $\frac{45}{10} = 4 + \frac{5}{10}$ (c' est à dire $\frac{4 \times 10}{10} + \frac{5}{10}$)

• De même, demander d'écrire sous forme d'une seule fraction :

$2 + \frac{5}{6}$, $4 + \frac{2}{3}$, $12 + \frac{8}{100}$ (des enfants écrivent $\frac{128}{100}$)

V. COMPARAISONS DE FRACTIONS DÉCIMALES.

Matériel : Une feuille de grand classeur, quadrillée comme les pages des cahiers des enfants ou la feuille jointe en annexe (dans ce cas, le problème ci-dessous ne se pose pas).

Consigne : tenez la feuille "verticalement", la marge à gauche. Sur l'avant dernière ligne, faites un petit trait sur la marge et marquez 9 devant. Comptez ensuite 25 carreaux en remontant marquez 10 devant la marge. (9 et 10 écrits en rouge).

Problème : Comment partager cette unité (de 9 à 10) en 10 morceaux de même longueur ?

Laisser venir les suggestions. Le plus pratique pour les enfants est de partager d'abord en 5 (donc un petit trait tous les 5 carreaux) puis chaque morceau en 2 (donc un petit trait tous les 2 carreaux et demi).

• Faire noter devant les petits traits les écritures en dixièmes à gauche au crayon à papier de $\frac{90}{10}$, $\frac{91}{10}$, ... à $\frac{100}{10}$, $\frac{101}{10}$ .et aussi avec partie entière à droite : $9+\frac{0}{10}$, $9+\frac{1}{10}$, ...
(voir page suivante)

• Tracez un trait à droite de la marge, à 3 carreaux de celle-ci. Sur cette droite, on va écrire en centièmes.

Donc en face de 9 on va noter sur ce nouveau trait $\frac{900}{100}$ puis $\frac{910}{100}$, $\frac{920}{100}$, ... etc.

Remarquer que l'on a bien 10 intervalles entre 2 traits.

• **Placez** $\frac{915}{100}$, $\frac{923}{100}$, $\frac{957}{100}$ (marquer les petits traits)**. Écrire ces nombres en décomposant en unités, dixièmes, centièmes.** ($9+\frac{1}{10}+\frac{5}{100}$ $9+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}$ $9+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}$)

• **Comparez** $\boxed{9+\frac{1}{10}+\frac{5}{100} \textbf{ et } 9+\frac{2}{10}}$ (On remarque que $9+\frac{1}{10}+\frac{5}{100}$ est placé avant $9+\frac{2}{10}$)

Comparez $\boxed{9+\frac{5}{10}+\frac{7}{100} \text{ et } 9+\frac{6}{10}}$ puis $\boxed{9+\frac{5}{10}+\frac{7}{100} \text{ et } 9+\frac{4}{10}}$

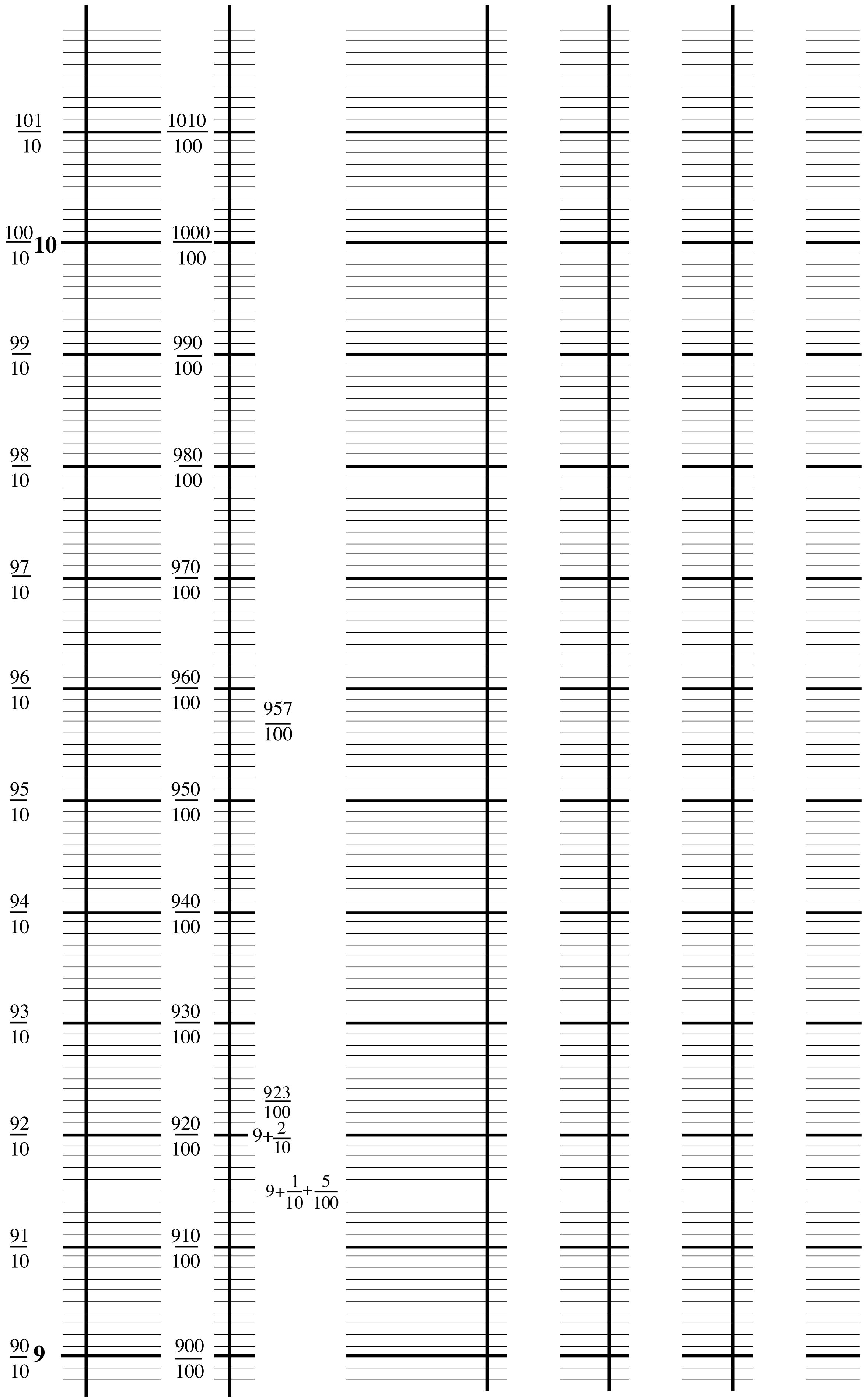
Comparez $\boxed{9+\frac{8}{10}+\frac{5}{100} \text{ et } 10+\frac{1}{10}}$

• De ces observations conclure :

Quand on a "bien" décomposé en unités, dixièmes, centièmes, pour comparer 2 nombres :
1) on compare les parties entières. Celui qui a la plus grande partie entière est le plus grand.
2) s'ils ont la même partie entière, on compare les dixièmes (sans s'occuper des centièmes). Celui qui a le plus grand nombre de dixième est le plus grand.
3) s'ils ont la même partie entière et le même nombre de dixièmes on compare les centièmes ...

Exercice : Comparer $9+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}$, $\frac{930}{100}$, $9+\frac{5}{100}$, $\frac{1009}{100}$, $9+\frac{3}{10}$

puis $\frac{1482}{100}$, $14+\frac{5}{10}$, $\frac{172}{10}$, $14+\frac{8}{10}+\frac{2}{100}$, $14+\frac{87}{100}$


101/10
1010/100
100/10
10
1000/100
99/10
990/100
98/10
980/100
97/10
970/100
96/10
960/100
957/100
95/10
950/100
94/10
940/100
93/10
930/100
923/100
92/10
920/100
9+2/10
9+1/10+5/100
91/10
910/100
90/10
9
900/100

VI. MISE EN TABLEAU PUIS INTRODUCTION DE LA VIRGULE.

Au tableau, recopier les unes sous les autres plusieurs écritures avec partie entière en plaçant bien en colonnes les parties entières, les dixièmes, les centièmes, ...

• **On sait écrire 14 ; 17 ; 9 ; 235 ... dans un tableau de numération : colonne unités, colonne dizaines, etc.**

100	10	1	
c	d	u	
	1	4	ou 10 + 4
2	3	5	ou 200 + 30 + 5 ou (2 x 100) + (3 x 10) + 5

On revoit aussi qu' une centaine c'est 10 dizaines
une dizaine c'est 10 unités
alors : une unité c'est dix quoi ? (dix dixièmes)

On peut donc prolonger le tableau vers la droite avec une colonne dixièmes, une colonne centièmes, ...

	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	
	c	d	u	dixièmes	centièmes	
		1	4	5		$14+\frac{5}{10}$ ou $\frac{145}{10}$
		1	4	8	2	$14+\frac{8}{10}+\frac{2}{100}$ ou $14+\frac{82}{100}$ ou $\frac{1482}{100}$

<u>Exercices</u> : donner des nombres écrits à l'aide de fractions décimales et les faire placer dans le tableau. Exemples : $327+\frac{2}{10}+\frac{7}{100}$, $\frac{1324}{100}$, $\frac{238}{10}$, $2+\frac{7}{100}$

• **Faire ranger ensuite ces nombres du plus grand au plus petit.**

• Inversement, écrire des nombres dans le tableau et faire trouver leur écriture sous forme fractionnaire avec partie entière , puis sous forme d'une seule fraction.

• **Conclure : quand on écrit les nombres dans le tableau, on n'a pas besoin d'écrire les fractions, sauf dans les titres des colonnes.**

<u>INTRODUCTION DE LA VIRGULE.</u>

• **On cherche une façon plus simple d'écrire** $14+\frac{8}{10}+\frac{2}{100}$ **, sans avoir à écrire** $\frac{.}{10}$, $\frac{.}{100}$ **.et aussi sans faire un tableau.**
Si on sait par coeur qu'à droite des unités on a le chiffre des dixièmes, puis celui des centièmes, on n'a peut-être plus besoin de faire le tableau.
Écrivez sans tableau : $14+\frac{5}{10}$, 145 , $1+\frac{4}{10}+\frac{5}{100}$

On se rend compte qu'il faut une marque pour indiquer où se trouve le chiffre des unités.
Les enfants peuvent proposer différentes choses puis le maître donne la convention de la virgule et répète sa signification : **la virgule sert à indiquer le chiffre des unités, la place des unités.**

• **Placez la virgule dans les nombres écrits dans le tableau.**

Exercices :
• Dans un tableau de numération, inscrire des nombres. Les enfants placent sur la même ligne, hors tableau, l'écriture à virgule, l'écriture avec partie entière, dixièmes, centièmes.
Exemple :

100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$		
c	d	u	dixièmes	centièmes		
	1	4	5		14,5	$14+\frac{5}{10}$
	1	4	8	2	14,82	$14+\frac{8}{10}+\frac{2}{100}$
			3	4	0,34	$\frac{3}{10}+\frac{4}{100}$
		2	0	3	2,03	$2+\frac{0}{10}+\frac{3}{100}$ ou $2+\frac{3}{100}$

• Inversement, donner des nombres à virgule. Les écrire dans un tableau, les écrire avec partie entière et fractions décimales.

Lecture de ces nombres :

$$153,85 = 153 + \frac{8}{10} + \frac{5}{100}$$
$$= 153 + \frac{85}{100}$$ (dans le tableau on lit bien aussi 85 centièmes.)

On pourra donc lire : 153 virgule 85
ou 153 et 85 centièmes (préférable au début)
ou 153_ 8 dixièmes_ 5 centièmes.

Cas plus difficiles : $\frac{3}{10}+\frac{4}{100}=0,34$

$2+\frac{3}{100}=2,03$ (se voit facilement dans le tableau)

$\frac{5}{100}=0,05$

Mais aussi en écrivant :

$$\frac{3}{10}+\frac{4}{100}=0+\frac{3}{10}+\frac{4}{100} \qquad 2+\frac{3}{100}=2+\frac{0}{10}+\frac{3}{100} \qquad \frac{5}{100}=0+\frac{0}{10}+\frac{5}{100}$$

Pour lire 2,03 il faudra dire 2 et 3 centièmes ou 2 virgule zéro trois de même pour 0,05.

VII. COMPARAISONS DES NOMBRES À VIRGULE.

Matériel : Reprendre la grande feuille $21 \times 29{,}7$ déjà utilisée pour y noter les nombres écrits sous forme fractionnaire.

1) A 4 carreaux du dernier trait tracé, refaites un grand trait rouge. Faites les marques correspondant à 9 et à 10.
Écrivez 9 et 10 puis les nombres à virgules qui sont en face de $9 + \frac{1}{10}$, $9 + \frac{2}{10}$, etc.

On fera ensuite remarquer si aucun enfant n'en parle, que $9 = 9 + \frac{0}{10}$ on pourra donc noter aussi 9,0 à la place de 9 et 10,0 à la place de10 et écrire les égalités sur le cahier : 9 = 9,0 et 10 = 10,0.

- **Écrivez les nombres qui ont un chiffre après la virgule compris entre 17,4 et 18,7.**
  ensuite les nombres qui ont un chiffre après la virgule compris entre 0 et 1,4.

2) Sur la feuille $21 \times 29{,}7$ refaire un trait à 3 carreaux à droite du dernier trait rouge. On va y inscrire les nombres ayant 2 chiffres après la virgule.

Par comparaison avec les nombres qui figurent déjà sous la forme $\frac{910}{100}$ ou $9 + \frac{10}{100}$ on obtiendra 9,10 ; 9,20 ; ... et aussi 9,00 ; 10,00 et les égalités : 9 = 9,0 = 9,00 et 10 = 10,0 = 10,00

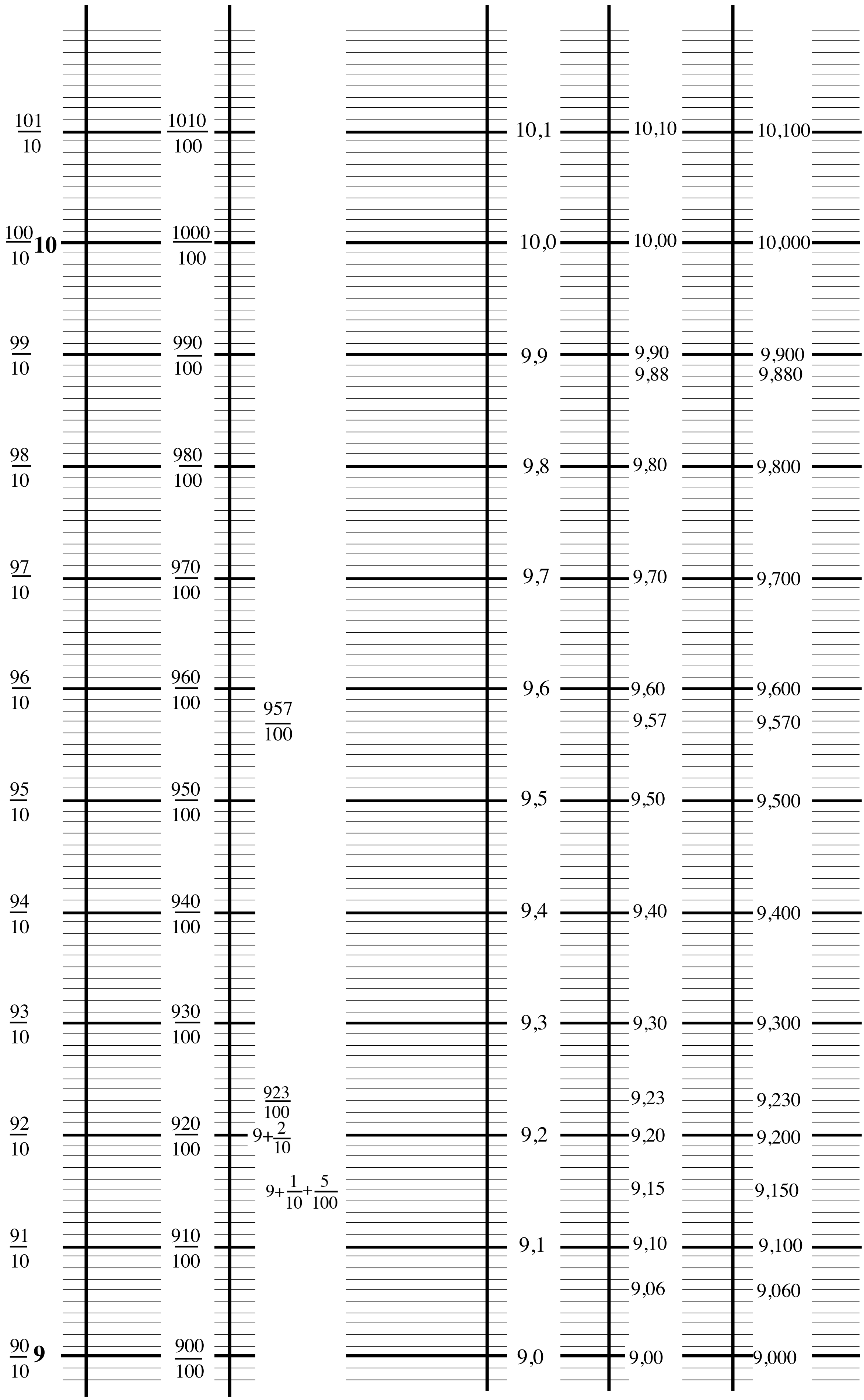
- **Placez les nombres : 9,15 _ 9,57 _ 9,88 _ 9,06 _ 9,23 _ 10,09.**

Comparer ces nombres et reprendre les règles de comparaison déjà données :

1. Pour comparer 2 nombres à virgule, on compare les parties entières. Celui qui a la plus grande est le plus grand.
2. S'ils ont la même partie entière on compare les chiffres des dixièmes, c'est à dire le 1er chiffre après la virgule de chaque nombre. Celui qui a le plus "grand" chiffre est le plus grand.
3. S'ils ont aussi le même 1er chiffre après la virgule on compare les chiffres des centièmes, c'est à dire le 2ème chiffre après la virgule de chaque nombre. Celui qui a le plus "grand" chiffre est le plus grand.

Exercices:

• Sur chaque ligne, entoure le plus grand nombre : 148,56 184,56 148,77 750,8 750,65 75,98	• Écris tous les nombres ayant 2 chiffres après la virgule compris entre 24,18 et 24,3 compris entre 12 et 12,2 compris entre 5,9 et 6,15.
• Trouve un nombre compris entre 46 et 47 entre 46,4 et 46,5 entre 152,9 et 153.	• Range du plus grand au plus petit : 34,6 - 3,46 - 3,5 - 3,57 - 35,3.



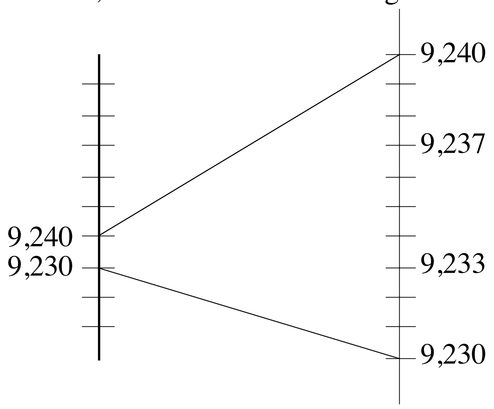
101/10
1010/100
10,1
10,10
10,100
100/10
10
1000/100
10,0
10,00
10,000
99/10
990/100
9,9
9,90
9,88
9,900
9,880
98/10
980/100
9,8
9,80
9,800
97/10
970/100
9,7
9,70
9,700
96/10
960/100
9,6
9,60
9,600
957/100
9,57
9,570
95/10
950/100
9,5
9,50
9,500
94/10
940/100
9,4
9,40
9,400
93/10
930/100
9,3
9,30
9,300
923/100
9,23
9,230
92/10
920/100
9+2/10
9,2
9,20
9,200
9+1/10+5/100
9,15
9,150
91/10
910/100
9,1
9,10
9,100
9,06
9,060
90/10
9
900/100
9,0
9,00
9,000

3) Introduction des millièmes. (auront pu être introduits plus tôt)

Reprenez la feuille 21 × 29,7. On voudrait noter les millièmes. Comment faire ?
Revoir qu'il faudrait partager chaque centième en dix parties de même grandeur.
On notera alors en millièmes les nombres déjà inscrits
$\frac{9100}{1000}$, $\frac{9200}{1000}$, ... $\frac{9000}{1000}$, $\frac{10000}{1000}$, $\frac{9230}{1000}$, $\frac{9570}{1000}$

• **Tracez un nouveau trait à 3 carreaux du dernier trait.**
Écrivez les nombres à virgule correspondants (9,100 ; 9,200 ; 9,230 ; ...) **.**
et remarquer : 9 = 9,0 = 9,00 = 9,000
9,1 = 9,10 = 9,100
9,23 = 9,230

• **Placez 9,240. On voudrait écrire les nombres compris entre 9,230 et 9,240.**
Notre intervalle est trop petit pour qu'on puisse les écrire. On va donc proposer "d'agrandir" cet intervalle, de faire comme si on regardait avec une loupe



Ce nouveau trait faisant 2 carreaux et demi, on peut noter alors quelques nombres :
9,233 ; 9,237 ; 9,239.

• Refaire les mêmes types d'exercices que précédemment.
<u>Exemples</u> :

• Sur chaque ligne, entoure le plus **petit** nombre : 148,56 184,506 148,077 730,8 730,65 730,984	• Écris tous les nombres ayant 3 chiffres après la virgule compris entre 18,996 et 19,011 compris entre 12 et 12,024 compris entre 5,99 et 6,003.
• Trouve un nombre compris entre 31,44 et 31,45 entre 123,08 et 123,09 entre 529,99 et 530.	• Range du plus petit au plus grand : 34,61 - 3,461 - 3,5 - 3,371 - 35,3.
• Écrire les 10 nombres ayant 3 chiffres après la virgule qui suivent 99,99.	

4) Écriture la plus courte.
On a vu que 12 = 12,0 = 12,00 = 12,000 que 0,5 = 0,50 = 0,500 = ...
Trouver alors, quand c'est possible, l'écriture la plus courte des nombres suivants.

30 - 15,450 - 7,305 - 6,00 - 142,300 - 0,40 - 0,702 - 0,009.

Conclure : **on ne peut pas "supprimer" n'importe quel zéro.**

VIII. ADDITION ET SOUSTRACTION DES NOMBRES DÉCIMAUX.

1) **Trouvez la somme des 2 nombres 4,37 et 32,8 calculez 4,37 + 32,8**

Laisser faire les enfants puis demander d'expliquer les méthodes employées.
Deux possibilités intéressantes :

- soit écritures des égalités : $4,37 = 4 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100}$ et $32,8 = 32 + \frac{8}{10}$

d'où : $4,37 + 32,8 = 4 + 32 + \frac{3}{10} + \frac{8}{10} + \frac{7}{100}$

$$= 36 + \frac{11}{10} + \frac{7}{100} = 36 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{7}{100}$$

$$= 37 + \frac{1}{10} + \frac{7}{100}$$

- soit dans le tableau :

	c	d	u	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	
			1			
4,37			4,	3	7	
32,8		3	2,	8		
4,37 + 32,8		3	7,	1	7	

Aux élèves ayant posé directement

$$\begin{array}{r} 4,3\ 7 \\ +\ 3\ 2,8 \\ \hline \end{array}$$

on proposera d'utiliser la calculatrice pour vérifier que leur résultat est inexact.
On leur fera ensuite comparer leur disposition avec celle du tableau :
Pour additionner, on doit ajouter les unités aux unités, les dizaines aux dizaines etc. de même pour les dixièmes, les centièmes...
Pour que cela soit aisé, il faut que les unités soient dans la même colonne, comme les dizaines etc.
Dans le tableau, on remarque que c'est le cas, qu'en plus les virgules sont bien elles aussi dans la même colonne, celle des unités.
Conclure : **Si on ne veut pas faire le tableau, il faut placer les virgules bien en colonne.**
Remarquer que c'est aussi plus rapide que de décomposer en $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$.

<u>Exercices individuels</u> : Poser et calculer 756,03 + 8,304 + 0,95 + 56
0,017 + 18 + 7,2 etc. Vérifier à la calculatrice.
et en calcul mental : 0,4 + 8
0,03 + 0,5 + 2
0,6 + 0,7 etc.

2) Soustraction.

- **Quel est le plus grand des 2 nombres 13,43 et 13,240 ?**
  Quelle est la différence entre les deux ? Le calcul est généralement bien posé et bien conclu.

- **Calculer 13,43 - 7,350**

Erreurs plus fréquentes, rappeler qu'il faut placer les virgules en colonne pour soustraire les unités des unités, ...

• **Calculer 13,43 - 7,352**

Revenir souvent au tableau pour amener le 0 des millièmes et disposer

$$\begin{array}{r} 13,430 \\ -\ \underline{7,352} \end{array}$$

de même pour calculer $\boxed{238 - 3{,}75}$; $\boxed{100 - 35{,}28}$; $\boxed{1 - 0{,}436}$ etc.

<u>Exercices</u> : Compléter : $\boxed{42{,}541 = 42 + \quad .}$

$\boxed{42{,}541 = 43 - .}$ (ou 42,541 + . = 43)

Décompositions : 42,541 = 40 + 2 + 0,5 + 0,04 + 0,001

par analogie avec $42{,}541 = 40 + 2 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000}$

En calcul mental : 9,9 + 0,1 = 12 – 03 = 2,5 + 0,5 = 1 – 0,2 = etc.

IX. LIAISON NOMBRES DÉCIMAUX - SYSTÈMES DE MESURES (peut-être abordé avant le paragraphe VIII.)

1) **Mesurez la table, une feuille de cahier, la longueur de 2 carreaux, ...**
Expression des résultats : 1 m et 12 cm, 16 cm et 8 mm, 1 cm et 6 mm.
Mettre ces résultats dans un tableau.

	m	dm	cm	mm	
table	1	1	2		1 m et 12 cm
cahier		1	6	8	16 cm et 8 mm
1ong.de 2carreaux			1	6	1 cm et 6 cm

• **Au lieu de dire 1 m et 50 cm, ou 1 m et 12 cm, on entend plutôt dire : un mètre cinquante, ou un mètre douze. On n'énonce qu'une unité. Comment indiquer dans le tableau que l'on dit 1 m 12 c'est à dire comment indiquer que le mètre est l'unité choisie ?**
L'idée d'utiliser la virgule vient facilement. De même pour 16,8 ; pour 1,6.

Conclure : **La virgule sert toujours à indiquer l'unité.**

• <u>Convention d'écriture</u> :
En dehors du tableau on écrira 1,12 m qu'on lit habituellement 1 mètre 12.

• Faire faire des exercices du type :

dicter ↓	m	dm	cm	mm	écriture hors du tableau
1 m 350	1,	3	5	0	1,350 m
2cm virgule 4			2,	4	2,4 cm
donner dans		3	5,	3	? cm
le tableau :		2	3	5	? m
	3	2	4		? m ou ? cm

• Quelques exercices de conversions résolus en s'aidant du tableau des unités de mesure :

$\times 10$

longueur en cm	longueur en mm
3	•
2,4	•
•	35
•	7

$\times 100$

longueur en m	longueur en cm
1	•
•	10
1,4	•
21,32	•
0,05	•
•	423,5
•	6,4

Ces tableaux pourront servir quand on multipliera un nombre décimal par 10, 100, puis 1 000.

• Même types d'exercices avec kg et g , km et m, les mesures de capacités, les francs et les centimes.

2) Sommes et différences de mesures.

<u>Problème</u> : tracer au tableau un trait de 1,25 m puis au bout, un trait de 14,5cm. Indiquer les longueurs des traits. **Quelle est la longueur totale ?**

Laisser chercher les enfants, leur demander de justifier leurs réponses. Les vérifier éventuellement en mesurant la longueur totale au tableau.

Conclure : **Si on place les 2 nombres dans un tableau d'unités de mesure, on va bien additionner les cm avec les cm, les dm avec les dm, etc. mais on remarque que les virgules ne sont pas dans la même colonne car on n'a pas donné les mesures avec la même unité.**

Pour éviter de faire chaque fois le tableau de mesure, il faut donc
. d'abord choisir une unité,
. puis exprimer toutes les mesures avec cette même unité (on vérifie que dans le tableau, les virgules sont alors dans la même colonne),
. enfin faire l'addition en disposant les chiffres pour que les virgules soient en colonne.

<u>Remarque</u> : Au lieu de donner des écritures telles que 3,5 m + 4 dm + 23,6 cm , il vaut mieux donner : Faire la somme des mesures suivantes 3,5 m - 4dm - 23,6 cm. Donner le résultat en centimètres.
Les enfants peuvent écrire : 3,5 m = 350 cm 4 dm = 40 cm puis additionner.

ou sous forme d'un tableau :

longueurs données	3,5 m	4 dm
longueur en cm	350	40

ou mieux verticalement :

longueur données	longueur en cm
3,5 m	350
4 dm	40
23,6 cm	23,6
somme	413,6

350 + 40 + 23,6 = 413,6 somme des longueurs : 413,6 cm

• Faire des calculs à propos de textes parlant de mesures de masse, de capacité, de monnaie.

X. MULTIPLICATION D'UN DÉCIMAL PAR UN NOMBRE ENTIER

• **Calculez** $\boxed{3 \times 2{,}04}$ $\boxed{23 \times 3{,}86}$

Les enfants peuvent écrire : $3 \times 2{,}04 = 2{,}04 + 2{,}04 + 2{,}04$ faire le calcul de la somme et trouver 6,12 mais cette méthode devient très pénible avec $23 \times 3{,}86$.

Beaucoup posent directement $\begin{array}{r} 2{,}04 \\ \times \quad 3 \\ \hline 6{,}12 \end{array}$ mais sont incapables d'expliquer pourquoi.

• Demander alors d'écrire 2,04 et 3,86 d'une autre façon, on obtient :

$$2 + \frac{4}{100} \text{ ou } \frac{204}{100} \quad \text{et } 3 + \frac{8}{10} + \frac{6}{100} \quad \text{ou} \quad \frac{386}{100}$$

On peut alors calculer $3 \times (2 + \frac{4}{100})$ et $23 \times (3 + \frac{8}{10} + \frac{6}{100})$

Certains enfants parviennent au bout des calculs, d'autres se trompent dans la distributivité de la multiplication sur l'addition.

On étudie alors tous les calculs de $3 \times \frac{204}{100}$ et $23 \times \frac{386}{100}$

$$3 \times \frac{204}{100} = \frac{3 \times 204}{100} \qquad 3 \times 204 = 612 \qquad 3 \times 2{,}04 = \frac{612}{100} = 6 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} = 6{,}12$$

$$23 \times \frac{386}{100} = \frac{23 \times 386}{100} \qquad 23 \times 386 = 8\,878 \qquad 23 \times 3{,}86 = \frac{8878}{100} = 88 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} = 88{,}78$$

• Donner d'autres exercices : $4{,}24 \times 7$; $13{,}002 \times 103$; ...

$$4{,}24 \times 7 = \frac{424}{100} \times 7 = \frac{424 \times 7}{100} = \frac{2968}{100}$$

$$13{,}002 \times 103 = \frac{13\,002}{1000} \times 103 = \frac{13\,002 \times 103}{1000} = \frac{1\,339\,206}{1000}$$

Un certain nombre d'enfants n'écrivent pas encore rapidement l'égalité : $\frac{2968}{100} = 29{,}68$

On peut les aider en disant que l'on a 2 968 centièmes et en plaçant ceci dans un tableau.

	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	
	2	9	6	8	

En pointant la craie sous le 6 on dit 296,8 dixièmes puis sous le 9 : 29,68 unités.
Ce procédé est bien souvent plus sûr pour les enfants que de déplacer la virgule (vers la gauche ou vers la droite ?)
Sans tableau, on peut faire de même pour $\frac{1\,339\,206}{1000}$ en pointant le chiffre des millièmes puis des centièmes, puis des dixièmes puis enfin des unités et obtenir 1 339,206.
Les enfants trouveront, chacun pour soi, des procédés pour aller plus vite.

De même pour écrire rapidement $13{,}002 = \frac{13002}{1000}$
On peut placer 13,002 dans le tableau : 13 unités, 0 dixième, 0 centième, 2 millièmes.

En pointant sous le 1er zéro on a le nombre de dixièmes c'est à dire 130 puis 1300 centièmes enfin 13 002 millièmes.
Certains enfants disent que si on a 2 chiffres après la virgule, on a 2 zéros au dénominateur (de la fraction décimale) que si on a 3 chiffres après la virgule, on a 3 zéros au dénominateur (sous entendu 1 000).

• Après quelques exercices, on fait porter l'attention sur les calculs faits :

exemple : $4{,}24 \times 7 = \frac{424}{100} \times 7 = \frac{424 \times 7}{100}$

Il faut calculer 424 × 7, c'est comme si on calculait ce qu'on nous demande sans s'occuper de la virgule. Le calcul terminé, on obtient des centièmes : 2 968 ; il faut maintenant placer la virgule.

Dans 4,24 on avait 2 chiffres après la virgule, on a ensuite écrit en centièmes : <u>424</u> centièmes et au résultat on a retrouvé 2 chiffres après la virgule (puisqu'on avait des centièmes).

Conclure : **On peut donc sauter l'étape d'écrire en centièmes : on fait la multiplication sans s'occuper de la virgule et au résultat on place la virgule comme dans le nombre du départ.**

$424 \times 7 \qquad \begin{array}{r} 424 \\ \times \ \ 7 \\ \hline 2\,968 \end{array} \qquad 42{,}4 \times 7 = 29{,}68$

Dans le calcul proprement dit, on peut ne pas mettre la virgule ce qui évite des confusions avec les techniques de l'addition et de la soustraction mais il ne faut pas oublier de la remettre quand on écrit l'égalité.
Cette méthode oblige d'ailleurs les enfants à nous présenter une égalité et pas seulement un calcul vite fait, sans réflexion.

• **Calculs de produits d'un entier par un décimal inférieur à l'unité.**

Exemples : $\boxed{43 \times 0{,}2 =}$ $\boxed{5 \times 0{,}34 =}$ $\boxed{17 \times 0{,}07 =}$ $\boxed{8 \times 0{,}5 =}$

réponses : $43 \times 0{,}2 = 8{,}6$ $5 \times 0{,}34 = 1{,}70$ $17 \times 0{,}07 = 1{,}19$ $8 \times 0{,}5 = 4$

Faire alors remarquer que l'on trouve un résultat <u>plus petit</u> que le nombre entier que l'on a multiplié.
Pour bien faire comprendre ce fait qui détruit l'idée de la multiplication que les enfants ont eue jusque là (quand on multiplie, c'est comme quand on additionne, on trouve "plus grand") revenir à $8 \times 0{,}5 = 8 \times \frac{1}{2} = 8 : 2 = 4$ On peut dire $8 \times \frac{1}{2}$, c'est bien plus petit que 8×1, soit 8.

De même, $43 \times 0{,}2$ c'est 43 fois 2 dixièmes c'est donc plus petit que 43 fois 1, plus petit que 43 ou plus simplement en remplaçant 43 par 4 : $4 \times 0{,}2 = 4 \times \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = 0{,}8$

• Donner des textes de problèmes du type : un objet coûte ... ou mesure ..., x objets coûtent ou mesurent ?
Exemple : Un mètre de tissu coûte 45 F, Quels sont les prix de 0,60m, de 0,30m, de 1,50m ?

• **Cas particulier : Produit d'un décimal par une puissance de dix.**

Calculez : $\boxed{\mathbf{5{,}26 \times 10}}$ $\boxed{\mathbf{3{,}42 \times 100}}$ $\boxed{\mathbf{7{,}53 \times 1000}}$

Écrire les égalités trouvées au tableau :

$526 \times 10 = 5\,260$ $342 \times 100 = 34\,200$ $753 \times 1000 = 753\,000$

$5{,}26 \times 10 = 52{,}60$ $3{,}42 \times 100 = 342{,}00$ $7{,}53 \times 1000 = 7\,530{,}00$

Une méthode découverte par des enfants dits inadaptés peut remplacer le déplacement de la virgule (d'ailleurs la virgule ne bouge pas, ce sont les chiffres qui changent de colonnes) :
On écrit 5,26 ; quand on multiplie par 10 sans s'occuper de la virgule, on trouve au résultat un zéro sous le 6, un 6 sous le 2 etc.

		c	d	u	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
5,26	→			5,	2	6
$5{,}26 \times 10$	→		5	2,	6	0
$5{,}26 \times 100$	→	5	2	6,	0	0

Donc quand je multiplie par 10, j'ai un zéro à droite et tous les chiffres sont décalés, la virgule ne bougeant pas. En pratique :

$5{,}26 \times 100 =$
526 ••

On pointe sous le 6 pour indiquer la place du zéro quand on multiplie par 10,
puis sous le 2 pour indiquer la place du 2ème zéro quand on multiplie une 2ème fois par 10 (on a maintenant multiplié par 100) on écrit la virgule puis les chiffres.
Bien sûr, pour recopier on donne l'écriture la plus courte $5{,}26 \times 100 = 526$

de même que précédemment $7{,}53 \times 1000 =$
753• ••
$7{,}53 \times 1000 = 7530$

Très vite les enfants ne réécrivent pas 7,53 mais placent leurs points repères sous le 3, le 5 et le 7 de $7{,}53 \times 1000$, ...

<u>Exercices</u> :

$0{,}357 \times 100 =$	$137{,}452 \times 10 =$	$0{,}6 \times 1000 =$

$43 \times 0{,}1 \quad =$	$1237 \times 0{,}01 \quad =$	$23 \times 0{,}001 =$

ces derniers seront résolus facilement en remplaçant 0,1 par $\frac{1}{10}$ 0,01 par $\frac{1}{100}$, …

$43 \times \frac{1}{10} = \frac{43}{10} = 4{,}3$ ou directement : $43 \times \frac{1}{10} = 4{,}3$

Inversement **compléter:**

$. \times 3{,}47 = 34{,}7$	$. \times 43 = 0{,}43$	$36 \times \ . = 3{,}6$	$1320 \times \ . = 13{,}2$

les enfants peuvent d'abord compléter avec $36 \times \frac{1}{10} = 3{,}6$ $1320 \times \frac{1}{100} = 13{,}2$

et si on l'exige par 0,1 et 0,01

XI. ORDRE DE GRANDEUR DES RÉSULTATS

• Trouver mentalement le nombre entier qui vient juste avant et celui qui vient juste après :

• < 3,45 < •
• < 18,04 < •
• < 327,435 < •
• < 0,8 < •
• < 79,642 < •

• Trouver mentalement les 2 nombres ayant un chiffre après la virgule qui viennent juste avant et juste après.

• < 3,45 < •
• < 18,04 < •
etc.

• Trouver mentalement 2 sommes d'entiers naturels qui encadrent (d'aussi près que possible) les sommes suivantes :

• + • < 3,12 + 24,652 < • + •
• + • < 12,83 + 5,20 < • + •
• + • < 234,3 + 31,423 < • + •

Comparer les propositions des enfants, les écarts entre les sommes proposées :
Exemple : Pour 12,83 + 5,20 on pourra avoir 12+5 < 12,83 + 5,20 < 13+ 6
Remarquant que 12,80 + 5,20 = 12 + 5 + 1 on pourra "rétrécir" des écarts.

• Trouver mentalement un nombre entier le plus près possible de :

10,75 + 24,12 + 20,17
150,242 + 50,84 + 64,32 (Ces sommes sont écrites au tableau)
41,02 + 43,24 + 40,98

• Trouver mentalement un nombre ayant un chiffre après la virgule proche
de $3 \times 0,412$ de $20 \times 1,21$ de $50 \times 2,413$.

• Au cours de la résolution des problèmes, on s'efforcera de vérifier mentalement l'ordre de grandeur des résultats trouvés.

Des exercices avec calculatrice peuvent aussi être faits :

• en tapant les nombres, on a frappé par erreur 2 fois le même chiffre (exemple : 12×4 a été frappé 122×4)
• on a oublié de taper le point (exemple $5,6 \times 3$ c'est environ 15 et pas 150)
• un chiffre n'a pas été tapé (exemple $54,6 \times 7$ tapé $5,6 \times 7$)
• les piles sont usées détecter mentalement si les nombres qu'affichent alors la machine sont faux.

Les activités de multiplication d'un décimal par un décimal,
de recherche d'un quotient décimal ou
de valeurs approchées d'un quotient,
de recherche du quotient de deux décimaux,
peuvent très bien être laissées pour la 2ème année de cours moyen.

C.M.2

FRACTIONS ET DECIMAUX

I. BILAN DES CONNAISSANCES.

Refaire (ou faire) des activités de pliages de bandes et surtout de pliages de carrés.
Reprendre le paragraphe : Synthèse des recherches effectuées (du C.M.1, page 13) soit directement soit à l'occasion des recherches de mesures d'aires (voir le paragraphe suivant) qui mèneront au calcul du produit de 2 fractions puis de 2 décimaux.

- fractions égales à 1,
- fractions égales à un entier,
- multiplication d'une fraction par un entier,
- fractions égales,
- somme et différence de fractions de même dénominateur,
- recherche de la partie entière.

<u>Exemple</u> : $\frac{20}{3} = \frac{18}{3} + \frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3}$ $\frac{142}{10} = \frac{140}{10} + \frac{2}{10} = 14 + \frac{2}{10}$

Utilisation de la technique de la division dans des cas plus difficiles : $\frac{215}{12}$

$$\begin{array}{r|l} 215 & 12 \\ \hline 95 & 17 \\ 11 & \end{array}$$

$215 = (17 \times 12) + 11$

215 douzièmes c'est donc 17 fois 12 douzièmes et 11 douzièmes

$\frac{215}{12} = 17 + \frac{11}{12}$

- Écrire des fractions plus petites que 1. Faire expliquer, justifier les écritures données.
- Écrire des fractions plus grandes que 1.

<u>Exemple</u> : Écrire une fraction plus grande que 1 de dénominateur 7,
plus petite que 1 de dénominateur 13, ...
(la majorité des enfants réussit ces exercices sans difficultés).

- <u>Fractions décimales et nombres à virgule</u> :

<u>Exemple</u> : $3 + \frac{4}{10} + \frac{8}{1000} = \frac{.}{1000} + \frac{.}{1000} + \frac{.}{1000} = \frac{.}{1000}$

$\frac{2387}{100} = \ . + \frac{.}{10} + \frac{.}{100}$ ou d'abord $23 + \frac{87}{100}$

Comparaisons : $\frac{2475}{1000}$, $\frac{314}{100}$, $\frac{54}{10}$ en écrivant ces fractions avec partie entière :

$2 + \frac{475}{1000}$, $3 + \frac{14}{100}$, $5 + \frac{4}{10}$

Les placer du mieux possible sur une droite graduée.
Revoir la méthode de comparaisons de fractions décimales écrites sous forme d'une somme : partie entière, dixièmes, centièmes, ...

- Disposition des écritures de ces fractions décimales dans un tableau, écriture avec virgule, comparaison des nombres à virgule comme au C.M.1.

II. EXPRESSIONS DE MESURES D'AIRES.

Rappels :

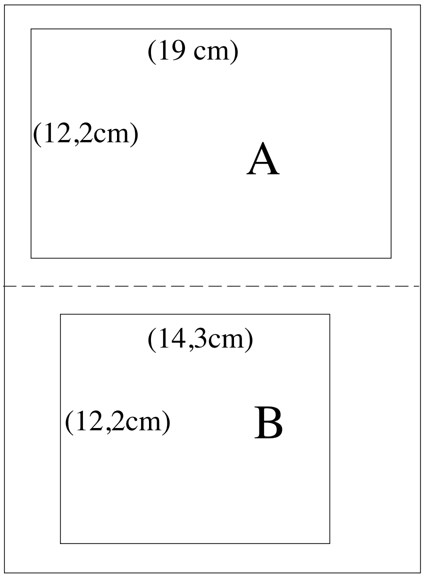
- **Tracez sur le cahier un rectangle de 12 carreaux de longueur et de 7 carreaux de largeur. Hachurez un carreau. On cherche l'aire de ce rectangle exprimée en nombre de carreaux.**

($7 \times 12 = 12 \times 7 = 84$) et la formule $A = L \times 1$

- **Tracez sur le cahier un rectangle de 12 carreaux de longueur et de 8 carreaux de largeur. Hachurez un carré formé de 4 carreaux. Ce carré sera l'unité d'aire. Quelle est l'aire du rectangle exprimée en nombre de carrés ?**

En quadrillant le rectangle en carrés de 4 carreaux, on arrive bien sûr à $6 \times 4 = 4 \times 6 = 24$.

Matériel : par enfant, 2 carrés de papier blanc de 8 cm de côté,
feuilles polycopiées comportant 2 rectangles A et B conçues ainsi :



En prenant le côté du carré (8 cm) comme unité de longueur on souhaite avoir comme dimensions pour le rectangle A : $\boxed{2+\frac{1}{3} \text{ et } 1+\frac{1}{2}}$

et pour le rectangle B : $\boxed{1+\frac{1}{4} \text{ et } 1+\frac{1}{2}}$

Pratiquement, il faut augmenter légèrement ces dimensions pour tenir compte des imprécisions de manipulation des enfants donc prendre
pour A : 19 cm et 12,2 cm
pour B : 14,3 cm et 12,2 cm.

Consigne : **Cherchez combien de carrés de papier et de morceaux de carré sont nécessaires pour couvrir exactement le rectangle A.**
Écrire ensuite l'aire du rectangle A quand on prend le carré de papier pour unité d'aire.

Il faudra au fur et à mesure suggérer aux enfants de tracer les contours du carré qu'ils disposent sur le rectangle A car beaucoup d'enfants déplacent les carrés sur le rectangle sans laisser de trace et ne peuvent donc pas ensuite donner l'aire de ce rectangle.
Leur demander également d'écrire un nombre dans chaque partie du quadrillage réalisé.

On arrive assez rapidement à :

1	1	.
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	.

Quelques enfants écrivent directement 1 dans la bande inférieure formée de deux demi-carrés.

Une discussion collective doit alors s'engager pour déterminer les fractions à écrire dans les deux dernières parties.

Un certain nombre d'enfant propose $\frac{1}{3}$ mais d'autres proposent $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$.

En pliant bien un carré de papier et en faisant attention à la façon dont on recouvre cette partie du rectangle A on remarque que $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ c' est trop grand

et que $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$ c' est trop petit.

Par contre en pliant bien en 3, on constate que l'on recouvre bien cette partie. On se met tous d'accord sur $\frac{1}{3}$.

L'écriture $\frac{1}{6}$ est alors facilement trouvée pour la dernière partie.

• Écriture de l'aire : $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

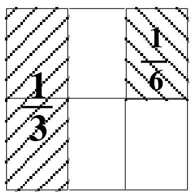
Donnez une écriture plus courte . $3+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ est facilement trouvée

encore plus courte ? certains enfants écrivent alors $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{9}$ en faisant $\frac{1+1}{3+6}$

On leur demande alors d'utiliser leur méthode pour calculer $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

On trouverait $\frac{2}{4}$ c'est à dire $\frac{1}{2}$. Est-ce possible ?

On dessine alors un carré au tableau, on marque les plis du pliage en 3 puis le pli du pliage en 2.



Un enfant vient hachurer $\frac{1}{3}$

Un autre vient hachurer $\frac{1}{6}$

Plusieurs remarques sont alors faites par les enfants : on a 3 morceaux hachurés et 3 qui ne le sont pas, donc la moitié du carré est hachurée et $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

D'autres proposent de reporter la partie inférieure hachurée entre les 2 autres parties hachurées.

On voit bien $\frac{1}{2}$ carré et aussi $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ $\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$ $\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

On insiste alors sur le fait que pour additionner facilement 2 fractions, il faut qu'elles aient le même dénominateur. Si ce n'est pas le cas, il faut faire des dessins ou remplacer ces fractions par des fractions égales qui auront le même dénominateur.

Finalement, l'aire de A c'est $3+\frac{1}{2}$ ou $\frac{6}{2}+\frac{1}{2}$ soit $\frac{7}{2}$

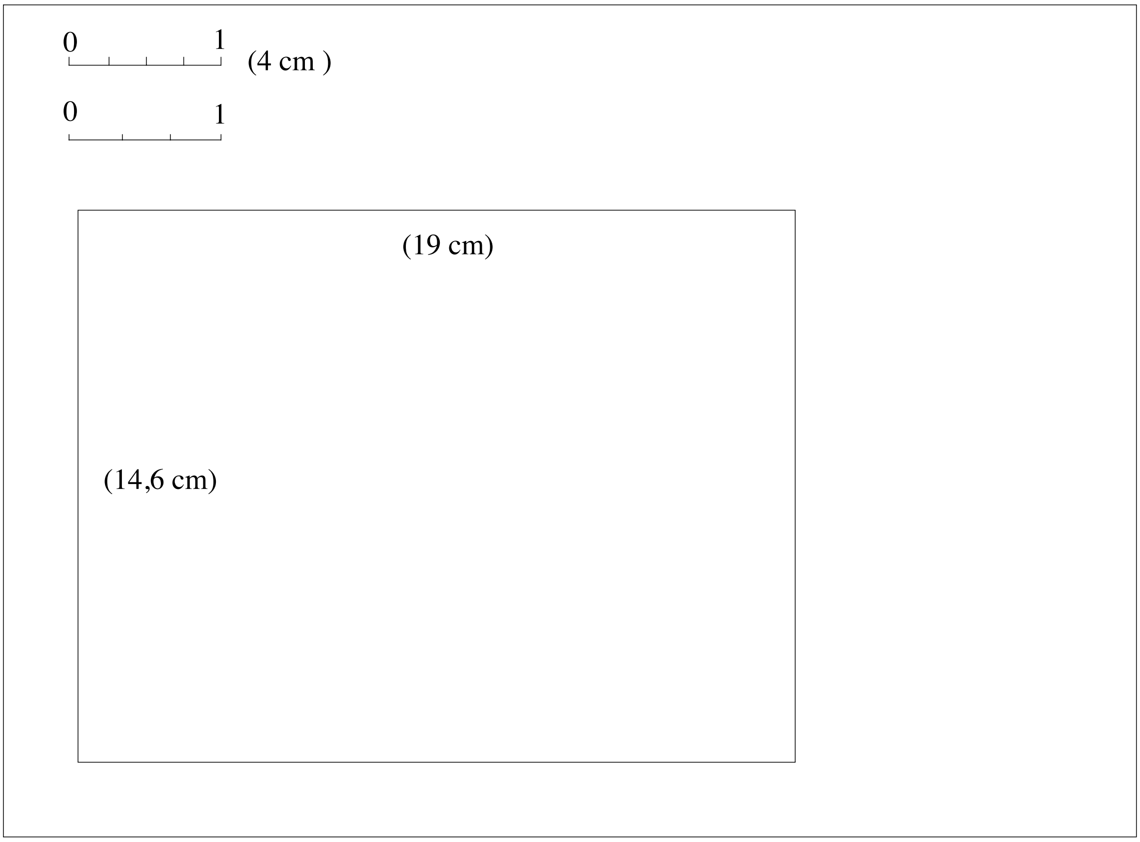
• Lors de la séance suivante, on cherchera l'aire de B de la même façon.

(on obtiendra l'écriture : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ qui se réduira en $2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ puis en $2+\frac{5}{8}$)

III. PRODUITS DE FRACTIONS.

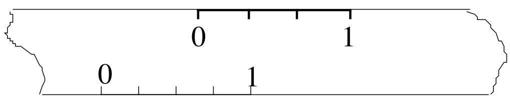
Objectifs : Placer les enfants en situation de concevoir une multiplication des rationnels et d'élaborer un modèle pour exprimer le produit de 2 nombres écrits sous forme de fraction.

Matériel par enfant : une feuille polycopiée conçue ainsi :



Consigne : Vous pourrez utiliser votre règle graduée pour tracer mais pas pour mesurer. On veut connaître l'aire du rectangle, mais aujourd'hui on n'a pas de carrés de papier à reporter. Vous avez, juste en haut, l'unité de longueur.

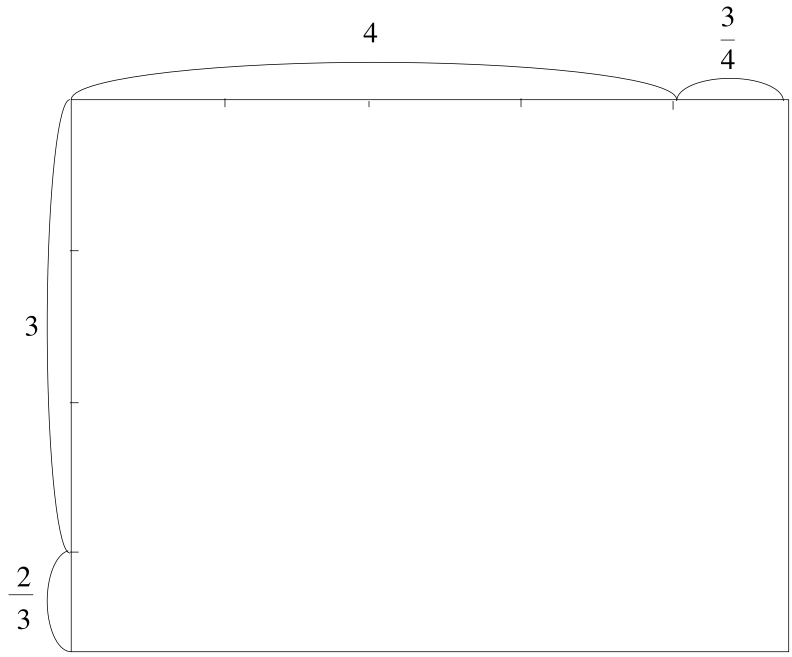
Après discussion, on arrive à la conclusion qu'il faut mesurer la longueur puis la largeur du rectangle. (Si certains veulent construire un carré de papier, on précisera qu'aujourd'hui on essaie de s'en passer.)
Certains enfants utilisent le compas mais manquent de précision, d'autres prennent une feuille de brouillon et recopient, sur le bord de la feuille, l'unité de longueur et les graduations en mettant le bord de la feuille en coïncidence avec les traits représentant l'unité de longueur.
On pourra alors distribuer à chacun une petite bande de papier blanc, déchirée (et non coupée aux ciseaux) aux 2 bouts. Les enfants doivent alors y reporter les unités de longueur.



Ils ajoutent aussi facilement les graduations $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

Avec cet instrument ils peuvent mesurer la longueur et la largeur du rectangle. Il faut passer derrière chaque enfant car on a noté de nombreuses maladresses et du manque de soin.
Certains enfants oublient aussi de noter les reports qu'ils ont faits sur les côtés du rectangle.

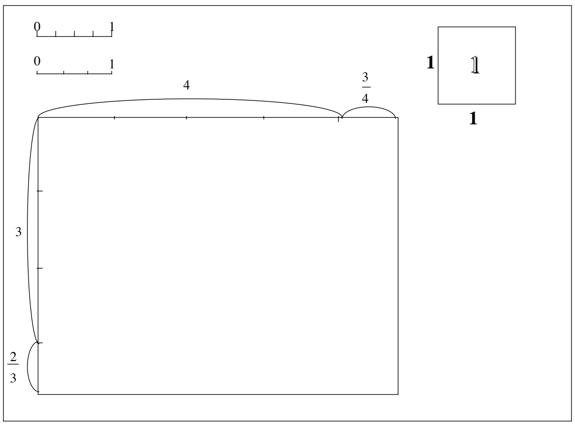
Synthèse :Dessin au tableau pour noter les mesures trouvées :



longueur : $4+\frac{3}{4}$ ou $\frac{19}{4}$

largeur : $3+\frac{2}{3}$ ou $\frac{11}{3}$

puis rappel de la consigne : **On veut connaître l'aire du rectangle**.
Si aucun groupe n'a d'idée, on peut demander de **construire dans le coin supérieur droit de la feuille l'unité d'aire qui a pour côté l'unité de longueur.**
On détermine assez facilement avec les enfants qu'il faut donc construire un carré de côté 1.



• **Écrivez 1 sur deux côtés consécutifs du carré, repassez les quatre côtés en rouge et écrivez 𝟙 en rouge dans le carré.**

Nous nous sommes rendus compte que les enfants confondaient facilement unité de longueur et unité d'aire.
L'écriture en couleur les aide quelque peu.

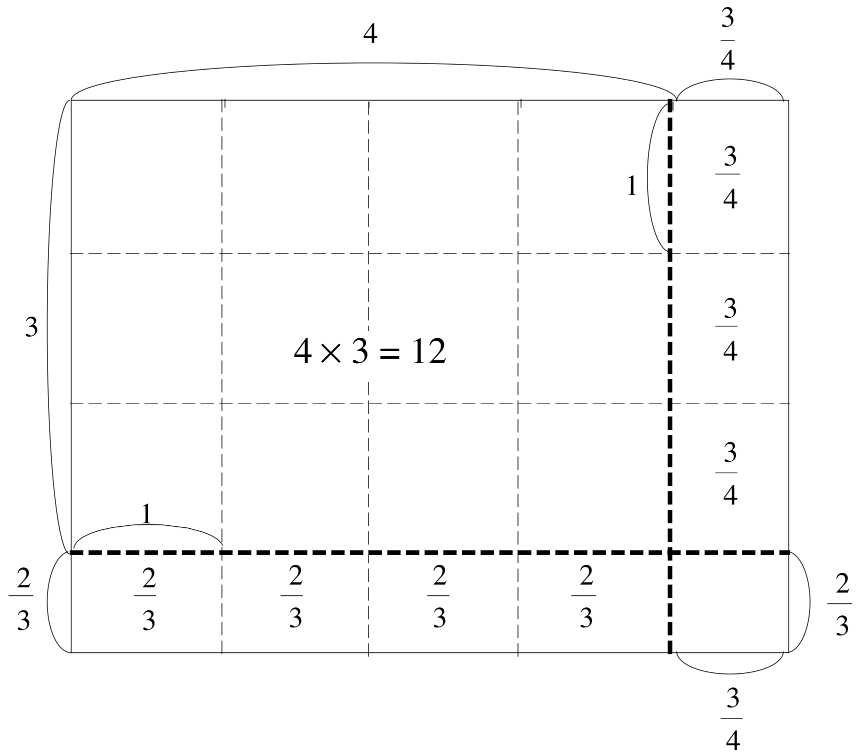
A certains, il faudra demander : **Combien de carrés faudrait-il pour recouvrir exactement tout le rectangle ?** (sans superposition ni trou).

Des enfants pensent tout de suite à quadriller le rectangle comme cela a été réalisé avec les carrés de papier de 8 cm de côté et également comme lorsqu'on a cherché le nombre des carrés de 4 carreaux dans le rectangle de 12×8 carreaux.

Certains tracent des parallèles aux côtés, approximativement, d'autres "graduent" les deux côtés restant du rectangle (quelquefois en se trompant de sens !).

Mise en commun : Lorsque les enfants ont réalisé leur quadrillage, on fait de même au tableau. Beaucoup ont déjà trouvé qu'il y a 4×3 soit 12 carrés entiers. De même, dans les parties rectangulaires de côté 1, les enfants écrivent assez rapidement $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$.

(Leur rappeler d'écrire en rouge.)



On peut laisser en attente l'écriture de l'aire de la partie rectangulaire de côtés $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$.

Notre rectangle est maintenant divisé en 4 parties dont on peut rapidement calculer l'aire de 3 d'entre elles.

$4 \times 3 = 12$

$4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

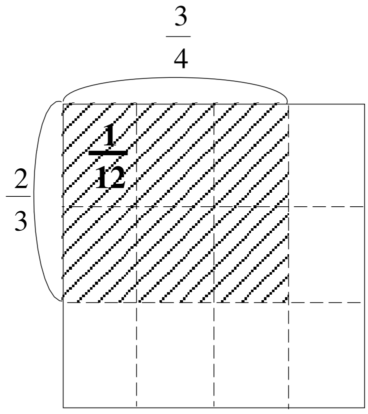
$3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = ?$

Consigne : Sur le carré unité d'aire, tracez le rectangle $\frac{2}{3}$ sur $\frac{3}{4}$

Si besoin est, demander de quadriller le carré pour obtenir la figure ci-dessous.

Ce carré comporte donc 12 parties de $\frac{1}{12}$ chacune (4 rectangles sur un côté, 3 rectangles sur l'autre, donc $\mathbf{3} \times \mathbf{4}$ rectangles)



• Hachurez le rectangle $\frac{2}{3}$ sur $\frac{3}{4}$

Le rectangle de $\frac{2}{3}$ sur $\frac{3}{4}$ comporte donc $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$ parties de $\frac{1}{12}$

d'où $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{6}{12}$

$\frac{6}{12}$ que les enfants écrivent facilement $\frac{1}{12}$

Synthèse : Sur l'égalité $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4}$, on récapitule ce que l'on vient de faire : on a partagé en tiers d'un côté, en quarts de l'autre, on a donc 3×4 morceaux (on montre les dénominateurs et les traits sur le carré)

On avait 3 quarts sur un côté donc 3 petits rectangles d'un douzième, de même 2 tiers sur l'autre côté.

En tout, 2×3 morceaux d'un douzième (en montrant les numérateurs).

• Terminer le calcul de l'aire du grand rectangle

$$12+\frac{8}{3}+\frac{9}{4}+\frac{1}{2}$$

que les enfants font ainsi :

$$12+2+\frac{2}{3}+2+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=16+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$$

On peut arrêter ici ou continuer en transformant en douzièmes $\frac{2}{3}=\frac{4\times 2}{4\times 3}$ et $\frac{3}{4}=\frac{3\times 3}{4\times 3}$

$$16+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=16+\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=16+\frac{17}{12}=17+\frac{5}{12}$$

• **Écrivez l'aire du rectangle avec la formule :** on obtient $(4+\frac{3}{4})\times(3+\frac{2}{3})$ ou $\frac{19}{4}\times\frac{11}{3}$

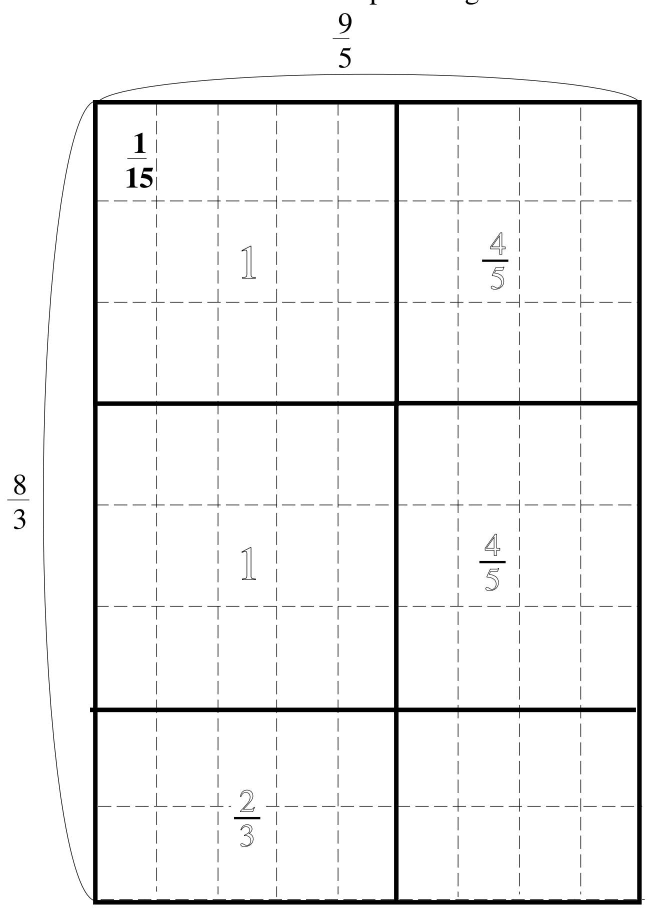
Finalement on arrive à l'égalité $(4+\frac{3}{4})\times(3+\frac{2}{3})=17+\frac{5}{12}$

• **Séance suivante :**

Consigne : Tracez une unité de longueur de 5 carreaux et l'unité d'aire correspondante.
Lorsque des enfants ont terminé, leur dire :

Construisez maintenant un rectangle de longueur $\frac{8}{3}$, de largeur $\frac{9}{5}$.

Pour obtenir des tiers, il suffit de découper une bande de 5 carreaux et de plier soigneusement en 3.



• **Écrivez l'aire de ce rectangle sans faire de calculs :** $A=\frac{8}{3}\times\frac{9}{5}$

• On peut laisser faire les enfants comme à la séance précédente :

puis écrire l'aire du petit rectangle :

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times 4}{3\times 5}=\frac{8}{15}$$

et écrire l'aire totale :

$$A=2+\frac{2}{3}+\frac{8}{5}+\frac{8}{15}$$

• Demander aux enfants d'écrire A avec des fractions de dénominateur 15 :

$$A=\frac{30}{15}+\frac{10}{15}+\frac{24}{15}+\frac{8}{15}$$

$$A=\frac{72}{15}$$

• Soit sur cet exemple, soit sur le suivant, demander aux enfants de quadriller tout le rectangle comme le carré unité et de compter le nombre de quinzièmes. On trouve 8×9 quinzièmes.

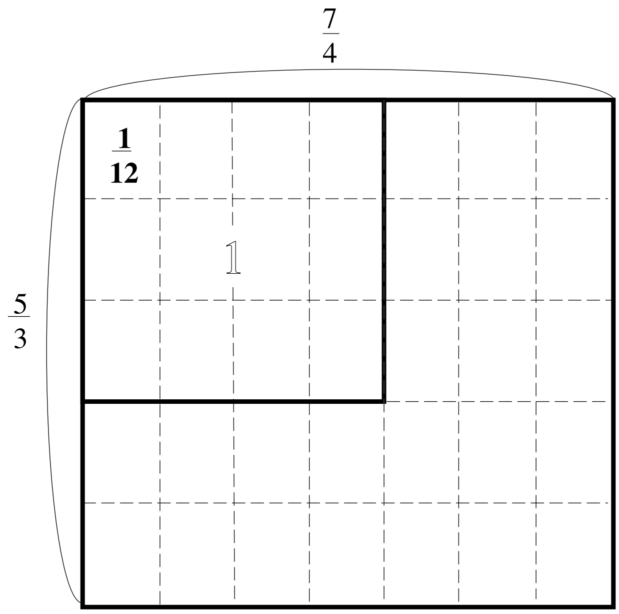
On peut donc écrire l'aire A = $\frac{8\times 9}{3\times 5} = \frac{72}{15}$, résultat que l'on a déjà trouvé.

On avait écrit l'aire $A = \frac{8}{3}\times\frac{9}{5}$, on a alors l'égalité : $A = \frac{8}{3}\times\frac{9}{5} = \frac{8\times 9}{3\times 5} = \frac{72}{15}$

On pourra alors faire remarquer que cette deuxième façon donne un résultat plus rapidement que de découper le rectangle en carrés unités.

• **Exercice : calculez** $\frac{5}{3}\times\frac{7}{4}$

Il est souhaitable pour beaucoup d'enfants de construire le rectangle correspondant. On imposera de quadriller tout ce rectangle et de n'y faire apparaître qu'un carré unité comme ci-dessous.



On trouve : $\frac{5}{3}\times\frac{7}{4} = \frac{5\times 7}{3\times 4} = \frac{35}{12}$

Conclure : Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

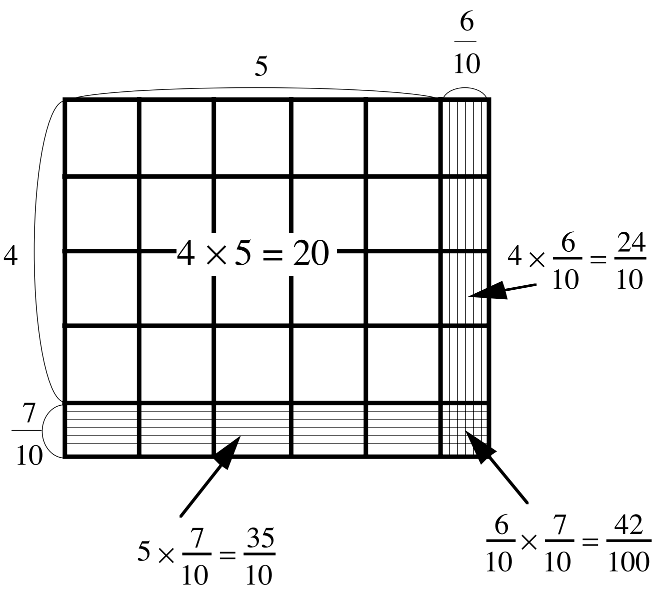
• Faire faire quelques calculs de produits de 2 fractions, de produit d'une fraction par un nombre entier et aussi de sommes (faciles) de fractions pour bien dégager les règles. Ne pas hésiter à revenir à des dessins.

IV. PRODUITS DE DECIMAUX.

Objectifs : **Appliquer la règle de calcul du produit de fractions au cas particulier des fractions décimales.**
En déduire une règle de calcul du produit des nombres décimaux écrits avec une virgule.

Matériel : Une demi-feuille de papier millimétré par enfant.

Consignes : **Tracez un trait unité de longueur (1cm) et le carré unité d'aire correspondant.**
Tracez un rectangle de longueur $5 + \frac{6}{10}$ **de largeur** $4 + \frac{7}{10}$**.**
Trouvez l'aire de ce rectangle (sans parler nécessairement de cm^2).



A partir de ce découpage, on peut écrire :

$$A = (5 + \frac{6}{10}) \times (4 + \frac{7}{10})$$

$$A = 20 + \frac{35}{10} + \frac{24}{10} + \frac{42}{100}$$

$$A = 20 + 3 + \frac{5}{10} + 2 + \frac{4}{10} + \frac{4}{10} + \frac{2}{100}$$

$$A = 25 + \frac{13}{10} + \frac{2}{100}$$

$$\boxed{A = 26 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100}}$$

• Écrivez la longueur du rectangle en une seule fraction, puis sa largeur.

On obtient facilement : $\frac{56}{10}$ et $\frac{47}{10}$

• Écrivez l'aire du rectangle en vous servant de ces fractions et faites les calculs.

On obtient facilement aussi : $\frac{\mathbf{704}}{\mathbf{100}} \times \frac{\mathbf{1302}}{\mathbf{100}} = \frac{56 \times 47}{10 \times 10} = \frac{916\,608}{10\,000}$

• Trouve-t-on le même nombre ? (si aucune remarque n'intervient)

La comparaison des deux résultats : $A = 26 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100}$ et $\frac{2632}{100}$ ne pose généralement pas de grosses difficultés.

Conclusion : la méthode la plus rapide est bien d'écrire chacune des dimensions sous forme d'une seule fraction et de faire le produit.

Consignes : **On garde la même unité de longueur et la même unité d'aire.**
Tracez un rectangle de longueur 9,6 cm et de 6,8 cm de largeur .
Trouvez l'aire de ce rectangle (sans parler nécessairement de cm^2).

Déroulement : Le tracé du rectangle se fait sans difficulté, par contre des enfants ne pensent pas à remplacer les écritures à virgule par les écritures fractionnaires pour faire les calculs.

Synthèse : Lorsque les enfants ont terminé les calculs, la mise en commun fait apparaître la suite : $9 \times 6 = 54$

$9 \times \frac{8}{10} = \frac{72}{10}$

$6 \times \frac{6}{10} = \frac{36}{10}$

$\frac{6}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{48}{100}$ l'aire est alors $54 + \frac{72}{10} + \frac{36}{10} + \frac{48}{100}$

$65 + \frac{2}{10} + \frac{8}{100}$

Faire alors remarquer que, comme pour l'exercice précédent, on peut écrire l'aire sous la forme :

$\mathbf{9{,}6 \times 6{,}8}$ **ou** $\mathbf{\frac{96}{10} \times \frac{68}{10}}$ et que le calcul peut se faire rapidement :

$\frac{96}{10} \times \frac{68}{10} = \frac{96 \times 68}{10 \times 10} = \frac{6528}{100}$ et cette dernière fraction peut aussi s'écrire 65,28.

$\boxed{\mathbf{9{,}6 \times 6{,}8 = 65{,}28}}$

• Retour à l'exercice précédent : on aurait pu écrire l'aire sous la forme :

$\mathbf{5{,}6 \times 4{,}7}$ **ou** $\mathbf{\frac{56}{10} \times \frac{47}{10}}$ on a trouvé $\frac{2632}{100}$ qui peut s'écrire 26,32

$\boxed{\mathbf{5{,}6 \times 4{,}7 = 26{,}32}}$

Consignes : Calculez les produits suivants :

$\boxed{\mathbf{12{,}7 \times 3{,}5}}$ $\boxed{\mathbf{2{,}14 \times 3{,}2}}$ $\boxed{\mathbf{7{,}04 \times 13{,}02}}$

Déroulement : On pourra laisser les enfants qui en ressentent le besoin, tracer un rectangle sur papier millimétré pour le calcul de $12{,}7 \times 3{,}5$ puis les encourager à simplement transformer en produits de fractions décimales les produits des nombres à virgule.

Synthèse : On peut regrouper en tableau ce qui a été fait :

pour calculer	on a écrit	on a posé	on a trouvé	on a écrit
$9{,}6 \times 6{,}8$	$\mathbf{\frac{96}{10} \times \frac{68}{10}}$	96×68	$\frac{6528}{100}$	$9{,}6 \times 6{,}8 = 65{,}28$
$5{,}6 \times 4{,}7$	$\mathbf{\frac{56}{10} \times \frac{47}{10}}$	56×47	$\frac{2632}{100}$	$5{,}6 \times 4{,}7 = 26{,}32$
$2{,}14 \times 3{,}2$	$\mathbf{\frac{214}{100} \times \frac{32}{10}}$	214×32	$\frac{6848}{1000}$	$2{,}14 \times 3{,}2 = 6{,}848$
$7{,}04 \times 13{,}02$	$\mathbf{\frac{704}{100} \times \frac{1302}{100}}$	704×1302	$\frac{916\,608}{10\,000}$	$7{,}04 \times 13{,}02 = 91{,}6608$

On observe qu'aux deux premières lignes, on a au total 2 chiffres après la virgule dans la 1ère colonne et aussi 2 chiffres après la virgule au résultat dans la dernière colonne ; qu'à la 3ème ligne on a au total 3 chiffres après la virgule dans la 1ère colonne et aussi 3 chiffres après la virgule au résultat dans la dernière colonne, idem pour la dernière ligne.

Par observation des calculs faits, on parviendra à une technique :

on pose la multiplication sans s'occuper des virgules,
puis on compte les chiffres après la virgule, et on place la virgule dans le résultat

V. DIVISION DANS D.

V.1. - Quotient décimal approché de 2 entiers, d'un décimal par un entier.

V.1.1. **Problème : Pour l'achat de 7 carnets tous au même prix, on a payé 38,15 F. Combien coûte un carnet ?**

La majorité des enfants réalise bien le calcul, les seules erreurs concernent la place de la virgule au quotient. On fait donc la division collectivement au tableau :

38,15	7
3	5

Il reste 3 unités,
le 5 du quotient représente le chiffre des unités aussi.

Après les unités, nous trouvons les dixièmes : il nous reste 3 unités et 1 dixième soit 31 dixièmes. Divisons 31 dixièmes par 7, au quotient nous trouverons des dixièmes, il faut donc placer une virgule après le 5.
Comme on divise 31 dixièmes par 7, donc que l'on cherche en 31 combien de fois 7, il n'est pas utile de mettre une virgule entre le 3 et le 1.

38,15	7
3 1	5,45
35	
0	

$38{,}15 = 7 \times 5{,}45$
L'écriture de cette égalité doit être systématique après chaque calcul.
Chaque carnet coûte 5,45 F.

V.1.2. - Diviser 451 par 13.

451	13
61	34
9	

Peut-on continuer ?
Il reste 9 unités, ou 90 dixièmes. On peut placer une virgule après 451 et écrire 451,0.

En divisant 90 dixièmes par 17, on aura des dixièmes au quotient donc on place une virgule après 34. Continuer jusqu'aux centièmes.

4 5 1 , 0 0	1 3
6 1	3 4 , 6 9
9 0	
1 2 0	
3	

On décide de s'arrêter là.
Écrivez l'égalité :
On obtient bien sûr : $451 = (13 \times 34{,}69) + 3$
Vérifiez cette égalité. (soit en utilisant la calculatrice, soit "à la main").

Surprise ! **où est l'erreur ?**
Combien reste-t-il ? 3 quoi ?
Beaucoup d'enfants ont de la difficulté à voir qu'il reste 3 centièmes. On place donc les colonnes du tableau de numération.

c d u	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	
4 5 1 ,	0	0	1 3
. .	.	.	3 4 , 6 9
	.	.	
		3	

on peut écrire

$451 = (13 \times 34{,}69) + \frac{3}{100}$

$451 = (13 \times 34{,}69) + 0{,}03$

Comme technique, on peut proposer aux enfants de tracer un trait “vertical” à l’emplacement de la virgule. Quand on cherchera à écrire le reste, il suffira de compléter avec des zéros jusqu’à la colonne des unités.

Exemple :

3 4 2 , 0 0 0	47
-3 2 9	7 , 2 7 6
1 3 0	
3 6 0	
-3 2 9	
3 1 0	
-2 8 2	
0 , 0 2 8	

$342 = (47 \times 7{,}276) + 0{,}028$

Autre exemple :

5 2	6 7

Si les enfants ont eu l’habitude de dire “ça ne se peut pas” “ça n’est pas possible” dans de tels cas au cours de l’apprentissage de la division, on rencontre bien sûr des difficultés.
Par contre s’ils ont compris que $52 = (67 \times 0) + 52$ c’est-à-dire que le quotient est zéro ou “qu’il y va 0 fois”, il n’y a pas de problème.
- Arriver à $52 = (67 \times 0{,}77) + 0{,}41$ et faire vérifier pour convaincre tous les enfants.

V.1.3.Quotient décimal approché au dixième près, au centième près.

Cela signifie que je veux écrire le quotient avec un chiffre dans la colonne des dixièmes (ou des centièmes, ...) Il faut donc avoir au dividende des dixièmes (ou centièmes ou, ...) “à distribuer”, à diviser.

Technique possible :
Trouver le quotient de 26 par 7 au millième près.

2 6, 0 0 0	7

On commence par écrire 26 en faisant apparaître les millièmes :
puis on conduit normalement les calculs.

Avantages : Dès la pose du calcul, on réserve la place nécessaire pour pouvoir le terminer en conservant une bonne disposition des chiffres.
Quand on a épuisé tous les chiffres du dividende, on s’arrête ; autrement dit on réfléchit d’abord, on calcule ensuite.

Trouver le quotient au dixième près de 13,454 par 8.

13,4	8
54	1,6
0,6	

Il nous suffit d'avoir un dividende comportant un chiffre pour les dixièmes.

13,4 = (18 × 1,6) + 0,6

V.1.4.- Quotient décimal approché par défaut : par excès à ... près.

Quand on effectue un calcul, on trouve toujours un quotient exact (si le reste est nul) ou s'il est approché, il l'est par défaut (puisqu'il y a un reste).
Pour obtenir le quotient par excès, je dois donc écrire à la place du dernier chiffre du quotient, le suivant de ce dernier chiffre.
Le quotient approché à un dixième près par défaut de 13,4 par 8 est 1,6
Le quotient approché à un dixième près par excès de 13,4 par 8 est 1,7.

V.1.5.- Problèmes.

• On coupe un ruban de 3,45 m en 6 morceaux de la même longueur. Donner au millimètre près la longueur de chaque morceau.

• 12 personnes se partagent les 1 342 F gagnés au loto. Donner au centime près par défaut la part de chacun.

• Le litre de mélange coûte 7 F. Calculer au centilitre près par défaut ce que le pompiste devrait mettre dans mon réservoir si je lui donnais 20 F.

V.2. Quotient de deux décimaux.

N'aborder ce paragraphe qu'après avoir fait plusieurs séances consacrées à des situations de proportionnalité.

Activités préparatoires :

> On a payé 20 F. un morceau de tissu de 1,25 m.
> Combien aurais-je payé 2,50 m ; 12,50 m ; 1 m ?

Prix payé en F.	long. en m.	
20	1,25	
.	2,50	m2
.	12,50	m10
.	125	m10
.	1	d 125

Après calculs, on trouve donc le prix d'un mètre à 16 F.

On vérifie que l'on a bien
1,25 × 16 = 20
2,50 × 16 = 40
etc.

On a payé 82,25 F un morceau de viande de 3,5 kg. Cherchez le prix d'un kilogramme.

Prix payé en F.	masse en kg
82,25	3,5
?	1

Des enfants cherchent à diviser 82,25 par 3,5 sans y parvenir. Nous leur suggérons de s'inspirer du problème précédent.
Certains cherchent le prix de 7 kg puis divisent par 7, d'autres cherchent le prix de 35 kg puis divisent par 35.

Lors de la synthèse, les 2 méthodes sont exposées...
On vérifie que le prix trouvé au kg : 23,50 F satisfait bien aux données $23{,}5 \times 3{,}5 = 82{,}25$.

Sur l'étiquette de mon paquet de viande, je lis 35,10 F et 1,350kg, et aussi le prix au kilogramme. Cherchez le prix au kilogramme.

Cette fois, le plus facile et le plus rapide est bien de calculer le prix de 135 kg (certains enfants cherchent le prix de 1350 kg), puis de diviser par 135. On trouve 26 F.
On vérifie que $1{,}350 \times 26 = 35{,}10$.
La recherche a été menée dans un tableau à 2 colonnes comme précédemment.

Synthèse des activités précédentes. On dresse les trois tableaux suivants :

Pour trouver le prix d'un mètre ou d'un kilogramme, on a cherché à calculer :

2 0	1 , 2 5

8 2 , 2 5	3 , 5

3 5 , 1 0	1 , 3 5 0

Mais on ne savait pas comment faire à cause des diviseurs à virgule. En fait, on a calculé :

2 0 0 0	1 2 5
7 5 0	1 6
0	

8 2 2 , 5	3 5
1 2 2	2 3, 5
1 7 5	
0 0	

3 5 1 0	1 3 5
8 1 0	2 6
0 0 0	

Pour calculer ceci, on s'est arrangé pour avoir des diviseurs sans virgule : on a donc multiplié
1,25 et 20 par 100 3,5 et 82,25 par 10 1,350 et 35,10 par 100.

On peut faire cela directement : poser 20 divisé par 1,25 ;
on multiplie les 2 nombres par 10, 100, 1000, ... jusqu'au moment où le diviseur ne comporte plus de virgule puis on fait les calculs.

Exemple :

8 2 2 , 5	3 5
1 2 2	2 3, 5
1 7 5	
0 0	

Égalité : Reprendre les nombres d'où nous sommes partis 82,25 et 3,5.

$82{,}25 = 3{,}5 \times 23{,}5$ car on a aussi :

$822{,}5 = 35 \times 23{,}5$

on trouve bien le même quotient 23,5.

Problème : **Combien de morceaux de ruban de 0,45 m de long peut-on obtenir avec 13,2 m de ruban.**

1 3, 2 0	0, 4 5
4 2 0	2 9
1 5	

Réponse : 29 morceaux

que reste-t-il ?

On peut demander encore d'écrire l'égalité et de la vérifier par le calcul.
Voir ensuite qu'il reste 15 **cm** (placer m au dessus du 3, puis dm et cm),on a donc comme reste 0,15 m.
On peut alors faire tracer un trait vertical en pointillé à la place de la vraie virgule pour trouver aisément le reste à la fin des calculs.

Problème : **Le litre d'essence coûte 5,88 F. Calculer au centilitre près la quantité d'essence que le pompiste devrait mettre dans le réservoir quand on lui donne 150 F.**

1 5 0, 0 0 , 0 0	5, 8 8

Explications : au lieu de calculer 150 divisé par 4,88 on calcule 15000 divisé par 488.
On veut un quotient au centième près il faut donc écrire 15000,00

1 5 0, 0 0 , 0 0	5, 8 8
3 2 4 0	2 5 , 5 1
3 0 0 0	
6 0 0	
0, 0 0 1 2	

réponse 25,51 litres
égalité $150 = (5{,}88 \times 25{,}51) + 0{,}0012$

Ici nous sortons du cadre du programme du CM2 mais nous vérifions que les pratiques indiquées précédemment sont applicables dans tous les cas.

VI. ACTVITES COMPLEMENTAIRES ET FACULTATIVES.

VI.1.- Recherche de la fraction irréductible égale à une fraction donnée.

Les enfants ont déjà vu $\frac{2}{3} = \frac{2\times2}{3\times2} = \frac{2\times3}{3\times3} = \frac{2\times4}{3\times4} = \frac{2\times5}{3\times5} = \ ... = \frac{2\times\Delta}{3\times\Delta}$

où Δ est un nombre entier $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \ ...$

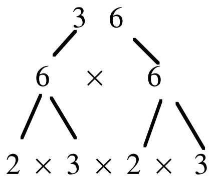
A partir de cette observation, si on leur demande d'écrire une fraction égale à $\frac{12}{20}$ dont les deux nombres sont plus petits, ils écrivent facilement et naturellement :

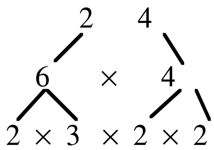
$$\frac{12}{20} = \frac{12:2}{20:2} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{6}{10} = \frac{6:2}{10:2} = \frac{3}{5} \text{ d'où } \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Bien que nous ne soyons pas habitués à de telles écritures, elles sont correctes et nous devons les accepter. Une étude plus systématique peut être conduite : chercher le plus grand nombre par lequel on peut diviser le numérateur et le dénominateur d'une fraction. On utilisera bien sûr les caractères de divisibilité.

Exemple :
On cherche une écriture multiplicative de 36 dont chacun des termes est un nombre premier, de même pour 24.





$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ $\qquad$ $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

Soulignons les termes communs aux deux écritures

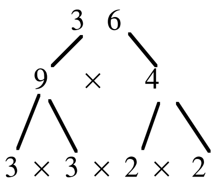
$36 = \underline{2} \times \underline{2} \times 3 \times \underline{3}$ $\qquad$ $24 = \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times \underline{3}$

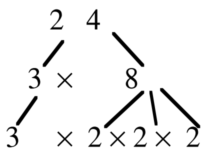
d'où

$36 = 3 \times \boxed{2 \times 2 \times 3}$ $\qquad$ $24 = 2 \times \boxed{2 \times 2 \times 3}$

$$\frac{36}{24} = \frac{3 \times \boxed{2 \times 2 \times 3}}{2 \times \boxed{2 \times 2 \times 3}}$$ (il est inutile de calculer $2 \times 2 \times 3$)

Remarque : Des enfants ont pu procéder autrement





Mais tous trouvent les mêmes écritures multiplicatives pour 36 et 24.

Le produit de 2 fractions étant connu, on peut aussi écrire

$$\frac{3 \times \boxed{2 \times 2 \times 3}}{2 \times \boxed{2 \times 2 \times 3}} = \frac{3}{2} \times \frac{\boxed{2 \times 2 \times 3}}{\boxed{2 \times 2 \times 3}} = \frac{3}{2} \times 1$$

Autre exemple :

$$\frac{21}{105} \qquad \begin{array}{l} 21 = 3 \times 7 \\ 105 = 3 \times 5 \times 7 \end{array} \qquad \frac{21}{105} = \frac{\boxed{3 \times 7}}{5 \times \boxed{3 \times 7}} = \frac{1 \times \boxed{3 \times 7}}{5 \times \boxed{3 \times 7}} = \frac{1}{5}$$

Méthode préférable à celle qui consiste à barrer en haut et en bas le 3 et le 7 et qui conduit beaucoup d'enfants à dire qu'au numérateur il ne reste rien donc que le numérateur est zéro.

L'autre méthode : $\frac{21}{105} = \frac{21:3}{105:3} = \frac{7}{35} = \frac{7:7}{35:7} = \frac{1}{5}$ est bonne aussi puisqu'on ne "supprime" rien et que 7 : 7 est bien égal à 1 pour les enfants.

VI.2.- Peut-on toujours trouver une fraction décimale égale à une fraction donnée ?

Posons la division de 45 par 22 et continuons les calculs au moins jusqu'au 100 000ème.

45,00000	22
100	2,04545
120	
100	
120	
10	

Les enfants remarquent que l'on trouve toujours les mêmes restes : 10, 12, 10, 12, ... et les mêmes chiffres au quotient : 4, 5, 4, 5.
On ne pourra donc jamais écrire 45 = 22 × Δ où Δ est un nombre à virgule ; il restera toujours quelque chose, le reste sera jamais nul.

D'autres calculs peuvent être conduits :

divisions de 20 par 3, de 452 par 111, de 9 par 11, de 100 par 7 qui amèneront la même remarque.

Le quotient de 45 par 22 n'est pas un nombre décimal. Il peut être écrit à l'aide d'une fraction : $\frac{45}{22}$. Il n'existe pas de fraction décimale (c'est-à-dire ayant 10, ou 100 ou 1000 ou 10 000 ou ... pour dénominateur) égale à $\frac{45}{22}$.

Par contre divisons 77 par 22. Nous trouvons 3,5
$77 = 22 \times 3{,}5$
divisons 91 par 56 le quotient est 1,625
$91 = 56 \times 1{,}625$

de même les quotients de 13 par 4, de 27 par 5, de 39 par 8 sont des nombres décimaux.

$\frac{77}{22} = 3{,}5 = \frac{35}{10}$ $\qquad \frac{91}{56} = 1{,}625 = \frac{1625}{1000}$ $\qquad \frac{13}{4} = 3{,}25 = \frac{325}{100}$ $\qquad \frac{27}{5} = 5{,}4 = \frac{54}{10}$

$\frac{39}{8} = 4{,}875 = \frac{4875}{1000}$

Pour certaines fractions, on peut donc trouver une fraction décimale qui leur soit égale.

Comment reconnaître qu'une fraction est égale à une fraction décimale sans avoir à poser la division ?

Pour $\frac{27}{5}$ c'est évident : $\frac{27}{5}=\frac{27\times 2}{5\times 2}=\frac{54}{10}$ de même pour $\frac{13}{2}$: $\frac{13}{2}=\frac{13\times 5}{2\times 5}=\frac{65}{10}$

Pour $\frac{13}{4}$?

$\frac{13}{4}=\frac{13\times 5}{4\times 5}=\frac{65}{20}=\frac{65\times 5}{20\times 5}=\frac{325}{100}$ ou

$\frac{13}{4}=\frac{13\times 5\times 5}{4\times 5\times 5}=\frac{13\times 5\times 5}{2\times 2\times 5\times 5}=\frac{13\times 5\times 5}{(2\times 5)\times(2\times 5)}$ ou

$\frac{13}{4}=\frac{13\times \Delta}{4\times \Delta}$ tel que ($4\times\Delta$) soit égal à 10 ou 100 ou 1000 ...or

$10 = 2\times 5$
$100 = (2\times 5)\times(2\times 5)$
$1000 = (2\times 5)\times(2\times 5)$
etc....

Si le dénominateur de la fraction donnée admet une écriture multiplicative ne comportant que des 2 ou des 5 on pourra en multipliant convenablement par 2 ou par 5 autant de fois qu'il le faut, obtenir un dénominateur qui soit une puissance de dix.

Exemple : . $\frac{39}{8}=\frac{39}{2\times 2\times 2}=\frac{39\times 5\times 5\times 5}{2\times 2\times 2\times 5\times 5\times 5}=\frac{4875}{1000}$

. $\frac{77}{22}=\frac{77}{2\times 11}$

Nous sommes en contradiction on a ce que nous avons dit plus haut mais on remarque aisément que : $\frac{77}{22}=\frac{7\times 11}{2\times 11}=\frac{7}{2}$

$\frac{7}{2}=\frac{7\times 5}{2\times 5}=\frac{35}{10}$

de même pour $\frac{91}{56}=\frac{7\times 13}{7\times 8}=\frac{13}{8}=\frac{13\times 5\times 5\times 5}{8\times 5\times 5\times 5}=\frac{1625}{1000}$

Pour reconnaître si une fraction donnée est égale à une fraction décimale, il faut donc d'abord trouver la fraction irréductible puis voir si son dénominateur admet une écriture multiplicative ne comportant pas d'autres termes que des 2 ou des 5.

L'étude des fractions et les nombres décimaux sera encore complétée dans le chapitre suivant : fonctions numériques et proportionnalité.

FONCTIONS NUMÉRIQUES ET PROPORTIONNALITÉ AU C.M.

Nous ne différencierons pas les activités spécifiques à chacun des niveaux CM1 et CM2 dans le développement des activités.
Selon le temps dont les maîtres disposeront au CM1, ils proposeront des situations comme celles présentées dans le Chapitre I. Elles ne relèveront pas toutes de la proportionnalité.
L'objectif sera d'introduire des tableaux de nombres <u>à partir de situations</u> pour ensuite travailler sur ces tableaux et étudier quelques fonctions et leurs propriétés (conservation ou non de l'ordre, des écarts, notation du type ❐ → ❐ + 3, *représentation graphique).*

I. DIVERSES SITUATIONS-PROBLÈMES.

Objectifs : **- Représenter ces situations sous différentes formes (tableaux de nombres, graphiques, ...)**
- Découvrir et utiliser les propriétés caractéristiques des fonctions n → n × a (a étant un naturel ou un décimal, voire une fraction simple).

<u>Remarque</u> : pour atteindre le deuxième objectif, il est apparu souhaitable de commencer par des situations où a est une fraction simple. Si nous présentons une situation trop évidente du genre :
"Sur chaque baril de lessive, on trouve 2 petites voitures compléter le tableau..."
les enfants multiplient ou divisent par 2 pour compléter le tableau sans ressentir la nécessité ni l'intérêt de procéder selon d'autres méthodes.

<u>Matériel</u> : Prévoir des feuilles "à petits carreaux" 21 × 29,7 pour les représentations graphiques. ou des photocopies de la feuille "à petits carreaux" donnée en dernière page.

<u>I.1. - Situation 1</u>. (Les textes à photocopier de toutes ces situatuions se trouvent p. 116 et p. 117)

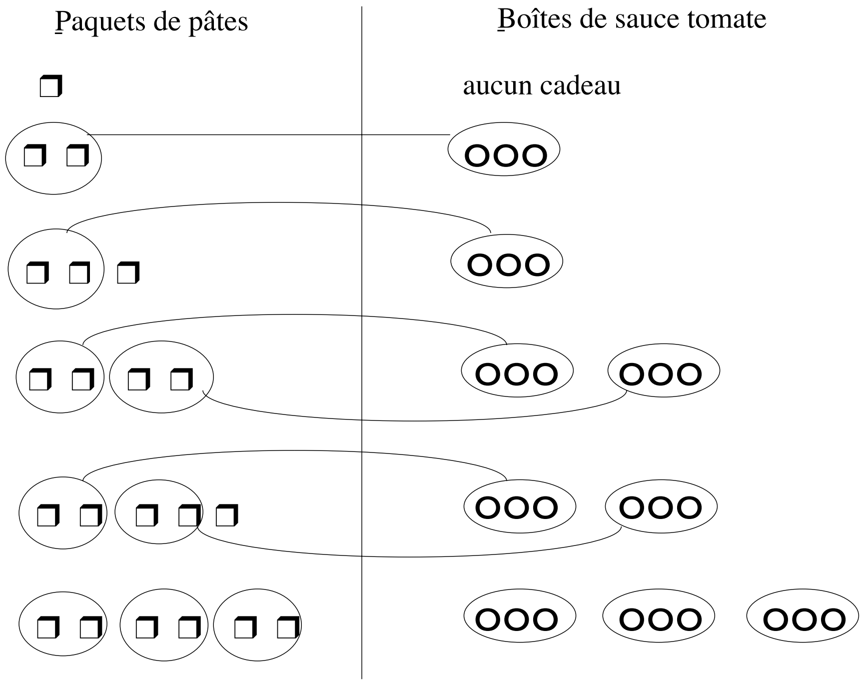
Objectif : **Comprendre une situation simple de proportionnalité.** (Les petits nombres et la possibilité de représenter fidèlement la situation doivent le permettre)

> Pour tout achat de 2 grands paquets de pâtes, un grand magasin offre 3 petites boîtes de sauce tomate.
> Choisis des nombres de paquets de pâtes achetés et calcule à chaque fois le nombre de boîtes de sauce tomate offertes.

<u>Déroulement</u> : Les enfants cherchent librement, seuls ou par groupe sur leur cahier d'essai pendant quelques minutes puis le maître demande d'énoncer les résultats obtenus.

Un certain nombre d'enfants a généralement mal compris le texte et pensé qu'on obtenait une boîte de sauce tomate <u>de plus</u> que de paquets de pâtes.

Une série de dessins faits au tableau au fur et à mesure permettront à tous de bien comprendre et on pourra encore s'y référer par la suite :



Dire : **Chaque fois qu'on achète 2 paquets de pâtes, on reçoit 3 boîtes de sauce tomate. Si on achète un seul paquet, on ne reçoit aucune boîte** (ce qui choque souvent les enfants).
A ce moment, les enfants suggèrent généralement de ne s'intéresser qu'aux achats d'un nombre pair de paquets de pâtes et ils reprennent leurs recherches.

• Au bout de quelques minutes, on collectionne les trouvailles en dressant un tableau à côté des dessins :

Nombres de paquets	Nombres de boîtes
2	3
4	6
6	9
8	12
10	15
12	18
14	21

puis on demande de faire des remarques sur ce tableau :

– On a la suite des nombres pairs (plutôt le début, sauf 0 que l'on peut ajouter).

– Dans la 2ème colonne les nombres sont impairs. Cette erreur est très fréquente : confusion entre multiples de 3 (qui est impair) et nombres impairs. On peut rappeler que les nombres impairs sont ceux qui <u>ne sont pas pairs</u> donc qui ne sont pas multiples de 2.

– Dans la 2ème colonne, les nombres vont de 3 en 3, sont multiples de 3.

On ajoutera dans le tableau ces remarques sous la forme suivante :

Nombres de paquets	Nombres de boîtes
0	0
a2	a3
2	3
a2	a3
4	6
a2	a3
6	9

Questions :
- **Combien aura-t-on de boîtes de sauce tomate si on achète 24, 28, 32 paquets de pâtes ?**
- **Combien de paquets de pâtes a-t-on achetés si on a reçu 27 boîtes de sauce tomate, 45 boîtes, 123 boîtes ?**

<u>Mise en commun</u> des résultats et surtout des méthodes employées.
1. Certains continuent de 14 à 24 en allant de 2 en 2 et en allant de 3 en 3 dans la 2ème colonne.

2. Certains commencent de la même façon puis accélèrent en allant de 4 en 4, ils se justifient en montrant que pour 4 paquets on a 6 boîtes.

3. Quelques uns écrivent directement, et sans forcément être capable de bien l'expliquer : pour 20 paquets, on a 30 boîtes (en partant de la ligne “10 paquets, 15 boîtes”) puis en allant de 2 en 2 jusqu'à 24, ou en ajoutant directement 4.

4. Il est arrivé que quelques uns expliquent :

	avec 10 paquets on a 15 boîtes	
	avec 14 paquets on a 21 boîtes	
donc	avec 24 paquets on a 36 boîtes.	
	(10 + 14)	(15 + 21)

5. Enfin quelques uns disent qu'ils ont divisé 24 par 2 puis qu'ils ont multiplié par 3 mais sans pouvoir l'expliquer clairement à leurs camarades.

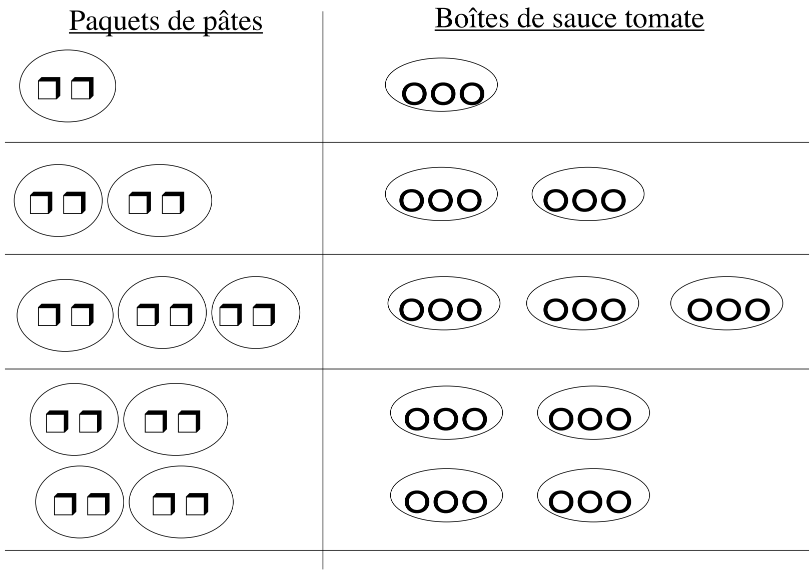
• On aidera tous les élèves à comprendre chaque méthode par des explications complémentaires :
- pour le 3. par exemple :

Avec 10 paquets on a eu 15 boîtes (ligne correspondante du tableau). Si on achète <u>encore</u> 10 paquets on aura <u>encore</u> 15 boîtes. Avec 20 (10 + 10) paquets on aura donc 30 (15 + 15) boîtes et cela en s'aidant au besoin des dessins des boîtes et des paquets.

Tous les élèves sont capables de comprendre et il ne faut surtout pas se laisser entraîner à aller trop vite avec les meilleurs éléments : on pourra leur proposer pendant ce temps des calculs plus difficiles du type “pour un achat de 84 paquets, combien de boîtes ?”

- Explications pour le 5.

On retourne aux dessins :
Pour 2 paquets on a 3 boîtes



ici on pourra obtenir :
pour **4 fois** 2 paquets,
on a **4 fois** 3 boîtes

et continuer :
pour **5 fois** 2 paquets,
on a **5 fois** 3 boîtes, etc.

Écrivons cela dans le tableau des nombres :

Nombre de paquets	Nombre de boîtes	
0	0	
2	3	
$4 = 2 \times \mathbf{2}$	$6 = 2 \times 3$	2 fois 2 paquets, 2 fois 3 boîtes
$6 = 3 \times \mathbf{2}$	$9 = 3 \times 3$	3 fois 2 paquets, 3 fois 3 boîtes
$8 = 4 \times \mathbf{2}$	$12 = 4 \times 3$	
$10 = 5 \times \mathbf{2}$	$15 = 5 \times 3$	
$12 = 6 \times \mathbf{2}$	$18 = 6 \times 3$	

On retrouve les remarques déjà faites :
- on voit dans la 1ère colonne les multiples de 2 et dans la 2ème colonne les multiples de 3
- on voit aussi que dans la 1ère colonne on a partout $. \times \mathbf{2}$
- on voit aussi que dans la 2ème colonne on a partout $. \times 3$ et on les repasse à la craie de couleur.

• On écrit 24 dans la 1ère colonne :
24 paquets, c'est combien de fois 2 paquets ? $24 = . \times 2$
Quand on saura combien de fois 2 paquets, on saura combien de fois 3 boîtes on obtient.

$12 = 6 \times \mathbf{2}$ $18 = 6 \times 3$

$24 = \ . \times \mathbf{2}$ $= \ . \times 3$ on trouve facilement 12

et on complète :

$24 = 12 \times \mathbf{2}$ $36 = 12 \times 3$

• Pour 28 paquets ? Utilisez plusieurs méthodes.
<u>Exemples</u> : $28 = 10 + 10 + 8$
$28 = 20 + 8$
$28 = 24 + 4$
$28 = 14 \times 2$

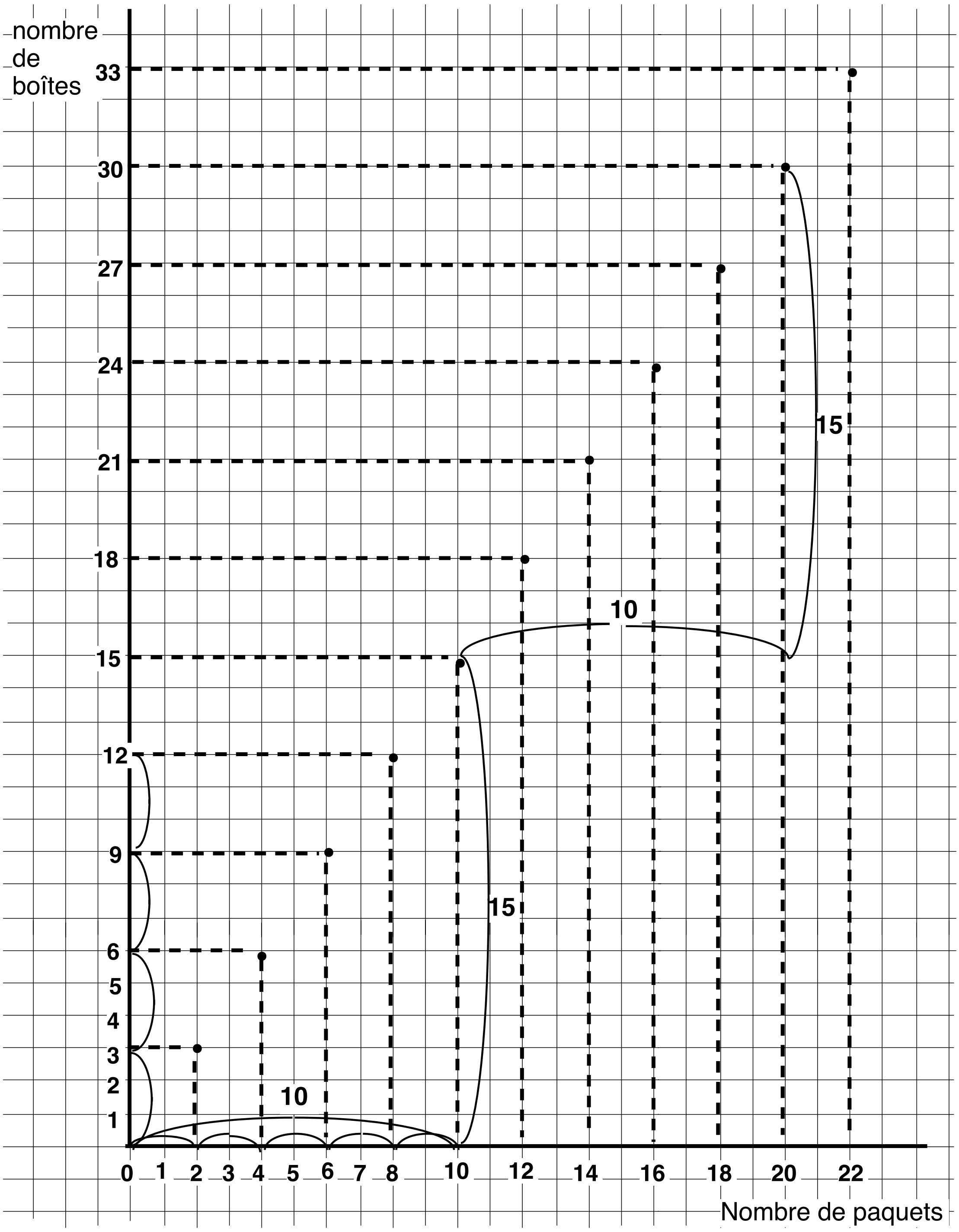
• Le même raisonnement que plus haut pourra être repris avec certains enfants pour répondre aux questions suivantes : **on a obtenu 27 boîtes, 45 boîtes combien de paquets a-t-on achetés ?**

• On a obtenu 123 boîtes ...?
Il faut savoir combien de fois 3 boîtes cela représente. On peut trouver mentalement 41 mais pour certains, il faudra poser la division.
Continuer en demandant : **on a obtenu 1011 boîtes, combien de paquets ?** question qui oblige pratiquement tous les enfants à poser la division. Tout le monde peut alors comprendre pourquoi certains ont divisé par 2 puis multiplié par 3.

• Recopiez sur vôtre cahier le tableau avec les écritures multiplicatives dans les 2 colonnes.

<u>Représentation graphique</u> : Distribuer à chaque enfant une demi feuille de papier $21 \times 29{,}7$ à petits carreaux. Tracer au tableau les 2 axes. Faire graduer les 2 axes. Aller très lentement et passer derrière chaque enfant.
Le nombre d'erreurs est assez considérable surtout si cette activité n'a jamais été pratiquée avant. Veiller à ce que les enfants écrivent bien les chiffres sur les lignes et non entre les lignes.

<u>*Remarque pour le maître :*</u>
- La représentation graphique de notre fonction qui, à un nombre de paquets associe un nombre de boîtes est constituée de points bien séparés les uns des autres. Ces points sont alignés parce que les graduations utilisées sur les 2 axes sont régulières. Avec les enfants on vérifiera l'alignement en plaçant une règle mais dans le cadre de notre problème, nous ne faisons pas tracer la droite, sinon avec cette droite nous pourrions lire qu'avec 1 paquet on a 1,5 boîte par exemple.



<u>Utilisation de la représentation graphique avec les enfants :</u>
a) Lecture :
- Trouvez à l'aide du graphique le nombre de boîtes obtenues par l'achat de 12 paquets.
- On a obtenu 33 boîtes donc on a acheté combien de paquets ?

b) Retrouver sur le graphique les remarques faites sur le tableau :
– Si j'achète 10 paquets soit **5 fois 2 paquets** (le montrer par des arcs de courbes, en pointillés sur le graphique) on obtient **5 fois 3 boîtes**.

– Chaque fois qu'on augmente de 2 le nombre de paquets, on augmente de 3 le nombre de boîtes.

– Pour 10 paquets on a 15 boîtes (arc de courbe), encore pour 10 paquets on a encore 15 boîtes. On arrive à : pour 20 paquets on a 30 boîtes, ou pour (10 + 10) paquets on a (15 + 15) boîtes, ou pour 2×10 paquets on a 2×15 boîtes.

I.2. - Situation 2.

Objectif : Comprendre une situation simple de proportionnalité. Réutiliser les méthodes découvertes avec la situation précédente.

Jean a des billes, René a des images. Ils veulent faire des échanges. Ils décident de la règle : pour 3 billes on a 5 images. Faites un tableau pour y indiquer des échanges possibles.

Déroulement : Comme précédemment, mais les trouvailles sont beaucoup plus rapides. Quand les enfants ont trouvé les nombres d'images reçues pour 0, 3, 6, 9, 12 billes, on pose les questions :

– Pour 18 billes, 27 billes, 60 billes, 213 billes, ... on aurait combien d'images?

– Pour 500 images, 715 images, on aurait combien de billes ?

Mise en commun des méthodes utilisées.

a) dresser le tableau

Nombre de billes	Nombre d'images
0	0
3	5
6	10
9	15
12	20
18	.
27	.
60	.
213	.
.	500
.	715

• Des enfants écrivent directement $18 = \boxed{6} \times 3$ d'où $\boxed{6} \times 5 = 30$ images
de même pour tous les autres nombres à chercher.

• D'autres utilisent l'addition : 18 = 12 + 6 d'où 20 + 10 = 30 images

• Pour 60 billes, certains disent :
pour 6 billes 10 images
alors pour 60 billes 100 images (on ajoute un zéro)

Cette explication risque d'être dangereuse et n'est pas suffisante. Il faudra les amener à dire et écrire que $60 = 6 \times 10$ et que pour **10 fois** 6 billes on aura **10 fois** 10 images

• Pour 213 billes
Beaucoup d'enfants font des erreurs ou ne parviennent pas à trouver s'ils n'écrivent pas :

$$213 = 71 \times 3.$$

On leur demande alors de regarder sur leur cahier comment on avait résolu la situation des boîtes de sauce tomate (pour trouver qu'il faut diviser par 3) .

Pour 715 images, des enfants ne divisent pas par 5 mais ayant trouvé 100 images, 500 images, 15 images, trouvent en faisant :

$$715 = 500 + 100 + 100 + 15$$

• Faire recopier sur le cahier le tableau suivant qui aura été établi en commun et remarquer que dans la 1ère colonne on a des multiples de 3 et dans la 2ème des multiples de 5.

Nombres de billes	Nombres d'images
0	0
3	5
6 = 2 × 3	10 = 2 × 5
9 = 3 × 3	15 = 3 × 5
12 = 4 × 3	20 = 4 × 5
15 = 5 × 3	25 = 5 × 5
18 = 6 × 3	30 = 6 × 5
27 = 9 × 3	45 = 9 × 5
60 = 20 × 3	10 0 = 20 × 5
213 = 71 × 3	355 = 71 × 5
300 = 100 × 3	**500** =100 × 5
429 = 143 × 3	**715** =143 × 5

<u>Représentation graphique</u> : sur une demi feuille à petits carreaux (jusqu'à 21 billes et 35 images).
Penser à écrire sur les axes : Nombres de billes - Nombres d'images.
On obtient des points alignés mais on ne trace pas la droite.

<u>Remarques</u> : Cette situation, comme la précédente se prête à être dessinée pour aider les enfants les plus faibles : des carrés pour les images, de petits ronds pour les billes.

Nous avons pu explorer beaucoup de méthodes de calculs mais il peut être souhaitable de prévenir les parents d'élèves afin qu'ils n'aident pas prématurément les enfants en leur faisant faire la "bonne (?) " vieille règle de trois.

Dans les situations suivantes, on va introduire des mesures : prix, capacités, longueurs. Il sera beaucoup plus difficile de les représenter par des dessins et ce n'est généralement guère efficace.

Contrairement à ce que l'on voit dans beaucoup de livres du commerce, il faut laisser aux enfants le soin de construire le tableau, d'y remplir convenablement les titres des colonnes et ne pas leur donner tout fait.

I.3. - Situation où les 2 listes de nombres ne sont pas proportionnelles.

Objectif : Distinguer ce qui différencie les situations de non proportionnalité des situations de proportionnalité.

On intercalera une situation de non proportionnalité entre un bloc de 2 ou 3 situations de proportionnalité.

Aujourd'hui, Paul a 10 ans et son frère René a 14 ans. Quand Paul avait 9 ans, 7 ans, 4 ans, 1 an quels étaient les âges de René ? Quand René aura 15 ans, 18 ans, quels seront les âges de Paul ?

Laisser les enfants chercher à leur guise, puis demander à ceux qui ont terminé de présenter en tableau s'ils ne l'ont pas déjà fait :

Ages de Paul	Ages de René
10	14
9	
7	
4	
1	

Pour certains enfants, on peut utiliser la frise historique, ou simplement une demi-droite numérique sur laquelle on place l'année actuelle et où on écrit en reculant les années précédentes jusqu'à la naissance de René.

- En synthèse faire découvrir et ajouter au tableau : $\xrightarrow{a4}$ et $\xleftarrow{r4}$
- Faire faire la représentation graphique.
  On peut aller plus loin en proposant des âges de 3 ans 6 mois, 4 ans 3 mois,...

I.4.- Situation 3.

Objectif : Utiliser les francs (qui ne se représentent pas)
Augmentation de la taille d'un des 2 nombres.

Un magasin propose des filets contenant 3 boîtes de pâté pour 14 F. Combien paiera-t-on 6 boîtes, 9 boîtes, 24 boîtes, 114 boîtes ? Si on a payé 140 F , 784 F, combien de boîtes a-t-on achetées à chaque fois ?

Déroulement : Pas de difficultés particulières.

Remarquons que les 2 premières questions (pour 6 et 9 boîtes) ne sont pas inutiles : elles permettent aux enfants de prendre le temps de bien comprendre la situation.
On ne fera généralement pas la représentation graphique à moins que l'on juge les enfants déjà capables de représenter sur l'axe des prix, 14 unités par 4 ou 5 carreaux seulement, mais c'est rarement le cas.

I..5. - Situation 4.

Objectif : **Utiliser des unités de mesure (ici de masse). Travailler avec de plus grands nombres. Diviser les 2 nombres d'une même ligne par un même nombre.**

> Le pâtissier utilise 2 500 g de chocolat pour faire 350 petits œufs de Pâques.
> Quelle quantité de chocolat a été utilisée pour 35 œufs ? pour 7 œufs ? pour 700 œufs ?
> Avec 150 g de chocolat on pourrait faire combien d'œufs ?
> Avec 1 kg de chocolat ? avec 3,500 kg de chocolat ?

Déroulement : Les enfants voient bien qu'il faut diviser par 10 pour passer de 350 œufs à 35 œufs. Quand on leur demande d'écrire dans le tableau ce qu'il ont fait, ils écrivent naturellement :
35 = 350 : 10 et 250 = 2500 : 10 dans les colonnes du tableau.

Remarque : Ne pas utiliser d'expressions comme "10 fois moins", "5 fois moins", "100 fois plus" qui relèvent pour l'enfant du charabia et ne l'aident pas à différencier la soustraction de la division, au contraire !

Exemples de résolution donnée par des enfants :

Nombres de g de chocolat	Nombres d'œufs
2 500	**350**
250 = 2500 : 10	**35** = 350 : 10
50	**7**
50 × 100 = 5000	**700**
150 = 3 × 50	7 × 3 = 21
5000 : 5 = **1000**	700 : 5 = 140
3500 = 2500 +1000	350 + 140 = 490

Nombres de g de chocolat	Nombres d'œufs
2500	350
$\xrightarrow{d10}$ 250	$\xrightarrow{d10}$ 35
$\xrightarrow{d5}$ 50	$\xrightarrow{d5}$ 7
5000	700
$\xrightarrow{m3}$ 150	$\xrightarrow{m3}$ 21
1000	700 : 5 = 140
3500	350 + 140 = 490

I.6. - Situation de non proportionnalité.

Objectif : **Obtenir une représentation graphique constituée de points non alignés contrairement aux autres situations rencontrées.**

> 1. Trace des carrés de 2, 3, 4 carreaux de côté. Compte le nombre total de carreaux dans chaque carré. Écris tes résultats dans un tableau.
> 2. Calcule ensuite le nombre total de carreaux dans des carrés qui ont 5, 6, 7, 10 carreaux de côté , en essayant de trouver sans dessiner les carrés.
>   Un carré qui a 81 carreaux au total a un côté de ?
> 3. Fais la représentation graphique. Que remarques-tu ?

Remarque : quand on ***double*** *la longueur du côté, l'aire* ***ne double pas****.*

I.7. - Situation 5.

Objectif : Première approche des pourcentages.

Un commerçant fait des remises (ou réductions) sur tous ses prix, toujours de la même façon : il rembourse 15F chaque fois qu'on paye 100F. Sur des prix de 400F, 500F, 900F, 1 000F, 50F, 10F, 160F, 330F, 35 000F, 23F, 7F, quelles remises fera-t-il ?

Lors de la mise en commun on fera quelques remarques :

Prix affichés en F.	Réductions en F.	Remarques :
100	15	Il peut être nécessaire de demander à certains enfants de passer par 200 : 200 = 100 + 100 donc réduction 15 + 15 300 = 100 + 100 + 100 donc 3 × 100 donc réduction 3 × 15
400 = 4 × 100	4 × 15 = 60	
500 = 400 + 100	60 + 15 = 75	→ est plus rapide que de calculer 5 × 15
900 = 500 + 400	75 + 60 = 135	→ est plus rapide que de calculer 9 × 15
1000	150	→ ou aussi 135+15
50 = 100 : 2	15 : 2 = 7	→ *pas de difficulté de compréhension.*
10 = 100 : 10	15 : 10 = 1,5	
160 = 100 + 50 + 10	15 + 7,5 + 1,5 = 24	→ ou 160 = 1,6 × 100 | 1,6 × 15 = 24
330 = . × 100	. × 15 =	
35 000 = 350 × 100	350 × 15 = 5 250	
23 = . × 100	. × 15 =	
7 = . × 100	. × 15 =	

Pour les 3 lignes laissées sans réponse, le maître devra aider une bonne partie des élèves en posant les questions : **330 c'est combien de fois 100 ?**
Par quel nombre multiplier 100 pour obtenir 330 ?
En 330 combien de fois 100 ? et on pense enfin à diviser par 100 et aux nombres décimaux :

330 = $\boxed{3,30}$ × 100	$\boxed{3,30}$ × 15 = 49,50
23 = $\boxed{0,23}$ × 100	$\boxed{0,23}$ × 15 = 3,45
7 = $\boxed{0,07}$ × 100	$\boxed{0,07}$ × 15 = 0,75

• **Au lieu d'employer diverses méthodes parce qu'elles étaient rapides, on aurait pu procéder de la même façon à chaque ligne : chercher combien de fois 100 c'est à dire diviser par 100 et ensuite multiplier par 15.** Noter ceci dans le tableau avec les flèches:

Prix affichés en F.	Réductions en F.
100 **d100** **m15**	15
400 = $\boxed{4}$ × 100 **d100** **m15**	$\boxed{4}$ × 15 = 60
23 = $\boxed{0,23}$ × 100	$\boxed{0,23}$ × 15 = 3,45

ou

Prix affichés en F.	Réductions en F.
100 **d100**	15 **m15**
400 = $\boxed{4}$ × 100 **d100**	$\boxed{4}$ × 15 = 60 **m15**
23 = $\boxed{0,23}$ × 100	$\boxed{0,23}$ × 15 = 3,45

puis noter la règle valable pour tout le tableau :

$\xrightarrow{d100}$ $\xrightarrow{m15}$

Prix affichés en F.	Réductions en F.

• Faire écrire en français quelques réponses.
Exemple : Pour un prix affiché de 23 F., le commerçant fait une remise de 3,45 F.

• Revenir en arrière dans le cahier pour noter des règles de la même façon (ou attendre d'avoir fait le travail sur les tableaux de nombres sans texte (voir chapitre II)).

I.8.- Situation 6.

Objectifs : Première approche de calculs d'échelles (il est souhaitable que les enfants aient déjà été en contact avec des plans auparavant).
Travailler sur une fonction n $\rightarrow$n $\times$ a où a n'est plus une fraction mais un entier naturel.

> Pour faire le plan de la classe, on décide de représenter une longueur d'un mètre mesurée dans la salle par un trait de 6 cm tracé sur le cahier.
> Voici des mesures prises dans la classe : 3 m ; 0,60 m ; 2,7 m ; 6,45 m.
> Trouver les mesures correspondantes des traits à tracer sur la feuille.
>
> Sur la feuille, on trouve les dimensions suivantes : 7,2 cm ; 15 cm ; 30 cm.
> A quelles longueurs correspondent-elles dans la classe ?

Déroulement : En principe, les enfants utilisent d'eux-mêmes une présentation en tableau sans qu'il soit nécessaire de le leur demander.

longueurs en m	longueurs en cm
1	6
3	18
0,6	3,6
2,7	$2{,}7 \times 6 = 16{,}2$
6,45	$6{,}45 \times 6 = 38{,}7$
.	$7{,}2 = . \times 6$
$15 : 6 = 2{,}5$	15
5 $(2{,}5 \times 2)$	30

on peut ajouter : dans la classe sur la feuille

il faut parfois revenir à : 3m c'est 1 m et 1 m et 1 m qui sont représentés par 6 cm et 6 cm et 6 cm

mais ici, beaucoup d'enfants ont déjà trouvé la règle $\xrightarrow{m6}$ et la réciproque $\xleftarrow{d\ 6}$ et écrivent 7,2 : 6 dans la 1ère colonne sans écrire $7{,}2 = \ . \times 6$ dans la 2ème.

Il y a toujours quelques enfants n'ont pas vu $\xrightarrow{m6}$,Il faut leur faire remarquer que dans la 2ème colonne on a partout **.** $\times$ **6** (en effet $6 = 1 \times \mathbf{6}$; $18 = 3 \times \mathbf{6}$; $3{,}6 = 0{,}6 \times \mathbf{6}$ etc.) on peut donc l'écrire une fois pour toute en haut du tableau et amener $\xrightarrow{m6}$ de la 1ère colonne à la 2ème en insistant sur la nécessité de la flèche pour bien distinguer d'avec $\xleftarrow{d\ 6}$

$\xrightarrow{m\ 6}$

longueurs en m	longueurs en cm

• Représentation graphique : on peut tracer la droite!

I.9. - Situation 7

Objectifs : les mêmes qu'à la situation précédente.

> On donne l'échelle graphique : 0 — 1 — 2 km
> Quelles sont les distances sur le terrain qui sont représentées sur la carte par 16 cm ? par 10 cm ? par 7 cm ?
> Quelles sont les distances sur la carte qui représentent sur le terrain 3 km ? 7,5 km ? 1,25 km ?

Note : les graduations vont de 2cm en 2 cm. Les enfants doivent effectuer la mesure d'eux-mêmes. Vérifier d'abord que la photocopie n'a pas transformer cette mesure en 1,8cm ou en 2,1cm car la situation en serait assez profondément modifiée.

Déroulement : On a remarqué que certains enfants trouvent les bonnes réponses mais écrivent des égalités dans les colonnes sans qu'elles aient un lien très apparent avec leur démarche de calcul.

Exemple :

longueurs en cm	longueurs en km	
4	2	
$16 = 4 \times 4$	$8 = 4 \times 2$	→ bien.
$10 = 5 \times 2$	$5 = 10 : 2$	→ à quoi cela peut-il correspondre ?

En fait, ils ont souvent compris ce qu'il fallait faire, mais écrivent des égalités pour faire plaisir au maître. Dans ce cas, on leur précisera individuellement qu'il n'est pas obligatoire d'écrire à chaque ligne des égalités, et de ne pas en écrire si on ne peut pas les justifier.

Un nombre infime d'enfants ont pensé à mesurer la distance correspondant à 1 km ou à s'en servir dans les calculs ! Cette situation nous a permis de "réveiller" un peu ceux qui avaient tendance à se laisser porter par un mécanisme. Nous leur avons fait remarquer qu'il faut toujours réfléchir : ici, au lieu de diviser par 4 puis de multiplier par 2, en réfléchissant on voyait qu'il était plus rapide et moins fatiguant de diviser par 2 simplement.

• Faire représenter graphiquement. On peut tracer la droite.

I.10.- Situation de non proportionnalité.

Matériel : feuille donnée en annexe à carreaux de un centimètre de côté.

> On va construire des rectangles qui ont tous le même périmètre : 16 cm.
> Construisez un rectangle de largeur 1 cm . Quelle longueur a-t-il ?
> Construisez un rectangle de largeur 2 cm . Quelle longueur a-t-il ?
> Continue et récapitule tous les résultats dans un tableau. Tu n'es pas obligé de tracer à chaque fois le rectangle.

Remarque : Quand on double la largeur, la longueur ne double pas.(elle n'est pas divisée par 2 non plus)

• Représentation graphique. On ne peut tracer qu'un segment de droite.

I.11.- Situation (pour un CM2)

Objectifs : Utiliser des nombres décimaux dans les tableaux et des unités de mesure différentes.

Pour faire 5 litres de confitures, il faut utiliser 7kg de goyaviers.
1.- Avec 14 kg, 21 kg, on peut faire ...

2.- L'usine TRUC a fabriqué 745 l de confiture. Elle a du utiliser ...

3.- Avec 322 kg de goyaviers, elle pourra faire ...

4.- Jean a cueilli 3,5 kg de goyaviers, Rémi en a cueilli 0,7 kg et Paul 4,9 kg.
Combien chacun pourrait-il faire de confiture ?

Déroulement : Les enfants font généralement bien le tableau et les calculs :

Masse de goyaviers en kg	Volume de confiture en l
7	5
$14 = 2 \times 7$	$10 = 2 \times 5$
$21 = 3 \times 7$	$15 = 3 \times 5$
$. = . \times 7$	$745 = . \times 5$
$322 = . \times 7$	$. = . \times 5$

Pour 0,7 kg de goyaviers. Certains écrivent

$0{,}7 = 7 \mathbf{: 10}$ $\quad 0{,}5 = 5 \mathbf{: 10}$

d'autres $0{,}7 = \mathbf{0{,}1} \times 7$ $\quad 0{,}5 = \mathbf{0{,}1} \times 5$

$4{,}9 = 0{,}7 \times 7$ $\quad 3{,}5 = 0{,}5 \times 7$

• Une fois les calculs faits, demander aux enfants de relire le texte puis de rédiger quelques réponses en français.

• Représentation **graphique.**
L'idéal est de travailler sur papier millimétré mais on peut se contenter de feuilles à petits carreaux.
Lorsque les enfants ont placé tous les points :

(0 ; 0) _ (7 ; 5) _ (14 ; 10) _ (3,5 ; 2,5) _ (0,7 ; 0,5) _ (4,9 ; 3,5)

ils remarquent qu'ils sont alignés.
On peut faire faire d'autres calculs par exemple pour 2,1kg, pour 2,8kg et voir que pour n'importe quelle masse de goyaviers, le volume de confiture trouvé donneront des points alignés avec ceux que l'on a déjà. On fait donc tracer la droite.

• A l'aide du graphique, répondre aux questions :

- avec 10,5 kg de goyaviers on aura...?
- avec 7,7 kg de goyaviers on aura...?
- pour 8 l de confiture il faut...?
- pour 1 l de confiture il faut...?

• Retrouver ces réponses par le calcul.

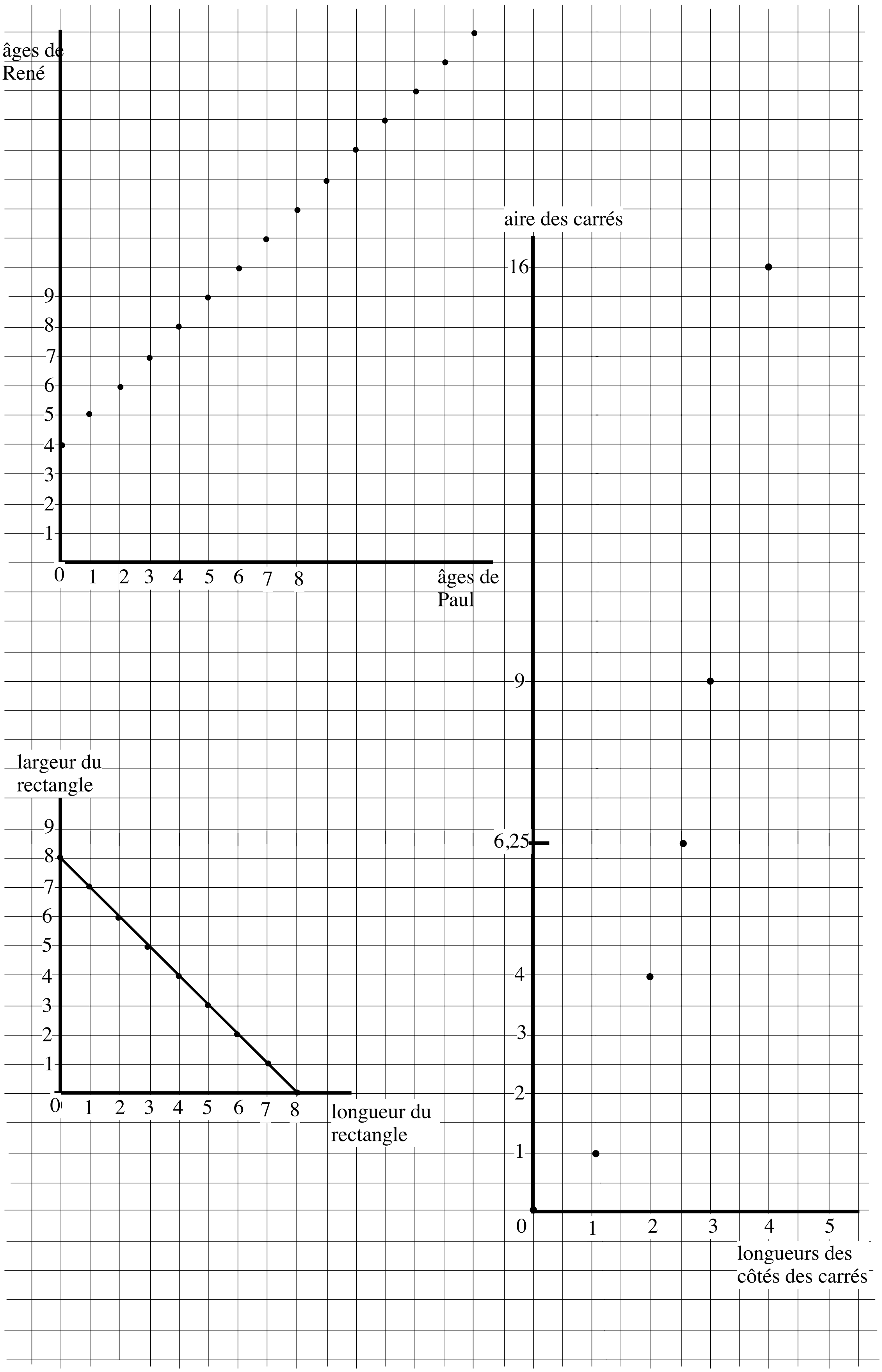
$\mathbf{10{,}5} = 7 + 3{,}5$ $\quad 5 + 2{,}5 = 7{,}5$

$\mathbf{7{,}7} = 7 + 0{,}7$ $\quad 5 + 0{,}5 = 5{,}5$

$10{,}5 + 0{,}7 = 11{,}2$ $\quad \mathbf{8} = 7{,}5 + 0{,}5$

$0{,}7 + 0{,}7 = 1{,}4$ $\quad \mathbf{1} = 0{,}5 + 0{,}5$

Graphiques des trois situations de non proportionnalité.



II. TABLEAUX DE NOMBRES SANS TEXTE.

Objectifs : **Trouver la règle quand elle existe.**
Noter des règles sous la forme ❒ → ❒ × a par exemple.
Étudier les propriétés relatives à l'ordre et aux écarts des fonctions considérées.

II.1. Trouver la règle quand elle existe.

Matériel : Feuilles photocopiées sur le modèle suivant (la feuille à photocopier est page 118). Disposer les nombres de telle sorte que les enfants aient la place à écrire des égalités.

	①
2	6
5	15
6	18
8	.
.	9
0	.

	②
4	6
10	15
12	18
20	.
.	21
0	.

	③
8	2
12	6
16	10
20	.
6	.
.	30

	④
8	2
16	4
20	5
.	6
4	.
0	.

	⑤
2	7
5	10
9	14
.	17
10	.
0	.

	⑥
6	10
9	15
12	20
15	.
3	.
.	0

Consignes : **Chaque tableau a été construit en suivant une règle. Complétez les tableaux. Essayez d'écrire la règle au dessus de chaque tableau. Si vous ne savez pas, expliquez comment vous trouvez les nombres demandés. (une règle indique comment, en partant d'un nombre de la 1ère colonne, on calcule le nombre correspondant dans la 2ème colonne).**

Déroulement : les enfants cherchent individuellement puis échangent des idées.

Les notations sur les tableaux : ① $\xrightarrow{\text{m3}}$; ③ $\xrightarrow{\text{r6}}$; ④ $\xrightarrow{\text{d4}}$; ⑤ $\xrightarrow{\text{a5}}$ sont assez vite trouvées et les tableaux complétés.

Les élèves complètent aussi les tableaux ② et ⑥ en utilisant divers procédés,mais ils ne savent pas écrire la règle sauf quelques uns qui donnent pour ② $\xrightarrow{\text{d4}}\xrightarrow{\text{m6}}$ ou $\xrightarrow{\text{m1,5}}$ plus rarement, et pour le tableau ⑥ $\xrightarrow{\text{d3}}\xrightarrow{\text{m5}}$

Le tableau ⑥ est souvent rempli en remarquant qu'on ajoute "toujours" 3 à gauche et 5 à droite pour trouver l'image de 15. Pour trouver l'image de 3, ils retirent 5 à 10 qui est l'image de 6.

Le maître passe derrière les enfants et apporte son aide aux groupes les moins avancés, demande aux autres de poursuivre les tableaux avec d'autres nombres.

• **Mise au point collective.**

Objectif : apporter les notations du type ❒ → ❒ × a

Le tableau ① est rapidement corrigé, les notations $\xrightarrow{m3}$ et $\xleftarrow{d3}$ placées au dessus et au dessous.

• Dans la 2ème colonne on a partout × 3 , on les repasse en rouge.

• Encadrer ensuite les nombres comme ci-contre en disant :

pour $\boxed{2}$, on a $\boxed{2}$ × 3

pour $\boxed{5}$, on a $\boxed{5}$ × 3 etc.

Plus généralement : pour $\boxed{}$, on a $\boxed{}$ × 3

Sur une même ligne, c’est le même nombre qui est dans le carré. C’est le modèle, la règle qui permet de faire les calculs.

On écrit alors la règle ❒ → ❒ × 3 au-dessus du tableau.

❒ → ❒ × 3

$\xrightarrow{m3}$

$\boxed{2}$	6 = $\boxed{2}$ × 3
$\boxed{5}$	15 = $\boxed{5}$ × 3
$\boxed{6}$	18 = $\boxed{6}$ × 3
$\boxed{8}$	24 = $\boxed{8}$ × 3
$\boxed{3}$	9 = $\boxed{3}$ × 3
$\boxed{0}$	0 = $\boxed{0}$ × 3

$\xleftarrow{d3}$

• **Écrivez les règles des autres tableaux de la même façon.**

❒ → ❒ – 6 pour ③

❒ → ❒ : 4 pour ④

❒ → ❒ – 5 pour ⑤ sont facilement obtenus.

Pour les tableaux ② et ⑥, un travail collectif est généralement nécessaire :

× 2 et × 3 sont repassés en rouge certains enfants proposent alors $\boxed{}$ × 2 → $\boxed{}$ × 3

On accepte mais en faisant remarquer que dans le $\boxed{}$, on n’a pas le nombre de départ.

Proposer alors un grand nombre dans la 1ère colonne, 132 par exemple :

Pour trouver $\boxed{}$ il faut diviser 132 par 2 et on peut rappeler le travail fait sur les pourcentages.

On “encadre” 4, 10, 12, 20, 132 avec des triangles.

4 = 2 × 2	6 = 2 × 3
10 = 5 × 2	15 = 5 × 3
12 = 6 × 2	18 = 6 × 3
20 =10× 2	30 =10× 3
132 = $\boxed{}$ × 2	. = $\boxed{}$ × 3

$\triangle$132 = . × 2 | . = . × 3

d2 m3

Comment écrire cela sous la forme Δ → Δ **...**?

Plus de difficultés mais on obtient Δ → **(**Δ **: 2)** × **3** pour ce tableau et Δ → **(**Δ **: 3)** × **5** pour ⑥.

• **Construisez les représentations graphiques des 6 fonctions.**

Distribuer des quarts de feuilles 21 × 29,7 cm, à petits carreaux en précisant bien :

. sur la droite graduée “horizontale” on place les nombres de la 1ère colonne,

. sur la droite graduée “verticale” on place les nombres de la 2ème colonne

Attention : les enfants ont tendance à faire le contraire.

• **Sur chaque quart de feuille, vous ajoutez le numéro du tableau et la règle.**

(Certains couples de nombres ne pourront pas être représentés car on dépasserait la feuille, par contre, on notera des couples de nombres qui ne sont pas écrits dans les tableaux ; l’un des deux nombres du couple est donné, l’autre est trouvé à l’aide du graphique puis vérifié par le calcul).

II.2. - Propriétés liées aux écarts.

Collectivement : noter les écarts dans le tableau 1 :

			①
	2	6	
3			9
	5	15	
1			3
	6	18	
2			6
	8	24	
5			15
	3	9	

Entre 2 et 5 il y a une différence, un écart de ?

• **Que remarquez-vous ?**

Les enfants trouvent assez facilement que les écarts dans la 2ème colonne peuvent s'écrire :

$9 = 3 \times 3$

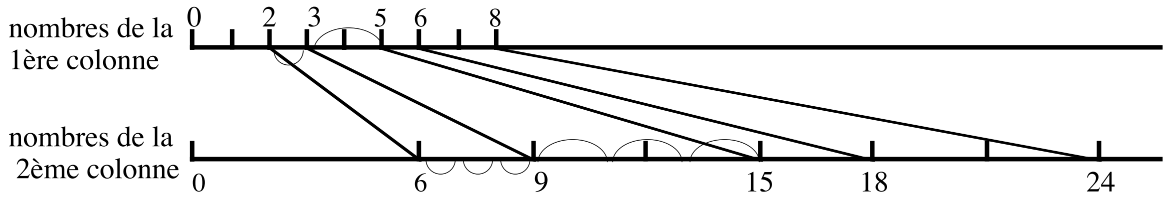
$3 = 1 \times 3$

$6 = 2 \times 3$

$15 = 5 \times 3$

Les écarts trouvés dans la 1ère colonne sont donc multipliés par 3 dans la 2ème.

Une représentation graphique peut le montrer aussi :



• Le revoir sur la représentation graphique faite sur le quart de feuille comme on l'a fait pour la 1ère situation du chapitre I.

• Même chose pour le tableau correspondant au problème d'échelle : 6 cm représentent 1 m. Cette fois les écarts sont multipliés par 6.

<u>Utilisation de cette propriété</u> :

Donner la fonction ❒ → ❒ $\times 7$ avec pour nombres au départ : 8, 18, 118, 158.

	8	56	
10			7×10
	18		
100			7×100
	118		
40			7×40
	158		

Il est aussi facile de calculer 56 + 70 que 18×7 soit 126.

Il est plus facile de calculer 126 + 700 que 118×7

• Même travail avec le tableau ④ $\xrightarrow{\text{d4}}$

<u>Synthèse</u> : **Avec les règles à multiplier, les écarts sont multipliés et avec les règles à diviser, les écarts sont divisés.**

• Fonctions du type ❒ → ❒ + a ou ❒ → ❒ - a.
Même travail que plus haut avec les tableaux ③ et ⑤.
Si on a un écart de 3 entre deux nombres de la 1ère colonne, on a le même écart de 3 entre les deux nombres correspondants, entre les deux images, de la 2ème colonne. les écarts restent les mêmes, ils sont conservés.

On proposera des exercices en calcul mental montrant l'utilité de cette propriété; par exemple sachant que 87 + 56 = 143 calculer de tête :
97 + 56
687 + 56

II.3.Propriétés liées à l'ordre.

Pour les fonctions du type ❒ → ❒ + a ; ❒ → ❒ - a ; ❒ → ❒ × a et ❒ → ❒ : a on verra facilement que si 2 nombres sont dans un certain ordre dans une colonne, les 2 nombres images sont dans le même ordre dans l'autre colonne.
Si on range (en ordre croissant par exemple) les nombres d'une colonne, dans l'autre colonne les nombres correspondants se trouveront rangés dans le même ordre.
L'ordre reste le même, il est conservé.

Contre exemple :

1.- Reprendre le tableau du paragraphe I.10 (le périmètre d'un rectangle étant 16 cm, trouver une dimension en fonction de l'autre).

Trouvez la règle :
Réponse : ❒ → 8 - ❒

largeur en cm	longueur en cm
1	8 - 1 = 7
2	8 - 2 = 6
2,5	8 -2,5 = 5,5

On remarque que les écarts sont conservés mais que l'ordre est inversé, que la règle n'est pas du type ❒ → ❒ - a mais ❒ → a - ❒

L'ensemble de départ est limité aux nombres compris entre 0 et 8, comme l'ensemble d'arrivée.

2.- Reprendre le tableau du paragraphe I.6. (aire de carrés en fonction de la longueur du côté)

Trouver la règle :
Réponse : ❒ → ❒ × ❒

longueur du côté en cm	aire en cm^2
1	1
2	2 × 2 = 4
3	3 × 3 = 9
3,5	3,5 × 3,5 = 12,25

L'ordre est conservé mais on ne peut rien dire en ce qui concerne les écarts. Ils ne sont pas toujours multipliés de la même façon, par le même nombre.

Conclusion : Pour les fonctions à ajouter (ou à soustraire du type ❒ → ❒ + a ou ❒ → ❒ − a les écarts ne changent pas. L'ordre est conservé.

Pour les fonctions à multiplier ou à diviser du type ❒ → ❒ × a ou ❒ → ❒ : a où a est un nombre fixé, les écarts sont multipliés ou divisés par a . L'ordre est conservé.

Pour les autres fonctions, il faut bien étudier chaque cas.

II.4- Réinvestissement sur d'autres tableaux de nombres.

Matériel : une feuille polycopiée par enfant sur le modèle suivant :
(On la trouvera en annexe page 119)

⑦	
2	0,4
3	0,6
5	1
9	1,8
.	2
0	.

⑧	
6	2
12	8
7	3
9	.
.	14
.	0

⑨	
1	12
2	14
3	16
4	18
5	.
.	28
0	.

⑩	
2	7
3	10
4	13
5	16
6	.
.	31
0	.

11	
0	50
3	86
4	93
7	114
10	130
14	165
20	170
24	.

12	
2	8
3	13
4	18
6	28
.	3
8,2	.

Consignes : **Chaque tableau a été construit en suivant une règle. Complétez les tableaux. Essayez d'écrire la règle au dessus de chaque tableau. Si vous ne savez pas, expliquez comment vous trouvez les nombres demandés. (une règle indique comment, en partant d'un nombre de la 1ère colonne, on calcule le nombre correspondant dans la 2ème colonne).**

Déroulement :

- Tableaux 7 et 8 les règles sont vite trouvées : ❐ → ❐ × 0,2 et ❐ → ❐ - 4

Les tableaux 9, 10 et 12 sont aussi assez vite complétés en utilisant les remarques concernant les écarts.

tableau 9 : pour un écart de 1 à gauche, on a toujours un écart de 2 à droite.
tableau 10 : pour un écart de 1 à gauche, on a toujours un écart de 3 à droite.
tableau 12 : pour un écart de 1 à gauche, on a toujours un écart de 5 à droite.

Un nombre plus important d'enfants que l'on a tendance à croire trouvent les règles et les écrivent correctement. Pour les autres il faut apporter une aide :

tableau 9 : **Puisque les écarts sont multipliés par 2 que peut-on penser ?** (qu'il y a une fonction à multiplier par 2). **Essayons.**

		on trouve en multipliant par 2 :			
1	12	$1 \times 2 = 2$		12	
2	14	$2 \times 2 = 4$		14	
3	16	$3 \times 2 = 6$	pour obtenir :	16	il faut donc à chaque
4	18	$4 \times 2 = 8$		18	fois ajouter 10.
5	20	$5 \times 2 = 10$		20	

1	$(2 \times 1)+10=12$
2	$(2 \times 2)+10=14$
3	$(2 \times 3)+10=16$

d'où la règle ❒ → (❒ × 2) + 10

Tableau 10 : règle ❒ → (❒ × 3) + 1

Tableau 12 : règle ❒ → (❒ × 5) - 2

Tableau 11 : Toute recherche s'avère stérile. On indiquera aux enfants qu'il donne la taille en cm d'un enfant en fonction de son âge : à la naissance cet enfant mesurait 50 cm, à 3 ans il mesurait 86 cm etc.

• **Faites les représentations graphiques.** On distribue encore des quarts de feuilles à petits carreaux.

III. PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DES TABLEAUX DE PROPORTIONNALITÉ.

III.1. - Classement des tableaux.

• On reprend toutes les représentations graphiques : celles des tableaux de nombres sans texte et celles réalisées dans les situations du chapitre I.
On observe que toutes ces représentations graphiques sauf celles correspondant au tableau 11 et à la règle ❒ → ❒ × ❒ montrent des points alignés.
Parmi celles-ci un certain nombre montrent des points alignés avec l'origine, point de concours des 2 droites graduées, des deux axes.

• Reprenez les tableaux correspondant aux représentations graphiques qui sont des droites passant par l'origine (ou des points alignés avec l'origine).
Recopiez en colonne les règles de ces tableaux.

Les points sont alignés avec l'origine	
problèmes	règles
Paquets de pâtes et boîtes	Δ →(Δ : 2) × 3
Échanges billes / images	Δ →(Δ : 3) × 5
Plan de la classe	❒ → ❒ × 6
Échelle graphique	❒ → ❒ : 2
Tableau 1	❒ → ❒ × 3
Tableau 2	Δ →(Δ : 2) × 3
Tableau 4	❒ → ❒ : 4
Tableau 6	Δ →(Δ : 3) × 5
Tableau 7	❒ → ❒ × 0,2

Les points NE sont PAS alignés avec l'origine	
problèmes	règles
Ages de Paul et de René	❒ → ❒ + 4
Rectangles de périmètre ..	❒ → 8 - ❒
Tableau 3	❒ → ❒ - 6
Tableau 5	❒ → ❒ + 5
Tableau 8	❒ → ❒ - 4
Tableau 9	❒ → (❒ × 2) + 10
Tableau 10	❒ → (❒ × 3) + 1
Tableau 12	❒ → (❒ × 5) - 2

• **Qu'est-ce que les règles des tableaux ont de semblable pour donner des points alignés avec l'origine ?** Dans l'écriture des règles, il n'y a que des signes × ou : pas de signe + ni de signe –

Par contre, dans les règles des tableaux qui ne donnent pas des points alignés avec l'origine, il n'y a pas de signes × ou : quand il y en a , il y a aussi des signes + ou – .

III.2.- Comment pouvait-on compléter de tels tableaux ?

• En ajoutant ou en soustrayant les nombres de 2 lignes du tableau, on trouvait une 3ème ligne qui faisait bien partie du tableau.

Exemple : pourcentages.

$\Delta \rightarrow (\Delta : 100) \times 15$

Prix à payer en F	Réductions en F
400	60
500	75
400 + 500 = **900**	60 + 75 = 135

et on vérifie par le calcul que (**900** : 100) × 15 = 135. Le voir encore sur d'autres tableaux.

• Essayons de faire la même chose avec les tableaux dont les représentations graphiques ne sont pas des droites passant par 0.

- Exemple :

❒ → ❒ - 4

6	2
7	3
6 + 7 = **13**	2 + 3 = 5

mais en utilisant la règle : **13** - 4 = 9 on ne trouve pas 5.

Quand on ajoute les 2 nombres de 2 lignes d'un tel tableau, on ne trouve pas des nombres liés par la règle de ce tableau.

• Même chose avec le tableau 10 (règle $\Delta \rightarrow (\Delta \times 3) + 1$), avec le tableau 11 (taille d'un enfant selon son âge), avec le problème des aires des carrés (règle ❒ → ❒ × ❒)

Conclusion : cette propriété n'existe que pour les tableaux dont les représentations graphiques sont des points alignés avec 0, pour les tableaux où la règle contient seulement des multiplications ou des divisions.

III.3.- On pouvait procéder encore d'une autre façon pour compléter ces tableaux.

• En multipliant ou en divisant les 2 nombres d'une ligne on trouvait une nouvelle ligne.

- Exemple :

❒ → (❒ : 2) × 3

m2	10	15	m2
	20	30	

et (**20** : 2) × 3 = 30

• Même chose avec ❒ → ❒ : 4 ; ❒ → ❒ × 3

• Même chose en divisant.

• Essayons avec le tableau 8 :

❒ → ❒ - 4

m2	6	2	m2
	12	4	

(or on trouvait 8)

Dans ce tableau, on ne trouve pas une nouvelle ligne en multipliant par 2 les nombres d'une ligne.

Conclusions : seuls les tableaux dont les représentations graphiques sont constitués de points alignés avec 0 ont ces deux propriétés, qui sont donc caractéristiques :

1 : Si on ajoute ou soustrait les nombres de deux lignes, on obtient une 3ème ligne dont les nombres sont liés par la règle du tableau.

2 : Si on multiplie ou divise les deux nombres d'une ligne par un même nombre, on trouve une 2ème ligne dont les nombres sont bien liés par la règle.

Remarque : On attendra d'avoir terminé le paragraphe suivant où l'on introduit les notations fractionnaires pour apporter le vocabulaire : proportionnalité, coefficient de proportionnalité, listes de nombres proportionnels.

IV. INTRODUCTION DES FRACTIONS DANS LES TABLEAUX.

IV.1. - Comprendre que diviser par 3 (par exemple) est équivalent à multiplier par $\frac{1}{3}$.

Remarque : Depuis l'étude des fractions, ils savent que pour calculer $45 \times \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3} \times 45$ *, il suffit de diviser 45 par 3.*

Matériel : une feuille entière $21 \times 29{,}7$ à petits carreaux par enfant.

Déroulement : Reprendre le tableau déjà vu : ❒ → ❒ : 3

$\xrightarrow{\text{d3}}$	
0	0
3	.
6	.
9	.

Consignes :
- Complétez le tableau.
- Sur un graphique prenez 6 petits carreaux pour unité sur les 2 axes. Placez les 4 points (0 ; 0) (3 ; 1) (6 ; 2) (9 ; 3)

L'axe horizontal portant les nombres de la 1ère colonne est dans le sens de la longueur de la feuille;

• On vérifie, ce que l'on sait déjà, que les 4 points sont alignés.
Tracez la droite.

• Ajoutez le nombre 1 dans la 1ère colonne. Trouvez le nombre correspondant dans la 2ème.

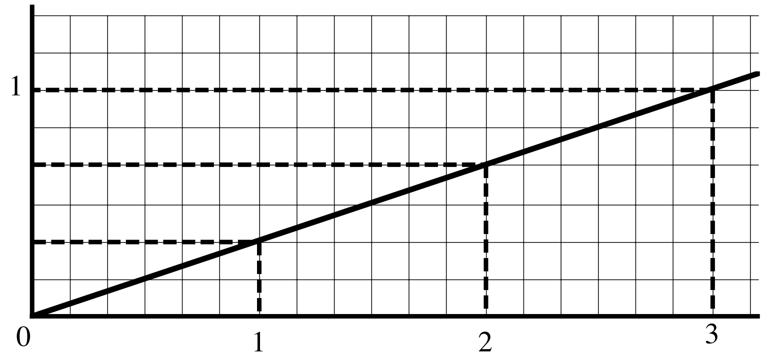
La plupart des enfants répondent 0 ou 0,3 ou 0,33 pour l'image de 1 après avoir fait la division.
On fera d'abord remarquer que pour passer des nombres de la 2ème colonne à ceux de la 1ère colonne on multiplie par 3 (puisque dans l'autre sens on divise par 3)

or $0 \times 3 = 0$ et non pas 1
$0{,}3 \times 3 = 0{,}9$ différent de 1
$0{,}33 \times 3 = 0{,}99$ toujours différent de 1

Les enfants remarquent alors qu'en continuant la division de 1 par 3 on trouve toujours des 3, que cela ne va jamais s'arrêter.
On ne peut donc pas écrire le nombre que l'on cherche sous forme d'un nombre à virgule.
Le nombre cherché n'est pas décimal.

• Essayez d'utiliser le graphique pour trouver.

Laisser les enfants chercher car beaucoup trouvent alors $\frac{1}{3}$. Pour les autres on peut aider :



Partir du 1 de la 1ère colonne donc sur la droite graduée horizontale.
Marquer le point correspondant sur la droite. Aller, à partir de ce point, sur la droite graduée verticale où on essayera de lire le nombre cherché, de la 2ème colonne

Même si on ne trouve pas quel est ce nombre, on fait la même chose en partant de 2.

Les enfants voient alors que le segment [0, 1] sur la droite graduée verticale semble partagé en 3 parties de même longueur et disent qu'une partie doit être égale à $\frac{1}{3}$.

L'image de 1 serait $\frac{1}{3}$, celle de 2 serait $\frac{2}{3}$.

On vérifie en multipliant par 3. On a bien $\frac{1}{3} \times 3 = 1$; $\frac{2}{3} \times 3 = 2$

• Écrire $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ puis $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$ sur l'axe vertical et dans le tableau.

Toujours dans ce tableau, on remarquera que l'on peut écrire $0 = \frac{0}{3}$; $3 = \frac{9}{3}$; $6 = \frac{18}{3}$ en s'aidant au besoin du graphique

• Sur le graphique on vérifiera que chaque fois qu'on augmente de 1 sur la droite horizontale, on augmente de $\frac{1}{3}$ sur l'autre, que si l'on augmente de 2, on augmente sur l'autre de 2 fois $\frac{1}{3}$ etc.

Les écarts sont multipliés par $\frac{1}{3}$

• Écrivez tous les nombres de la 2ème colonne sous forme d'un produit : $\frac{2}{3} = . \times .$

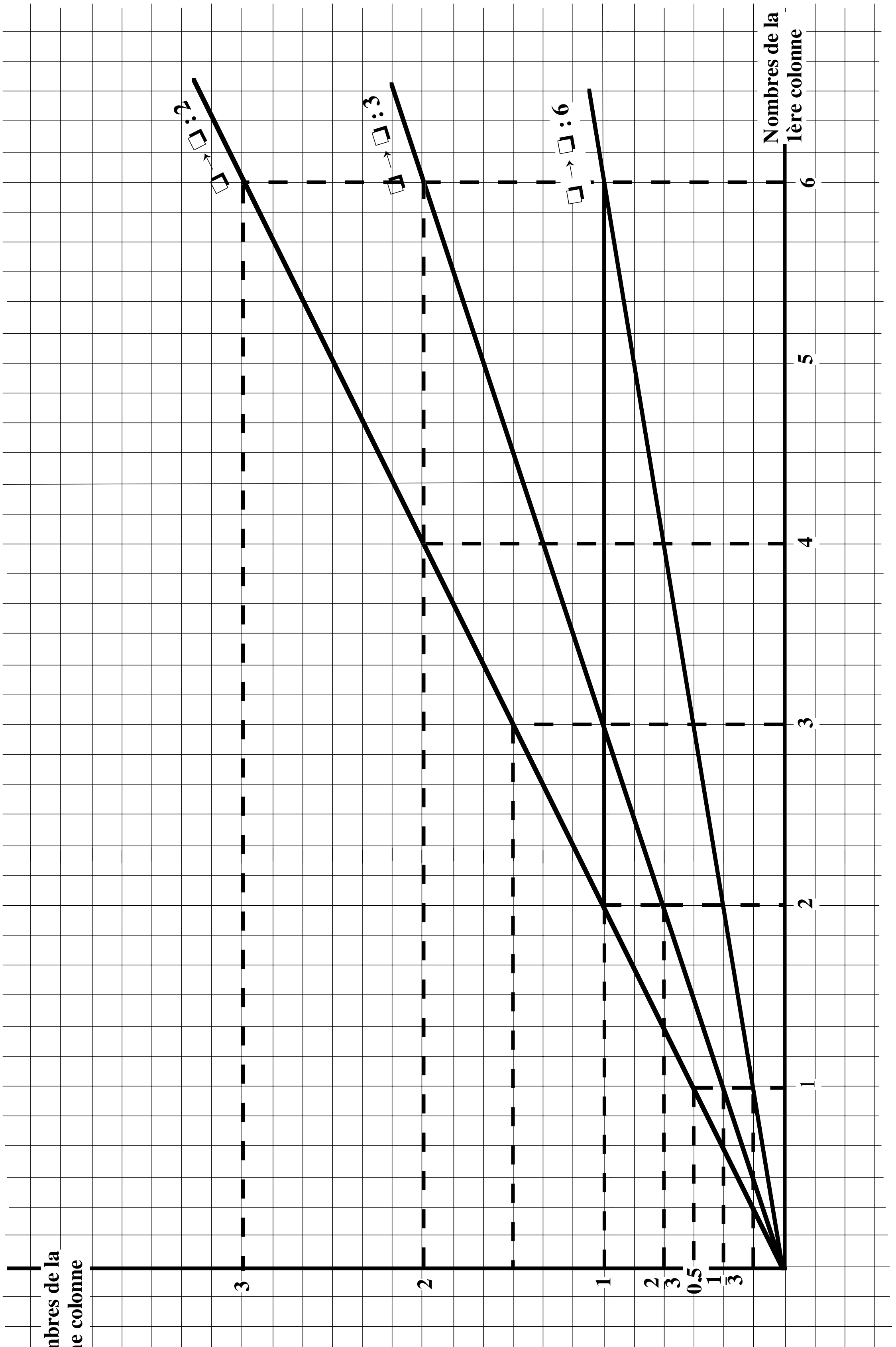
	$\xrightarrow{d3}$
0	$0 = 0 \times \frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3} = 1 \times \frac{1}{3}$
2	$\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$
3	$1 = 3 \times \frac{1}{3}$
4	$\frac{4}{3} = 4 \times \frac{1}{3}$

Sur chaque ligne on voit bien que l'image d'un nombre ❒ est toujours ❒ $\times \frac{1}{3}$ d'où l'écriture de la règle ❒ → ❒ $\times \frac{1}{3}$

ou $\xrightarrow{m\frac{1}{3}}$

Notre fonction pourra donc se noter $\xrightarrow{m\frac{1}{3}}$ ou ❒ → ❒ $\times \frac{1}{3}$

Conclure : **Diviser par 3 c'est pareil que multiplier par $\frac{1}{3}$ et multiplier par $\frac{1}{3}$ c'est pareil que diviser par 3.**


Nombres de la 1ère colonne
Nombres de la 2ème colonne
□ → □ : 2
□ → □ : 3
□ → □ : 6
1
2
3
4
5
6
3
2
1
2/3
0.5
1/3

Remarques : - Faire noter cette conclusion en utilisant éventuellement un meilleur libellé selon le niveau de langue des enfants.

- Certains veulent continuer en remarquant que diviser par $\frac{1}{3}$ c'est pareil que multiplier par 3 en travaillant dans l'autre sens dans le tableau. Accepter sans insister et sans le faire noter afin de ne pas embrouiller les plus faibles, ceci sera revu plus tard.

Consolidation : reprendre le même déroulement en partant du tableau :

$\xrightarrow{d2}$	
0	.
2	.
4	.
6	.

Consignes : 1. Complétez le tableau.

2. Tracez la représentation graphique sur la même feuille que précédemment.

3. Ajoutez les nombres 1, 3, 5, 47, 321 dans la 1ère colonne.

Les images peuvent êtres écrites $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{47}{2}$, $\frac{321}{2}$ ou 0,5 ; 1,5 ; 2,5 ; 23,5 ; 160,5.

• Arriver à $\underset{d2}{\overset{m\frac{1}{2}}{\rightleftarrows}}$ $\underset{m\,0,5}{\overset{m\frac{1}{2}}{\rightleftarrows}}$ si on veut à $\underset{m\,0,5}{\overset{d2}{\rightleftarrows}}$

- Même déroulement en partant du tableau :

$\xrightarrow{d6}$	
0	.
6	.
1	.
2	.
3	.

Tracer la droite toujours sur le même graphique.

On retrouvera aussi des égalités : $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ …

IV.2. - Écrire $\Delta \rightarrow (\Delta : a) \times b$ sous la forme $\square \rightarrow \square \times \frac{b}{a}$

Objectif : **Comprendre que toute règle notée $\Delta \rightarrow (\Delta : a) \times b$ où a et b sont entiers , $a \neq 0$ peut se noter $\square \rightarrow \square \times \frac{b}{a}$**

Matériel : La même feuille 21 × 29,7 déjà utilisée mais en la prenant dans l'autre sens et en travaillant au verso bien sûr.

Déroulement : reprendre le tableau 6 et en recopier cette partie au tableau :

$\Delta \rightarrow (\Delta : 3) \times 5$	
0	0
3	5
6	10
123	......

• Trouvez l'image de 123.

Deux méthodes sont utilisées : soit (123 : 3) × 5 = 41 × 5 = 205

soit 123 = $\square \times 3$ $\square \times 5 = 205$

qui nous permet de rappeler à tous que la règle pouvait aussi se noter $\xrightarrow{d3}\xrightarrow{m5}$

• Tracer la droite représentative en prenant pour unité 3 petits carreaux sur chaque axe.

• Trouver les images des nombres 1 ; 2 ; 5 ; 7.

Les enfants utilisent directement le graphique et sauf quelques uns trouvent bien $\frac{5}{3}$ et $\frac{10}{3}$ pour images de 1 et 2. Ils continuent ensuite de $\frac{5}{3}$ en $\frac{5}{3}$: $\frac{15}{3}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{25}{3}$, $\frac{30}{3}$,$\frac{35}{3}$ pour trouver les autres images.

Quelques enfants écrivent sur le graphique $\frac{1}{3}$ à la place de $\frac{5}{3}$. On fait rectifier assez aisément en montrant l'unité (de 3 carreaux) : **comment trouver** $\frac{1}{3}$? il faut partager en 3 ; donc $\frac{1}{3}$ c'est un carreau etc.

• Au cours de la mise en commun, on reprend l'idée de beaucoup d'enfants : chaque fois qu'on augmente de 1 dans la 1ère colonne ou sur l'axe horizontal on augmente de $\frac{5}{3}$ dans la 2ème colonne ou sur l'axe vertical. On demande alors :

Écrivez tous les nombres de la 2ème colonne sous forme d'un produit pour faire apparaître ce que l'on vient de dire.

$\Delta \rightarrow (\Delta : 3) \times 5$	
0	$0 = 0 \times \frac{5}{3}$
1	$\frac{5}{3} = 1 \times \frac{5}{3}$
$\boxed{2}$	$\frac{10}{3} = \boxed{2} \times \frac{5}{3}$
3	$5 = \frac{15}{3} = 3 \times \frac{5}{3}$
4	$\frac{20}{3} = 4 \times \frac{5}{3}$
5	$\frac{25}{3} = 5 \times \frac{5}{3}$
6	$10 = \frac{30}{3} = 6 \times \frac{5}{3}$

Sur chaque ligne on peut noter ❒ → ❒ × $\frac{5}{3}$ d'où l'écriture de la règle ❒ → ❒ × $\frac{5}{3}$

ou $\xrightarrow{m\frac{5}{3}}$

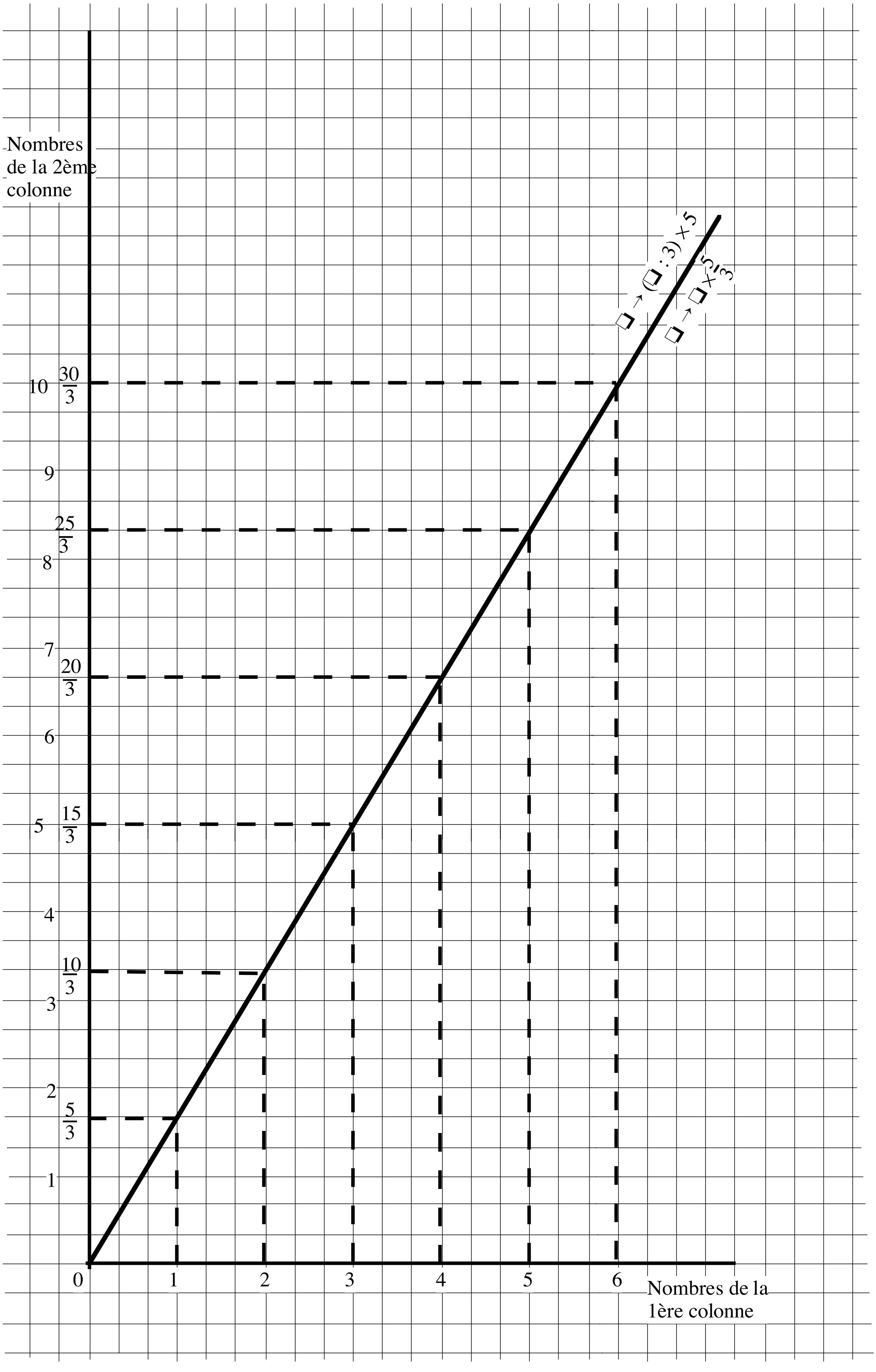
La conclusion est donnée sous forme de schéma :

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[rr, "m\frac{5}{3}"] \arrow[dr, "d3"'] & & \cdot \\ & \cdot \arrow[ur, "m5"'] & \end{tikzcd}$$

On vérifie ceci en utilisant une suite de nombres :

$\xrightarrow{d3}$	$\xrightarrow{m5}$	
12	4	20
39	13	65
16	?	
40	$\frac{40}{3}$	$\frac{200}{3}$

Pour certains enfants, il faut rappeler : pour diviser par 3, on peut aussi multiplier par $\frac{1}{3}$


Nombres de la 2ème colonne
10
$\frac{30}{3}$
9
$\frac{25}{3}$
8
7
$\frac{20}{3}$
6
5
$\frac{15}{3}$
4
$\frac{10}{3}$
3
2
$\frac{5}{3}$
1
0
1
2
3
4
5
6
Nombres de la 1ère colonne
$\square \to (\square : 3) \times 5$
$\square \to \square \times \frac{5}{3}$

	$\xrightarrow{m\frac{5}{3}}$
12	$12 \times \frac{5}{3} = \frac{60}{3} = 20$
39	$39 \times \frac{5}{3} = \frac{195}{3} = 65$
16	$16 \times \frac{5}{3} = \frac{80}{3}$
40	$40 \times \frac{5}{3} = \frac{200}{3}$

Ces calculs montreront aussi que pour effectuer $39 \times \frac{5}{3}$ il est plus rapide de diviser d'abord par 3 puis de multiplier par 5 que de multiplier par 5 puis de diviser par 3.

Cette méthode peut se schématiser :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \cdot \arrow[rr, "m\frac{5}{3}"] \arrow[dr, "m5"'] & & \cdot \\ & \cdot \arrow[ur, "d3"'] & \end{tikzcd}$$

en comparant avec le schéma précédent on a :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \cdot \arrow[dr, "m5"] & \\ \cdot \arrow[ur, "d3"] \arrow[rr, "m\frac{5}{3}"] \arrow[dr, "m5"'] & & \cdot \\ & \cdot \arrow[ur, "d3"'] & \end{tikzcd}$$

Entraînement.

Exercice 1. *(donné en annexe)* Compléter :

	$\xrightarrow{m4}$	$\xrightarrow{d7}$
0	.	.
21	.	.
42	.	.
7	.	.
1	.	.
2	.	.
3	.	.

?

Jusque là, aucune difficulté.

Ici beaucoup trouvent $\frac{4}{7}$ mais certains trouvent encore 0. On leur demande alors de trouver la règle qui permet de passer de la 1ère à la 3ème colonne ce qui est fait sans difficultés.

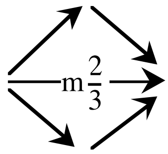
Lors de la correction on demande si les calculs auraient pu être menés de façon plus rapide.

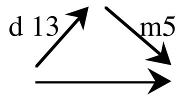
- Certains disent que 42 est le double de 21. On pouvait donc trouver rapidement les nombres de la 3ème ligne en multipliant ceux de la 2ème ligne par 2.
- De même en remarquant que 21 : 3 = 7 on pouvait compléter aussi la 4ème ligne à partir de la 2ème (mais pas plus rapidement).
- Pour trouver l'image de 1, on pouvait aussi diviser par 7 l'image de 7 et retrouver ainsi $\frac{4}{7}$.

Exercice 2.

Compléter : ❒ → ❒ × $\frac{2}{3}$ c'est pareil que ❒ →...

Certains enfants disent que c'est facile en expliquant : il y a des tiers, pour en avoir on divise par 3 après on multiplie par 2.

Compléter : 

et aussi : 

Résolu ainsi : si on divise par 13, on a des treizièmes.donc $\frac{\cdot}{13}$ ensuite on multiplie par 5 d'où m $\frac{5}{13}$

Exercice 3. *(donné en annexe)*

Compléter les tableaux.

m $\frac{3}{4}$

1	2	3	4	8	10	60

m $\frac{2}{7}$

0	1	7	4	27	84	140

Ecrire les résultats sous forme de fraction (la plus simple) ou de nombres à virgule quand c'est possible ou de nombre entier. Utiliser les propriétés caractéristiques.

Exercice 4. :

Jean dit qu'il a dépensé le tiers de ses économies pour acheter un disque. Il avait 180 F. Combien coûte le disque ?

Les enfants font très vite 180 : 3 = 60.

Demander de faire apparaître $\frac{1}{3}$ dans l'écriture de l'égalité : $180 \times \frac{1}{3} = 60$

SYNTHÈSE DE TOUS LES TRAVAUX FAITS SUR LA PROPORTIONNALITÉ.

Consigne : Reprenez le tableau où on avait écrit les situations et leurs règles et tous les tableaux utilisés ensuite.
Chaque fois que cela est possible, écrivez la règle en utilisant une fraction.

Mise en commun :

Cela est possible pour toute les règles du type : ❒ → (❒ : •) × • et celles du type : ❒ → ❒ : •

exemples : ❒ → (❒ : 3) × 2 s'écrit ❒ → ❒ × $\frac{2}{3}$

❒ → ❒ : 3 s'écrit ❒ → ❒ × $\frac{1}{3}$

Les points sont alignés avec l'origine	
problèmes	règles
Paquets de pâtes et boîtes	Δ →(Δ : 2) × 3
Échanges billes / images	Δ →(Δ : 3) × 5
Plan de la classe	❒ → ❒ × 6
Échelle graphique	❒ → ❒ : 2
Tableau 1	❒ → ❒ × 3
Tableau 2	Δ →(Δ : 2) × 3
Tableau 4	❒ → ❒ : 4
Tableau 6	Δ →(Δ : 3) × 5
Tableau 7	❒ → ❒ × 0,2

Les points NE sont PAS alignés avec l'origine	
problèmes	règles
Ages de Paul et de René	❒ → ❒ + 4
Rectangles de périmètre ..	❒ → 8 - ❒
Tableau 3	❒ → ❒ - 6
Tableau 5	❒ → ❒ + 5
Tableau 8	❒ → ❒ - 4
Tableau 9	❒ → (❒ × 2) + 10
Tableau 10	❒ → (❒ × 3) + 1
Tableau 12	❒ → (❒ × 5) - 2

Les règles s'écrivent maintenant :

Les points sont alignés avec l'origine	
Paquets de pâtes et boîtes	❒ → ❒ × 1,5 ou ❒ → ❒ × $\frac{3}{2}$
Échanges billes / images	❒ → ❒ × $\frac{5}{3}$
Plan de la classe	❒ → ❒ × 6
Échelle graphique	❒ → ❒ × 0,5 ou ❒ → ❒ × $\frac{1}{2}$
Tableau 1	❒ → ❒ × 3
Tableau 2	❒ → ❒ × 1,5 ou ❒ → ❒ × $\frac{3}{2}$
Tableau 4	❒ → ❒ × 0,25 ou ❒ → ❒ × $\frac{1}{4}$
Tableau 6	❒ → ❒ × $\frac{5}{3}$
Tableau 7	❒ → ❒ × 0,2 ou ❒ → ❒ × $\frac{2}{10}$

• On remarque alors que pour tous les tableaux qui ont pour représentation graphique une droite ou une série de points alignés avec l'origine nous avons pu écrire la règle avec un seul signe × ; qu'ils ont tous, les 2 propriétés caractéristiques.
On peut alors faire copier :

On appelle tableaux de proportionnalité les tableaux où on calcule les nombres de la 2ème colonne en multipliant ceux de la 1ère colonne toujours par un même nombre (un nombre entier ou décimal ou fractionnaire)
La règle d'un tableau de proportionnalité peut toujours s'écrire sous la forme ❒ → ❒ × k où k est entier ou décimal ou fractionnaire/

exemples : ❒ → ❒ × $\frac{5}{3}$ k est fractionnaire

❒ → ❒ × 6 k est entier

❒ → ❒ × 0,2 k est décimal

❒ → ❒ : 6 ou ❒ → ❒ × $\frac{1}{6}$ k est fractionnaire

On dit que k est le coefficient de proportionnalité,
que les deux listes de nombres (la 1ère colonne et la 2ème colonne) sont proportionnelles.

Pour reconnaître qu'une situation est une situation de proportionnalité, on fait le test suivant :

On DOUBLE le nombre d'une colonne (ou on double une grandeur) SI le nombre correspondant de l'autre colonne est DOUBLÉ aussi, ALORS on est dans une situation de proportionnalité.

N.B. On peut construire des situations mettant en défaut ce test, mais c'est extrêmement difficile.

• On pourra attirer l'attention des enfants sur l'importance du domaine de définition des fonctions dans quelques cas :

Exemples.
- Reprenons la 1ère situation concernant les paquets de pâtes et les boîtes de sauce tomate :
La règle ne nous donnera pas toujours un bon résultat si nous l'appliquons à n'importe quel nombre. Elle ne nous donne le nombre de boîtes de sauce tomate que si nous avons un nombre pair de paquets de pâtes.

- La règle ❒ → 8 - ❒ trouvée dans la recherche de la longueur d'un côté du rectangle ayant un périmètre donné ne peut s'appliquer qu'aux nombres (connus des enfants) compris entre 0 et 8.

IV.3. - Consolidation, réinvestissement des acquis et composition de fonctions

Problème : *(donné en annexe)*

Trois personnes jouent au loto. Elles se partagent les gains de la façon suivante : la 1ère reçoit les $\frac{2}{5}$ du gain total, la 2ème reçoit les $\frac{3}{4}$ de la part de la 1ère, la 3ème reçoit ce qu'il reste. Elles ont gagné à elles trois 1020 F une première fois et 840 F une autre fois. Calcule les sommes reçues par chaque personne à chaque fois.

(D'après un texte tiré de Math et Calcul CM2 de R. EILLER, Ed. HACHETTE)

Les enfants trouvent rapidement les résultats. Certains bien sûr calculent les $\frac{3}{4}$ de la somme totale et non de la part de la 1ère.

Mise en commun : demander de présenter les résultats dans un tableau :

$\xrightarrow{m\frac{2}{5}}$ $\xrightarrow{m\frac{3}{4}}$

Somme totale en F.	Part de la 1ère en F.	Part de la 2ème en F.	Part de la 3ème en F.
1020	408	306	1020 - (408 + 306) = 306
840	336	252	840 - (336 + 252) = 252

Question : Trouver la règle qui permettrait de calculer la part de la 2ème à partir de la somme totale, sans passer par le calcul de la part de la 1ère.

Beaucoup d'enfants trouvent vite $m\frac{6}{20}$.

Justification collective :

	$\xrightarrow{m\frac{2}{5}}$	$\xrightarrow{m\frac{3}{4}}$
somme collective	Part de la 1ère	Part de la 2ème
1020	$1020 \times \frac{2}{5}$	$1020 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = 1020 \times \frac{6}{20}$
840	$840 \times \frac{2}{5}$	$840 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = 840 \times \frac{6}{20}$
d’où $\boxed{1020}$		$\boxed{1020} \times \frac{6}{20}$
$\boxed{840}$		$\boxed{840} \times \frac{6}{20}$

$$\xrightarrow{m\frac{6}{20}}$$

Synthèse : $\xrightarrow{m\frac{2}{5}}\ \xrightarrow{m\frac{3}{4}}$ peut être remplacé par $\xrightarrow{m(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4})}$ ou par $\xrightarrow{m\frac{6}{20}}$

• **Trouvez une écriture plus simple de** $\frac{6}{20}$. (On obtient rapidement $\frac{3}{10}$ ou 0,3.)

• **Trouvez en dixièmes de la somme totale, la part de la 1ère :** $\frac{4}{10}$.

• **Trouver en dixièmes de la somme totale, la part de la 3ème :**

Les 2 premières ont reçu $\frac{3}{10} + \frac{4}{10}$ soit $\frac{7}{10}$ de la somme totale. La 3ème reçoit donc $\frac{3}{10}$.

Beaucoup d’enfants répondent $\frac{3}{10}$ *sans faire ce raisonnement, mais en remarquant que la 2ème et la 3ème ont reçu la même somme dans les 2 cas.*

On trouvera dans les manuels d’autres problèmes amenant la composition de fonctions numériques, et on peut faire retrouver le calcul du produit de deux fractions par la composition des fonctions.
Exemple concernant le problème précédent :

la suite : $\xrightarrow{m\frac{2}{5}}\ \xrightarrow{m\frac{3}{4}}$

peut être remplacée par : $\xrightarrow{m2}\ \xrightarrow{d5}\ \ \xrightarrow{m3}\ \xrightarrow{d4}$

en intervertissant : $\xrightarrow{m2}\ \xrightarrow{m3}\ \ \xrightarrow{d5}\ \xrightarrow{d4}$

en composant : $\xrightarrow{m(2\times3)}\ \xrightarrow{d(5\times4)}$

et enfin : $\xrightarrow{m\frac{2\times3}{5\times4}}$

IV.4.- Savoir “prendre les $\frac{2}{3}$ de ...”.

Questions :

- On a 25 billes, on demande de prendre le double, comment fait-on ?

(il faut multiplier par 2. $25 \times 2 = 50$)

- Si on demande de prendre le triple ?

(il faut multiplier par 3.)

- Comment prendre la moitié de 9 ?

(il faut diviser 9 par 2)

ou bien ?

(multiplier par $\frac{1}{2}$)

- Comment prendre le tiers de 9 ? (diviser 9 par 3 ou multiplier par $\frac{1}{3}$)

- Comment prendre les $\frac{2}{5}$ de 30 ?

(les enfants savent qu’il faut diviser par 5 puis multiplier par 2 ou inversement)

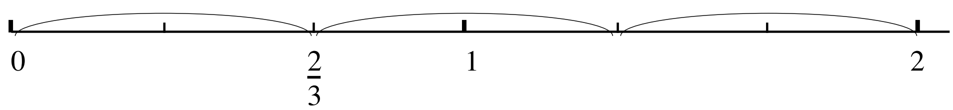
mais on sait l’écrire aussi $30 \times \frac{2}{5}$. Pour prendre les $\frac{2}{5}$ de 30, on multiplie 30 par $\frac{2}{5}$.

- Comment prendre le $\frac{1}{3}$ de 2 ? Par exemple prendre le tiers d’un coupon de 2m de tissu ?

Si la question est posée brutalement, sans la préparation précédente, les enfants ne savent souvent pas quoi répondre. Lors de la recherche, ils confondent presque toujours “ $\frac{1}{3}$ “ et” $\frac{1}{3}$ de 2”.

Pour prendre $\frac{1}{3}$ de 2, on fait comme plus haut : on multiplie 2 par $\frac{1}{3}$ donc $\frac{1}{3}$ de 2 c’est $\frac{2}{3}$

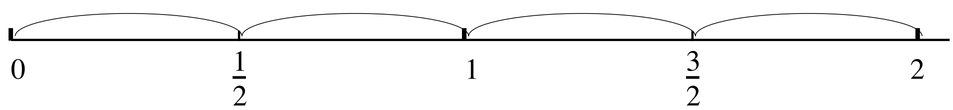
On vérifie ensuite sur une demi droite en prenant 3 carreaux pour unité.



- Comment prendre les $\frac{3}{4}$ de 2 ?

il faut multiplier 2 par $\frac{3}{4}$ $\quad 2 \times \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

vérifier :



V. POURCENTAGES.

V.1.- Notation et vocabulaire.

> Chaque fois qu'on paye 100 F, un commerçant rembourse 12F à la caisse. Il fait donc une remise, une réduction.
> Calcule les réductions qu'il fait pour des achats de 300 F, de 70 F, de 138 F.

Déroulement : Quand les enfants ont fait ce tableau et répondu aux questions, demander d'écrire la règle à ceux qui ne l'ont pas fait. (Il faut chercher combien de fois 100 F puis multiplier par 12)

Prix en F.	Réductions en F.
100	12
300	36
70 = . × 100	. × 12 = .
138 = . × 100	. × 12 = .

donc $❐ \rightarrow ❐ \times \frac{12}{100}$ ou $\xrightarrow{m\frac{12}{100}}$

• Ajouter d'autres prix : 37 F, 2345 F, ...
On peut écrire directement :

37	$37 \times \frac{12}{100} = 4{,}44$
2345	$2345 \times \frac{12}{100} = 271{,}40$

• Apporter alors le vocabulaire et la notation :

Quand le commerçant rembourse 12 F. pour un achat de 100 F, on dit qu'il fait une remise, une réduction de douze pour cent on écrit 12%.

V.2. - Calcul du prix connaissant la réduction.

> Un commerçant annonce qu'il fait des réductions de 5%. Calcule les réductions faites sur des achats de 400 F, de 250 F, de 4 630 F, de 32 748 F.

Déroulement : Mise en tableau du texte :

$\xrightarrow{m\frac{5}{100}}$

Prix en F.	réductions en F
100	5
400	.
250	.
4 630	.
32 748	.

La règle $\xrightarrow{m\frac{5}{100}}$ peut être placée tout de suite, mais pas nécessairement utilisée à toutes les lignes.
La règle peut aussi s'écrire $\xrightarrow{m0{,}05}$

• Ajouter ensuite : **Le commerçant a fait des réductions de 10 F, de 35 F, de 42 F. Trouver les prix correspondants.**

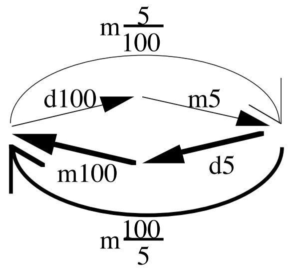
Beaucoup d'enfants n'écrivent même pas ceci et divisent par 5 puis multiplient par 100.	$. = . \times 100$ $. = . \times 100$ $. = . \times 100$	$10 = . \times 5$ $35 =$ $42 = . \times 5$

<u>Diviser par une fraction c'est multiplier par la fraction inverse.</u>

• Trouvez la règle qui permet de calculer les prix quand on connait les réductions.

(on cherche combien de fois 5, on divise donc par 5, puis on multiplie par 100). Règle : $\xleftarrow{m\frac{100}{5}}$

Remarquer que l'on a $\underset{m\frac{100}{5}}{\overset{m\frac{5}{100}}{\rightleftarrows}}$ et $\underset{d\,\frac{5}{100}}{\overset{m\frac{5}{100}}{\rightleftarrows}}$

que l'on peut décomposer : 

• Conclure : Diviser par $\frac{5}{100}$ c'est multiplier par $\frac{100}{5}$.

<u>Problème</u> :

> Les salaires des employés d'une entreprise sont augmentés de 3 %.
> Calcule les augmentations reçues par des employés qui touchaient 4 730 F, 5 680 F, 9 345 F, ...
> Calcule les nouveaux salaires.

$\xrightarrow{m\frac{3}{100}}$

Anciens salaires en F.	Augmentation en F.	Nouveaux salaires en F.
100	3	103
4730	$4730 \times \frac{3}{100} = 141{,}90$	4 730 + 141,90 = 4 871,90
5680	ou 5 680 × 0,03 = 170,40	5 680 + 170,40 = 5 850,40

• Pour des augmentations de 12,30 F de 53,10 F trouvez les anciens et nouveaux salaires.

Les enfants réutilisent ce qui vient d'être vu : $\underset{m\frac{100}{3}}{\overset{m\frac{3}{100}}{\rightleftarrows}}$ ou $\underset{d0{,}03}{\overset{m0{,}03}{\rightleftarrows}}$

V.3.- Calculer directement les nouveaux prix sans calculer l'augmentation:

Un commerçant a dû augmenter de 4 % les prix de certains articles. Trouve les nouveaux prix des articles qui coûtaient 200 F, 300F, 400F, 572F, 1245 F.

Les enfants résolvent en faisant un tableau à 3 colonnes.

anciens prix en F.	augmentations en F.	nouveaux prix en F.
100	4	104
200	8	208
300	12	312
400	16	416
...		

• Pourrait-on calculer directement les nouveaux prix sans calculer l'augmentation ?

Mise en commun.

Des enfants répondent $\xrightarrow{m\frac{104}{100}}$ ou $\xrightarrow{m1,04}$ ou encore $\square \to \square \times \frac{104}{100}$ ou $\square \to (\square \times \frac{4}{100}) + \square$

Leur demander d'expliquer leur raisonnement :

-Pour un ancien prix de 100 F. on a un nouveau prix de 104 F.

200 F. 208 F ou 2×104

300 F. 312 F ou 3×104

Donc, pour trouver le nouveau prix, on cherche combien de fois 100 F pour l'ancien prix et on multiplie par 104.

On vérifie que $572 \times 1,04$ est bien égal à ce que l'on a déjà trouvé de même $1245 \times 1,04$

- L'écriture $\square \to (\square \times \frac{4}{100}) + \square$ traduit bien le fait que pour calculer le nouveau prix, on calcule l'augmentation puis on ajoute l'ancien prix.

On arrive à l'équivalence : $\square \to (\square \times \frac{4}{100}) + \square$ ou $\square \to \square \times \frac{104}{100}$

On pourra aussi dire que :

- l'augmentation est les 4 % de l'ancien prix,
- le nouveau prix est les 104 % de l'ancien prix ou les $\frac{104}{100}$ de l'ancien prix.

• Voici de nouveaux prix : 135,20 F ; 249,60 F ; 8 320 F. Trouvez les anciens prix.

(pour trouver les anciens prix, il faut diviser par 1,04 ou diviser par 104 puis multiplier par 100).

Note : Des enfants ont trouvé que $\xrightarrow{m\frac{4}{100}}$ était équivalent à $\xrightarrow{d25}$ en remarquant que

100 : 25 = 4

200 : 25 = 8 etc.

on en profitera pour montrer que $\frac{4}{100} = \frac{1 \times 4}{25 \times 4} = \frac{1}{25}$ donc que $\xrightarrow{m\frac{4}{100}}$ c'est $\xrightarrow{d25}$

Les mêmes ont remarqué que $104 = 4 \times 26$

$208 = 8 \times 26$ etc.

donc que pour passer de la 2ème colonne à la 3ème, on peut utiliser la règle $\xrightarrow{m26}$

Pour calculer les nouveaux prix en fonction des anciens, on fait donc

$$\xrightarrow{d25} \xrightarrow{m26} \text{ ou } \xrightarrow[]{m\frac{26}{25}}$$

<u>Problème d'application</u> :

Un magasin annonce des soldes : baisse des prix de 15 %. Calculez les nouveaux prix d'articles qui valaient 180 F, 420 F, 36 F. Trouve les règles qui permettent de calculer les remises, Trouve les règles qui permettent de calculer directement les nouveaux prix.

La 1ère règle doit être rapidement trouvée : $\xrightarrow{m\frac{15}{100}}$ ou $\xrightarrow{m0,15}$
Pour certains élèves, on peut retrouver cette règle en procédant comme précédemment.

$\xrightarrow{m\frac{85}{100}}$

$\xrightarrow{m0,15}$

anciens prix	remises	nouveaux prix
100	15	100 - 15 = 85
180	1,8 × 15 ou 180 × 0,15	(153)
420	.	(357)
36		(30,6)

Deux possibilités selon le raisonnement suivi par les enfants :

- soit 180 = 1,8 × 100 donc remise 1,8 × 15
- soit appliquer la règle $\xrightarrow{m0,15}$

La 2ème règle est généralement trouvée sous la forme $\xrightarrow{m\frac{85}{100}}$ par le raisonnement implicite : "chaque fois qu'on payait 100 F on paye maintenant 85 F."

• On vérifiera, pour que tous comprennent bien,

- que pour 200 F ou 2 × 100 la remise est 2 × 15 F le nouveau prix : 170 F ou 2 × 85
- et que $180 \times \frac{85}{100}$ ou 180 × 0,85 est bien égal à 153.

<u>Exercices plus systématiques</u> :

Objectif : Trouver les règles permettant de calculer la variation (augmentation ou diminution) des prix et permettant de calculer directement les nouveaux prix .

(Penser qu'avec l'utilisation généralisée de la calculette, c'est la 2ème règle qui est utilisée : le calcul direct)

Consigne : **Je vous donne soit une remise, soit une augmentation.**
Vous devez écrire d'abord la règle qui donne la valeur de la remise ou de l'augmentation, ensuite la règle qui donne le nouveau prix.

- une remise de 10 %	(m 0,1	m 0,9)
- une augmentation de 20 %	(m 0,2	m 1,2)
- une remise de 30 %	(m 0,3	m 0,7)
- une augmentation de 12 %	(m 0,12	m 0,88)

Aux enfants faisant des erreurs, on demande de faire un tableau et de calculer les variations de prix et nouveaux prix pour des prix de départ de 100 F, 200 F, 300 F.

• En calcul mental on verra aisément les modes de calcul rapide de pourcentages :
50 % , 10 % , 20 % , 25 % , 100 %.

V.4. - Recherche du pourcentage appliqué.

Un commerçant a modifié ses étiquettes en utilisant toujours la même règle.
Anciens prix : 360 F, 400 F, 50 F.
Nouveaux prix : 288 F, 320 F, 40 F.
Trouvez cette règle.

- Quelques enfants trouvent assez vite que pour 50 F, la remise est de 10 F donc que pour 100 F, la remise est de 20 F d'où la règle "remise" de 20 %.

- Beaucoup d'enfants font la division de 360 par 288, mais ne savent pas conclure. Quand on leur demande pourquoi ils divisent 360 par 288 et non 288 par 360 ils répondent qu'ils font comme ça parce que 360 est plus grand que 288.
Des enfants font encore le même type d'erreur plus tard en refusant presque de trouver une règle "multiplier par" pour passer d'une liste de nombres à une autre liste de nombres plus petits. Comme nous l'avons écrit plus haut, il est nécessaire de bien faire prendre conscience aux enfants que lorsqu'on multiplie par un nombre compris entre 0 et 1, on trouve un résultat plus petit.

Pour aider les enfants n'ayant pas encore trouvé, nous leur demandons quel genre de règle ils cherchent. Tous répondent : un pourcentage.

Que pourrait-on choisir comme prix facile de départ ? On se met d'accord pour 100 F.

Synthèse :A la mise en commun, faire le tableau :

ancien prix	nouveau prix
360	288
400	320
50	40
100	?

Méthode possible : 100 = 2 × 50 donc nouveau prix 2 × 40 = 80

Le commerçant a trouvé ses nouveaux prix en multipliant par $\frac{80}{100}$ ou par 0,8.
Il fait une remise de 20 %.

ancien prix	nouveau prix
360	288
400	320
50	40
100	?

Écriture de la règle : m0,8

• Si on n'avait pas donné la ligne : ancien prix 50, nouveau prix 40 ?

Réponses très rapides :

on divise 400 par 4, on divise 320 par 4
et on trouve 80

ancien prix	nouveau prix
360	288
400	320
d4	d4
100	?

m0,8

• Si on n'avait pas non plus donné la ligne : ancien prix 400, nouveau prix 320 ?

Réponses presque aussi rapides : on aurait divisé 360 par 3,6 pour trouver 100 F et 288 par 3,6.
Les enfants font cette dernière division pour vérifier que l'on trouve bien 80F.

• Je vous donne : ancien prix 450 F, nouveau prix 337,50 F.
Trouver le pourcentage d'augmentation ou de remise.

Ils procèdent ainsi :

anciens prix	nouveaux prix
450	337,5
d4,5	d4,5
100	.

Ils trouvent 75. La remise est donc de 25 %

• Redonner plusieurs fois ce même type d'exercice mais ce travail est du programme du collège.

V.5. - Les sondages.

Situation à adapter selon le milieu dans lequel se trouve l'école :

Une enquête faite auprès des 340 enfants d'une école X nous a appris que 119 enfants viennent à pied à l'école, que 153 viennent en car, et que 68 sont amenés en voiture ou à moto.

• Dire : **On va faire la même enquête dans notre classe et on va comparer les résultats à ceux de l'école X.**

Déroulement : Une fois les résultats de la classe connus, la comparaison s'avère difficile : les nombres sont trop différents pour que l'on puisse tirer une conclusion. Une discussion doit permettre de se mettre d'accord :
Si nous étions 100 élèves dans la classe, combien viendraient à pied, en car, en voiture ?
(Ceci peut être amené en considérant 3 classes identiques à la nôtre (s'il y a plus de 30 enfants) ou 4 classes identiques à la nôtre (s'il y en a environ 25)).

• Prenez 100 élèves dans l'école X et faites les calculs :

Enfants de l'école X qui viennent :	Nombre d'enfants en réalité	Nombre d'enfants sur 100
à pied	119	
en car	153	
en voiture ou moto	68	
Au total	340	100

$\xrightarrow{\text{d } 3{,}4}$

Pour calculer pour 100 enfants,
il faut diviser par 3,4.

On trouve alors 35, 45, 20, donc 35 % viennent à pied,
45 % viennent en car,
20 % viennent en voiture ou moto.

• **Faites le même tableau pour notre classe**.
(S'il y a 27 élèves, les calculs se font en divisant par 0,27.)

• Établir les comparaisons grâce aux pourcentages lus dans les troisièmes colonnes.

- Dans les résultats de la classe, des élèves trouvent un peu drôle que par exemple 55,56 enfants viennent à pied. Bien sûr. On rappelle qu'on a calculé ***comme si*** *dans la classe il y avait 100 enfants et qu'on a dû diviser par 0,27 par exemple, il n'est donc pas trop étonnant de trouver des nombres à virgule aux résultats.*

V.6. - Suites de variations. Trouver la variation “totale”.

Entre 1991 et 1992 un produit a augmenté de 20 %. Entre 1992 et 1993 ce produit a encore augmenté de 10 %. Quelle a été l’augmentation totale entre 1991 et 1993 ?

Tout le monde répond 30 % et on demande de le vérifier :

• Pour avoir des calculs faciles, quel prix choisir pour le produit ? (100 F bien sûr)

Prix en 1991	Prix en 1992	Prix en 1993
100	120	132
200	240	264

$$\xrightarrow{m\ 1,2} \qquad \xrightarrow{m\ 1,1}$$

- Pour trouver le prix en 1992 , il suffit de multiplier par 1,2.

- Pour trouver le prix en 1993 il faut multiplier le prix de 1992 par 1,1.
On obtient 132 F et 264 F et non 130 F et 260 F qui correspondraient à 30 % d’augmentation.

Partant des prix de 1991 : 100 F, 200 F, il faut donc multiplier par 1,32 pour obtenir les prix de 1993 .

On peut alors détailler les calculs :

$\boxed{100}$	$100 \times 1,2$	$(\boxed{100} \times 1,2) \times 1,1$
$\boxed{200}$	$200 \times 1,2$	$(\boxed{200} \times 1,2) \times 1,1$

Les prix de 1991 sont multipliés par $(1,2 \times 1,1)$ soit par 1,32

on peut noter :

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, bend left, "m\ 1{,}2"] \arrow[rr, bend right, "m\ (1{,}2 \times 1{,}1)"'] & {} \arrow[r, bend left, "m\ 1{,}1"] & {} \end{tikzcd}$$

ou

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, bend left, "m\frac{120}{100}"] \arrow[rr, bend right, "m(\frac{120}{100} \times \frac{110}{100})"'] & {} \arrow[r, bend left, "m\frac{110}{100}"] & {} \end{tikzcd}$$

On peut continuer avec un exemple plus spectaculaire :

Une usine de vêtements a augmenté sa production de 100 % entre 1991 et 1992 mais entre 1992 et 1993 la production a baissé de 50 %.

Production de vêtements

en 1991	en 1992	en 1993
100	200	100

$$\xrightarrow{m\ 2} \qquad \xrightarrow{m\ 0,5}$$

Il n’y a donc pas augmentation de 50 % entre 1991 et 1993 mais retour au niveau de production de 1991 et on vérifie bien que $2 \times 0,5 = 1$

Conclusion : on ne doit pas additionner ni soustraire des pourcentages successifs qui ne portent pas sur le nombre de départ.

- On entretiendra tous les acquis sur les pourcentages par des situations problèmes plus ou moins complexes et bien diversifiées.

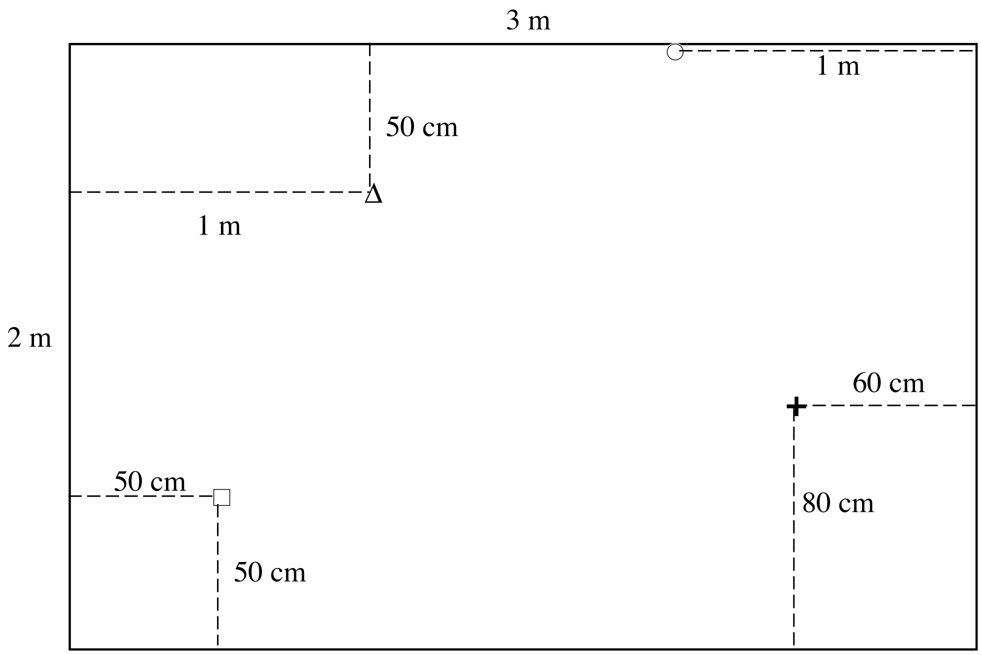
VI. ÉCHELLES. - PLANS.

VI.1. - Poser le problème de la représentation de la réalité sur une feuille de papier.

Au cours de leur scolarité, les enfants ont déjà été confrontés au problème : faire le plan de la classe. On se sera assuré que les positions relatives des objets réels et celles de leurs représentations sur le papier sont bien conservées (si le bureau est entre le tableau et l'armoire, il doit en être de même sur le papier ou dans la maquette).
A partir de la maquette, on a pu comprendre ce qu'est un plan c'est-à-dire une vue de dessus. En faisant sur le sol de la maquette le contour des objets puis en retirant les objets on obtient un plan.
On aura été amené aussi à faire respecter approximativement les proportions.
Selon le niveau de ses élèves, chaque maître jugera s'il doit reprendre de telles activités.
Au CM2, on recherchera une représentation de la réalité la plus exacte possible.

Préparation matérielle - (d'après ERMEL C.M. Tome 3 p. 117)

- Dans la classe ou dans la cour, tracer un rectangle à la craie de 2 m sur 3 m et y dessiner les 4 formes comme indiqué ci-dessous. On fera un point aux centres du triangle, du rond et du carré. Faire ce travail hors de la présence des enfants.



- Prévoir plusieurs mètres pour que les enfants puissent effectuer les mesures.
- Tirer une photocopie par enfant de la feuille donnée page 121 des 2 plans E et F. (Vérifier les dimensions sur les plans après la photocopie)

• Distribuer à certains enfants une demi-feuille E comportant un plan où il manque la croix. Le plan a été réalisé en représentant 1 mètre par 4 cm.
• Distribuer à d'autres enfants une demi feuille F comportant un plan où il manque le carré. Le plan a été réalisé en représentant 1 mètre par 5 cm.
• Un groupe de 4 ou 5 enfants recevra une plus grande feuille G où 1 m a été représenté par 10 cm et où il manque le triangle.
• Dans la cour, les enfants se placent autour du rectangle avec leur plan, à la main.

Consignes : Tenez le plan dans le même sens que vous voyez le rectangle dessiné par terre;
(Faire repérer les objets à terre et leurs représentations sur le plan).
Complétez le plan. Il faut que ceux qui ont à mettre le triangle le dessinent sur leur feuille exactement à la place où il doit être, comme il l'est par terre.

Déroulement : Beaucoup d'enfants disent tout de suite, “qu'on a dû dessiner un mètre par un centimètre” !
Pratiquement tous les enfants mesurent la distance rond - triangle ou rond - carré, trouvent des résultats très approximatifs à 5 ou 10 cm près et essayent de reporter cette mesure sur leur plan (s'ils ont mesuré 1,10m ils reportent 1,1cm). Ils cherchent par quoi a été représenté un mètre et le découvrent en mesurant la distance du rond au coin du rectangle puis se lancent dans des calculs pour trouver sur les plans les distances rond - carré ou rond - triangle.

• Quand les enfants viennent présenter leurs plans complétés, leur demander d'expliquer la méthode qu'ils ont utilisée.

Souvent, il faut leur faire remarquer que si sur leur plan, la distance rond - triangle, par exemple est correcte, la position du triangle dans le rectangle n'est peut être pas correcte. Ce n'est qu'à ce moment qu'ils pensent à mesurer les distances du triangle **par rapport aux deux côtés** du grand rectangle. Très peu d'enfants ont fait cela du premier coup.

D'autres, ayant un plan E, empruntent un plan F, mesurent les distances du triangle aux côtés du rectangle (2,5 cm), et reportent exactement cette distance sur leur plan E. Ils sont très surpris de notre désaccord. Les deux demi-feuilles E et F sont de la même taille et ils n'ont pas vu que le grand rectangle est de dimensions différentes sur ces deux feuilles.

Quelques enfants disent qu'on a divisé les dimensions par 20 ou par 25 la plupart des autres disent “un mètre c'est 4 (ou 5) cm” et quelques uns écrivent même 1 m = 4 cm ; ce qu'il faut faire rectifier.

Synthèse : Retour en classe, dessin en grand au tableau, par le maître de ce qu'il y avait au sol, inscription des mesures réelles données par les enfants. A côté, dessin du plan E.

• Le plan E est distribué aux enfants qui ne l'avaient pas eu.

• Discussion permettant d'invalider la méthode qui consistait à mesurer seulement les distances rond - triangle, triangle - carré, ... que quelques enfants ont pu continuer à utiliser.

• Parvenir à un accord pour dire que la distance rond - coin du rectangle qui est de 1 m sur le sol, est de 4 cm sur la feuille. Ils trouvent facilement ensuite que le triangle étant à 50 cm des bords du rectangle sur le sol, il sera à 2 cm des bords du rectangle sur la feuille.

• Récapitulons les résultats.
Les enfants proposent souvent de faire un tableau. Bien indiquer bien les titres des colonnes.

• Discussion concernant le choix de l'unité de mesure pour la réalité : mètre ou centimètre ?
On peut se mettre d'accord pour choisir le mètre pour le moment.

Distances sur le sol en m	Distances sur le plan E en cm	
1	4	
0,5	2	
0,6	?	positions de la croix à trouver.
0,8	?	
2	?	dimensions du rectangle.
3	?	

Les enfants complètent le tableau mettent la règle $\xrightarrow{m4}$ puis complètent le plan E ou vérifient que leurs résultats concordent avec leur dessin.

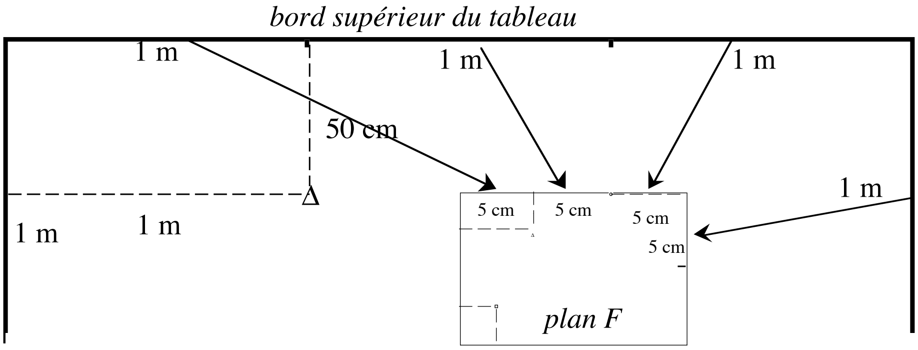
• Distribuer le plan F à ceux qui ne l'ont pas eu .
Cette fois le tableau sera fait en choisissant le centimètre comme unité de mesure sur le sol.

Distances sur le sol en cm	Distances sur le plan en cm
100	5
50	2,5
60	.
80	.
200	.
300	.

Cette fois la règle est $\xrightarrow{d20}$

• Certains enfants ont du mal à comprendre ce que signifie "100 cm sur le sol sont représentés par 5 cm sur le papier", plus précisément à comprendre que 300 cm sur le sol sont représentés par 15 cm sur le papier.
On peut procéder de la manière suivante qui amène de bons résultats puisqu'elle montre en même temps, sur un même plan, la réalité et sa représentation.

- Placer le mètre à partir de l'extrême gauche, le long du bord supérieur du tableau et tracer un trait d'un mètre, y écrire "1 m". Tracer de la même façon deux autres mètres au bout de celui-ci.
- Replacer le mètre à partir de l'extrême gauche, le long du bord vertical, tracer, écrire 1 m. Même chose à droite. Dessiner un carré comme il l'était dans la cour, à 50 cm du bord supérieur et à 1 m du bord gauche.
- Coller enfin le plan F sur le tableau. Repasser un trait de 5cm sur le bord supérieur du rectangle en rouge. Tracer une flèche reliant le trait de 1 m du tableau au trait rouge de 5 cm. Continuer ainsi.



VI. 2. - Choisir une échelle appropriée.

Matériel : Une photocopie à chaque enfant de la feuille avec le grand “F” page 122.

Consigne : Représenter ce “F” dans chacun des 3 rectangles en pointillés.
Les représentations doivent remplir les rectangles le plus possible.
(échelles attendues : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$)

Déroulement. Préciser : **on s’occupe de la lettre F elle-même et pas de sa position dans la feuille. Il ne faut pas s’occuper de la distance des bords du F aux bords de la feuille.**

Rapidement, les enfants disent bien individuellement qu’il faut diviser les mesures du F par 2. La réalisation est bonne. Pour le 2ème cadre, ils divisent par 2 les mesures trouvées dans le 1er cadre. Quelques erreurs : l’épaisseur de la lettre n’est pas toujours divisée par 2.

Pour le 3ème cadre, ils divisent encore par 2. La réalisation devient plus approximative. Les calculs sont faits mentalement ou sur un coin de brouillon et ne sont pas organisés.

• A ceux qui ont terminé de façon satisfaisante, demander :**écrivez comment vous passez du F de départ aux F de chaque cadre.** (on attend : diviser par 2, diviser par 4, diviser par 8, mais ...erreur fréquente pour le troisième cadre : “on divise par 6”).
Dans ce cas, demander de recommencer en dessinant un petit cadre de 2,5 cm sur 1,5 cm. La division par 10 est alors bien trouvée.

Synthèse. Demander d’abord d’organiser tous les calculs en tableau. Laisser diviser par 2 pour passer des dimensions dans le 2ème cadre aux dimensions dans le 3ème cadre comme la majorité l’a fait, et rectifier ensuite.

Dimensions réelles en cm	Dimensions dans le 1er cadre en cm	Dimensions dans le 2ème cadre en cm	Dimensions dans le 3ème cadre en cm
22	11	5,5	2,75
14	7	3,5	1,75
2	1	0,5	0,25
8	4	2	1
10	5	2,5	1,25

d2 d2 d2
d 4
d 8

• **Vérifiez vos mesures.** Les enfants remarquent bien que dans le 3ème cadre, il est pratiquement impossible de reporter 2,75 cm. Autrement dit, diviser par 8 les dimensions réelles n’était pas très pratique.

• **Par quel nombre aurions nous pu diviser les dimensions du grand Fpour obtenir des millimètres et non des demi-millimètres, pour obtenir un seul chiffre après la virgule et pas deux ?** Bien sûr, diviser par 10. Ce que l’on demande de faire.

• Faire recopier sur le cahier le 1er tableau :

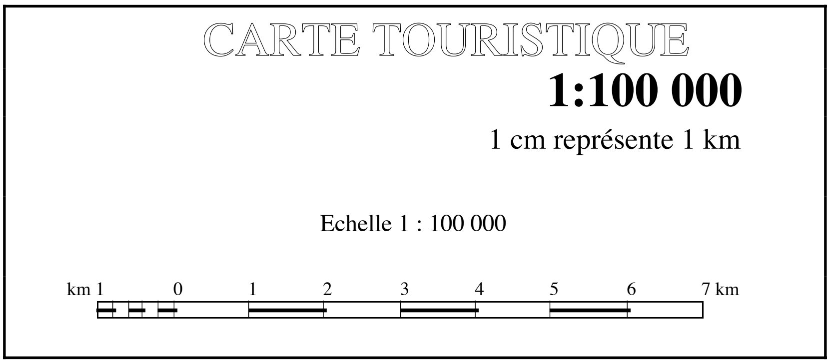
dimensions réelles en cm - dimensions dans le 1er cadre en cm

• Écrire au tableau et demander de compléter les phrases :

1 cm dans le 1er cadre représente ... cm en réalité.
1 cm dans le 2ème cadre représente ... cm en réalité.
1 cm dans le 3ème cadre représente ... cm en réalité.

VI.3. - Les différentes notations de l'échelle.

Matériel : - Une carte routière de l'Ile de la Réunion (ou plusieurs)
- Une photocopie par enfant si possible d'un montage faisant apparaître :



Déroulement :

On a déjà vu :

sur le plan E : 1 m était représenté par 4 cm
sur le plan F : 1 m était représenté par 5 cm
ou 100 cm y étaient représentés par 5 cm
ou on utilisait la règle $\xrightarrow{d20}$
pour le grand F, on a écrit dans le cahier : 1 cm dans le 1er cadre représente 2 cm en réalité. On a utilisé les règles $\xrightarrow{d2}$ **ou** $\xrightarrow{d4}$ **ou** $\xrightarrow{d10}$

Regardons sur la carte de la Réunion (affichée au tableau) : **on y trouve sur la "couverture"**

1 : 100 000
1 cm représente 1 km
Echelle 1 : 100 000
et le dessin.

Sur votre photocopie, mesurez les traits du dessin.
(les enfants mesurent et trouvent de 0 à 7 km : 7 cm)

• **Construisez un tableau où on retrouverait certaines de ces indications.** Pas de difficulté :

Distance sur le terrain en km	Distance sur la carte en cm
1	1
7	7

Cela correspond :
- à l'échelle graphique,
- au dessin
- et à la phrase : 1 cm représente 1 km.

La règle est très simple : $\xrightarrow{m1}$ **ou** $\xrightarrow{d1}$

D'où vient alors 1 : 100 000?

• En choisissant le **mètre** comme unité de mesure sur le terrain :

Distance sur le terrain en m	Distance sur la carte en cm
1000	1
7000	7

La règle est : $\xrightarrow{d\ 1000}$

ou $\xrightarrow{m\ \frac{1}{1000}}$

• En choisissant le **centimètre** comme unité de mesure sur le terrain

Distance sur le terrain en cm	Distance sur la carte en cm
100 000	1
700 000	7

La règle est : $\xrightarrow{d\ 100\,000}$

ou $\xrightarrow{m\ \frac{1}{100\,000}}$

On trouve enfin $\frac{1}{100\,000}$ soit 1 : 100 000.

L'échelle est donc le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des distances sur le terrain aux distances sur la carte quand les distances sont données avec la MÊME UNITÉ.

Il suffit de se rappeler du schéma :

distance dans la **réalité en m** $\xrightarrow{\text{multiplier par l'}\textbf{échelle}}$ distance sur le **plan en m**

<u>Entraînement</u> :

• Cherchez les échelles utilisées pour les plans E, F, et pour la figure F.

(plan E : échelle $\frac{1}{25}$)

$\xrightarrow{m\ \frac{1}{25}}$

Distance sur le sol en cm	Distance sur le plan en cm
25	1
100	4

Traductions à partir du tableau :

→1 cm sur le plan représente 25 cm sur le sol.

on retrouve bien :

→ 4 cm sur le plan représentent 100 cm ou 1 m sur le sol.

• Au cours d'exercices à partir de cartes à l'échelle 1 : 50 000 ou 1 : 250 000, de cartes de livre de géographie, d'atlas, on fera remarquer que les calculs à faire en utilisant l'échelle ainsi sont fastidieux.

Avant de faire des calculs, il est plus simple de faire des "traductions":

Exemple :	échelle	1 : 50 000		
	donc	1 cm sur la carte représente	50 000 cm	sur le terrain
		1 cm sur la carte représente	500 m	sur le terrain
		1 cm sur la carte représente	0,5 km	sur le terrain
ou plus facile :		2 cm sur la carte représentent	1 km	sur le terrain

d'où le tableau

$\xrightarrow{m2}$

Distance sur le terrain en km	Distance sur la carte en cm
1	2
.	.

$\xleftarrow{d2}$

VI.4. - Chercher l'échelle.

Exemple à partir d'un plan de maison :

On y **lit** la longueur de la maison : 9 m, on **mesure** sur le plan 12 cm

Distance réelle en m	Distance sur le plan en cm
9	12

Mais pour trouver l'échelle, il faut :
- avoir la même unité sur le plan et en réalité
- trouver ce qu'**une** unité sur le plan représente d'unités en réalité.

d'où en choisissant pour même unité le **centimètre** par exemple

Distance réelle en **cm**	Distance sur le plan en **cm**
900	12
d12	d 12
. (75)	**1**

d' où : $\xrightarrow[m\frac{1}{75}]{d75}$

Le plan de la maison est à l'échelle $\frac{1}{75}$.

Facultatif : En observant les différentes représentations de la figure F, et les échelles correspondantes ainsi que les plans E, F, G, on remarquera que :

plus le dénominateur est grand, plus les représentations sont réduites mais que $\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \frac{1}{10}$

On dit : l'échelle $\frac{1}{2}$ est plus grande que l'échelle $\frac{1}{4}$.; l'échelle $\frac{1}{4}$ est plus grande que l'échelle $\frac{1}{8}$.

Le dessin du F à l'échelle $\frac{1}{2}$ est plus grand que le dessin de ce même F à l'échelle $\frac{1}{4}$.

• *En liaison avec les activités de réductions ou d'agrandissements pratiquées en géométrie, on découvrira les échelles supérieures à 1 qui correspondent à des agrandissements.*

VI.5.- Liaison avec les aires.

Matériel : On peut reprendre le F ou une autre figure simple qui aura été reproduite à une échelle assez grande ($\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{5}$).

Exemple avec la figure F.

Consignes :

1) Trouver l'aire de la figure F en cm^2. (76 cm^2)

2) Trouver l'aire de la figure F que vous avez reproduite à l'échelle $\frac{1}{2}$ dans le 1er cadre. (Les enfants divisent par 2 ! et trouvent 38 cm^2)

Vérifiez votre résultat en quadrillant la figure F dans le 1er cadre pour compter les centimètres carrés qui recouvrent la figure.
(on trouve 19 cm^2).

Pourquoi trouve-t-on 19 cm^2 et pas 38 cm^2 ?

Laisser chercher. Si aucune idée sensée n'arrive, dire :
Quadrillez en cm^2 la petite barre du F puis refaites ce quadrillage à l'échelle dans la petite barre du F du 1er cadre.
Hachurez une case de 1 cm^2 puis la case correspondante dans le 1er cadre.

On constate alors que la case hachurée du 1er cadre est $\frac{1}{4}$ cm^2. (voir le dessin page suivante)

Un carré de 1 cm de côté est représenté à l'échelle $\frac{1}{2}$ par un carré de $\frac{1}{2}$ cm de côté ;
donc un carré de 1cm^2 est représenté à l'échelle $\frac{1}{2}$ par un carré d'aire $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ c'est à dire $\frac{1}{4}$ cm^2.

La longueur du côté est divisée par 2, l'aire est divisée par 4

On peut voir aussi avec le rectangle que forme la barre du F :

Dimensions de la petite barre du F		Dimensions de la petite barre du F à l'échelle 1/2	Aire de la petite barre du F	Aire de la petite barre du F à l'échelle 1/2
longueur	4	2		
largeur	2	1	$4 \times 2 = 8$	$2 \times 1 = 2$

$\xrightarrow{d2}$ $\xrightarrow{d4}$

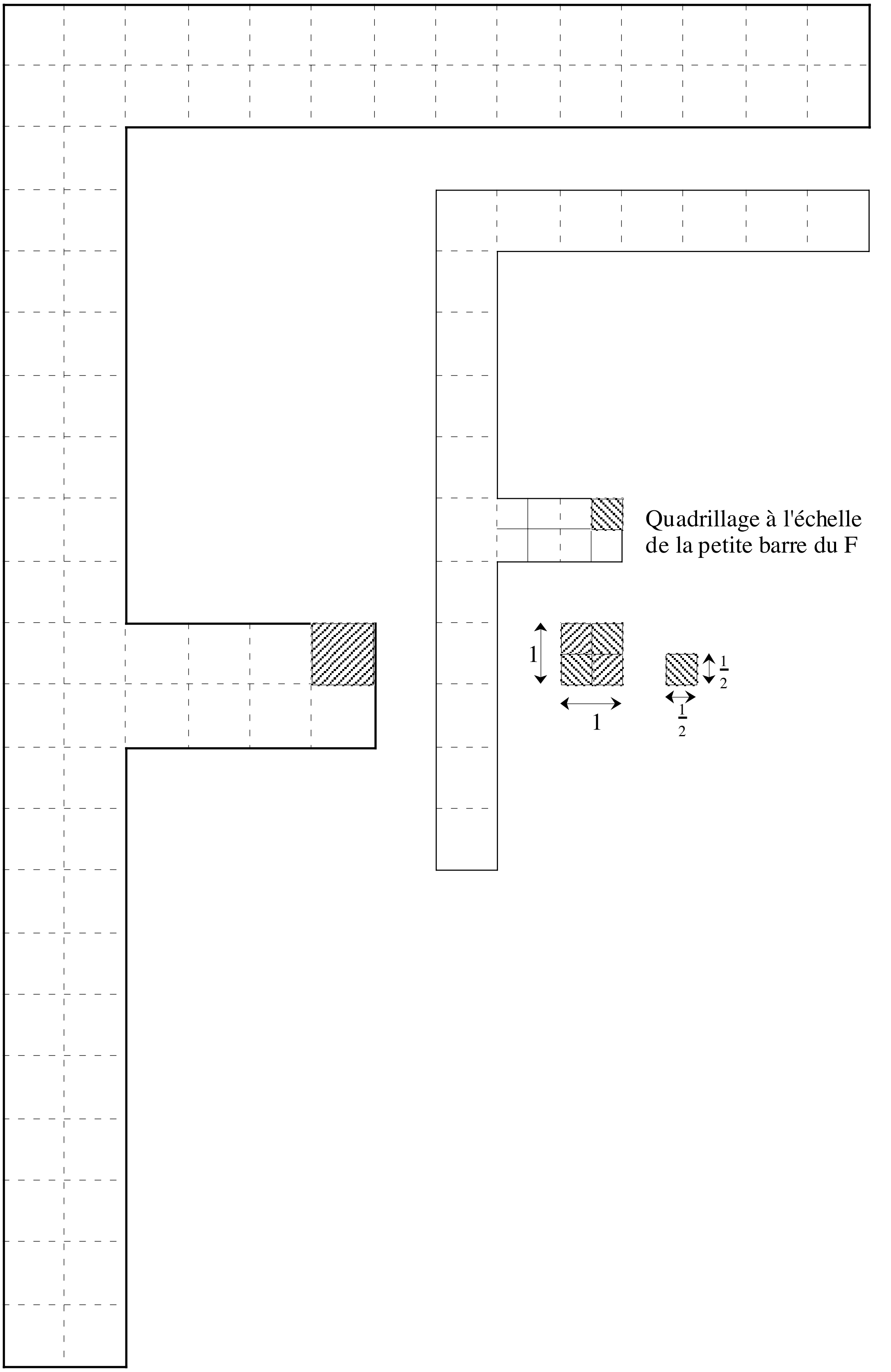
Directement par le calcul, on peut voir :
aire en cm^2 de la barre F représenté à l'échelle $\frac{1}{2}$:

$$\left(4 \times \frac{1}{2}\right) \times \left(2 \times \frac{1}{2}\right) = 4 \times 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)$$
$$= 4 \times 2 \times \frac{1}{4}$$

Les dimensions sont divisées par 2, l'aire est divisée par 4.

Autre exemple : **Sur un plan on lit : 1 cm représente 20 m.**
1 cm^2 sur le plan représente quelle surface dans la réalité ?

Réponse : Un carré de 1 cm de côté représente un carré de 20 m de côté
donc 1 cm^2 sur le plan représente (20×20) m^2 soit 400 m^2 en réalité.



Les 76 cm^2 sont trouvés soit par comptage des carreaux du quadrillage, soit par découpage en rectangles. Exemple, la jambe verticale est un rectangle de 2 cm de largeur sur 22 cm de hauteur donc d'aire 2×22 soit 44 cm^2

VII. VITESSES.

Objectif : Comprendre la notion de vitesse moyenne.

<u>Préparation matérielle.</u>

- Un circuit balisé de 30 m de longueur (pas moins de 25 m car les différences de temps seraient trop faibles).
- Chronomètre ou montre à cristaux liquides (il est intéressant de prendre les temps au dixième de seconde).
- Cahier d'essai et crayon puis feuille $21 \times 29{,}7$ à petits carreaux pour chaque enfant.

On prouvera aux enfants,à l'aide d'une ficelle de 10 m de long que le circuit est bien long de 30 m.

Consigne : Quelques enfants vont faire 3 tours de ce circuit en courant, chacun à son tour. A chaque tour on lira ce qu'indique la montre ou le chronomètre et il faudra noter les temps indiqués.

<u>Déroulement</u> : Faire courir 4 enfants. Faire un choix de façon à obtenir des temps assez différents, surtout si les temps sont pris à la seconde près et non au dixième de seconde près.
Retour en classe.
Ecriture au tableau de tous les résultats.
Exemple vécu :

	Pascale	
	Temps lu en s.	
1er tour	7,3	
2ème tour	15,2	
3ème tour	23,9	

Lorsque les temps de Pascale sont inscrits, on pose les questions :

• Pascale a-t-elle couru aussi vite les 3 tours ? ... Pourquoi ? ... Comment le prouver ? ...

Les enfants calculent facilement les durées de chaque tour effectué et on complète le tableau.

• A quel tour est-elle allée le plus vite ? Quel tour a-t-elle fait le plus lentement ?

On continue avec les autres résultats :

	Pascale		Sylvain		Freddy	
	Temps lu en s.	Durée en s. de chaque tour	Temps lu en s.	Durée en s. de chaque tour	Temps lu en s.	Durée en s. de chaque tour
1er tour (30m)	7,3	7,3	6,8	6,8	6,6	6,6
2ème tour (60m)	15,2	7,9	13	6,2	13,4	6,8
3ème tour (90m)	23,9	8,7	19,8	6,8	20,4	7

• Qui est allé le plus vite sur 1 tour ? (Sylvain)
• Qui a fait les 90 m le plus rapidement ? (Sylvain), **le moins vite ?** (Pascale)

• Vous allez faire un graphique pour montrer comment Pascale a couru.
Sur votre feuille à petits carreaux, vous allez écrire sur l'axe vertical : "distance en mètres".
Pour représenter 10 m, prenez 4 carreaux. Écrire de 10 en 10 jusqu'à 90.

Vous allez écrire sur l'axe horizontal : "durée en secondes".
Pour représenter une seconde, prenez 2 carreaux. Écrire de 1 en 1 jusqu'à 24.

Placez les 3 points. (30m ; 7,3s) _ (60m ; 15,2s) _ (90m ; 23,9s)

Lorsque tous les enfants ont réalisé ce travail, poser les questions :

• Connaît-on un 4ème point ? (oui, au départ il y a 0 m et 0 s.)

• Les points sont-ils alignés ? (non) **Est-ce normal ?** Les enfants répondent bien que les 3 tours n'ont pas été faits dans le même temps, à la même vitesse, qu'elle n'a pas couru régulièrement.

• Joignez les points. Des enfants demandent s'il faut le faire à la règle ou à la main. On se met d'accord pour les joindre à la règle parce que c'est plus facile qu'à la main ; on fait alors comme si elle avait couru régulièrement pendant chaque tour, ce qui est certainement faux. (tracé ①)

• Si Pascale avait couru le 2ème et le 3ème tour comme elle a couru le 1er tour, qu'aurait marqué le chronomètre au bout du 2ème tour ? du 3ème tour ? ($2 \times 7{,}3 = 14{,}6$; $3 \times 7{,}3 = 21{,}9$)

• Marquez les points correspondants sur le même graphique. (droite ②).

• Les points sont-ils alignés ? (oui) **Est-ce normal ?** (c'est comme un tableau de proportionnalité)
Joignez les points en rouge.

• Pascale a parcouru les 90 m en 23,9 secondes. Si elle avait couru très régulièrement elle aurait dû faire les 30 m en .... ? les 60 m en ..... ? (30m en 23,9 /3 arrondi à 8s et 60m en 16s)

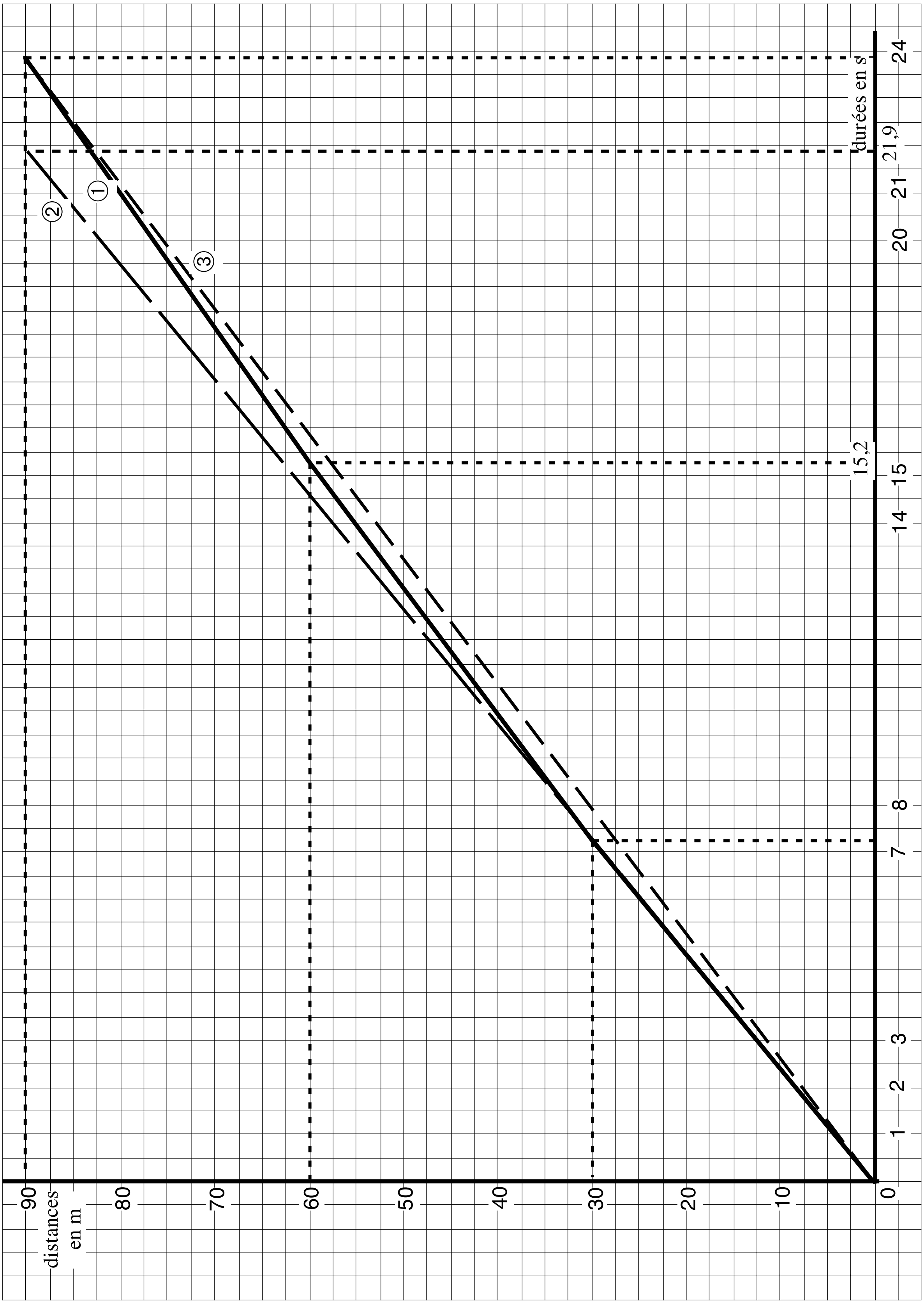
• Marquez les points sur le même graphique. On remarque qu'ils sont encore alignés et on trace la droite en bleu. (droite ③)

On aura pu remplir le tableau suivant pour Pascale :

Temps lu en s.	Distances en m.	Temps lus en s. si elle avait couru toujours comme au 1er tour	Temps lus en s. si elle avait couru régulièrement pendant les 3 tours et fait les 90 m en 23,9 s.
7,3	30	7,3	?
15,2	60	m 3 ? m 2	d 3 ? m 2
23,9	90	?	23,9

• Reprise du même type d'activité en considérant les temps de Freddy. (Nous choisissons Freddy sans dire pourquoi aux enfants : ses temps 6,6 s et 20,4 s sont facilement divisibles par 3).

• Retournez la feuille portant les graphiques de Pascale. Reprenez les mêmes unités et représentez la course de Freddy.



(Pour des raisons de mise en page,le quadrillage est réalisé ici avec des carreaux de 4mm de côté)

• Calculez les temps lus au bout du 2ème tour et du 3ème tour s'il avait toujours couru comme au 1er tour. Tracez en rouge.

• Dans ce cas, combien de temps aurait-il mis pour parcourir 50 m ?
Trouvez à l'aide du graphique puis par le calcul.
(Par le calcul les enfants cherchent pour 10 m puis pour 50 m)

• S'il avait continué à courir de la même façon, combien de temps aurait-il mis pour parcourir 95 m ? Utilisez le graphique.
Beaucoup d'enfants ne pensent pas à prolonger leur droite.

• Freddy a fait les 90 m en 20,4 s. S'il avait couru très régulièrement il aurait fait les 30 m en combien de temps ? Tracez en bleu.

• Dans ce cas, combien de mètres aurait-il faits en 1 seconde ?

	Distance en m.		Temps en s s'il avait couru régulièrement.		
	30		6,8	m 2	
	60	d 3	13,6		
d 6,8	90		20,4		d 6,8
	?		$\boxed{1}$		

vérification sur le graphique.

Un enfant a tout de suite dit que ce n'était pas 1 mètre par seconde car pour faire les 90 m il aurait mis 90 s. Les enfants ont trouvé que 4,41 m en une seconde c'est beaucoup.

• Sur le graphique, cherchez la distance parcourue entre les "temps" 1 s et 2 s ; entre les "temps" 8 s et 9 s.
A l'aide d'une règle graduée, on se rend compte que ces distances sont toutes égales.
S'il avait couru régulièrement, Freddy aurait parcouru 4,41 m chaque seconde ; 4,41 m par seconde.
La vitesse moyenne de Freddy a été de 4,41 mètres par seconde. On note 4,41 m/s.

• Combien de mètres aurait-il parcourus en 1 minute ?
(Ligne supplémentaire dans le tableau et multiplication par 60)
En courant toujours de la même façon, Freddy ferait 264,60 m chaque minute. Sa vitesse moyenne peut être aussi écrite 264,60 m par minute ou 264,60 m/mn.

• Et en une heure ?
$264,60 \times 60 = 15876$
15876 m/h
• On parle plutôt en ? (km/h)
15,876 km/h
On peut alors chercher les vitesses moyennes en m/s puis en km/h des 4 enfants qui ont couru et retrouver ainsi qui a été le plus rapide, le moins rapide, ...

On aura les tableaux :

$\xrightarrow{m4,41}$

Temps ou durées en <u>s</u>.	Distances parcourues en <u>m</u>.
1	4,41

correspond à : **vitesse moyenne de 4,41 m/s.**
C'est le nombre de m parcourus en 1 seconde.

$\xrightarrow{m45}$

Durées en <u>h</u>.	Distances en <u>km</u>.
1	45

correspond à : **vitesse moyenne de 45 km/h**.
C'est le nombre de km parcourus en 1 heure.

Lorsque les élèves savent faire un tableau correspondant à une vitesse moyenne, ils peuvent résoudre tous les problèmes, les difficultés résident surtout dans le maniement des nombres complexes.
Nous ne proposons pas ici d'exemples, les maîtres les trouveront dans les manuels du commerce;

VIII. QUELQUES QUESTIONS :

<u>VIII.1. - Et "l'opérateur fractionnaire</u>" ?

Effectivement, nous n'avons guère parlé de cette vedette et nous avons préféré que les enfants décortiquent bien et comprennent du mieux possible toutes les situations que nous leur avons proposées. Jusqu'ici, il nous a surtout été utile au niveau des notations :
pour le pourcentage : $\frac{15}{100}$ et pour l'échelle : $\frac{1}{100000}$

Dans les situations où nous avons à le chercher :

- <u>trouver l'échelle</u> : dresser un tableau et chercher le correspondant de l'**unité**
- <u>trouver la vitesse moyenne</u> : dresser un tableau et chercher la distance correspondant à l'**unité de temps**.
- <u>trouver la consommation moyenne d'essence aux 100 km</u> ou
- <u>trouver le pourcentage de ...</u> : dresser un tableau et chercher le correspondant de **100**.

Ces cas particuliers de **retour à l'unité ou à 100** ne sont pas trop difficiles.

Exemple :

23 élèves sont inscrits, 7 sont absents aujourd'hui. Quel est le pourcentage d'absents ?

Nombre d'inscrits	Nombre d'absents
$23 = \boxed{0,23} \times 100$	7
d 0,23	d 0,23
100	?

a été résolu en écrivant une relation entre les 2 nombres 100 et 23: 23 = ❏ × 100 où ❏ = 0,23.

Une autre égalité aurait pu être écrite amenant le calcul du coefficient de proportionnalité :
$100 = \Delta \times 23$

Nombre d'inscrits	Nombre d'absents
23	7
d 23	m 7
$100 = \Delta \times 23$	$\Delta \times 7 =$
m $\frac{7}{23}$	

Autres situations.

Exemple 1 :

> On veut calculer la masse d'un câble électrique ; pour cela on en coupe un petit bout.
> Un petit bout de 2 cm de long pèse 3,5 g. Le câble est long de 1500 cm.
> Quel est sa masse ?

(exercice donné à 97 élèves de classes de 5ème en métropole et réussi par 70 d'entre eux).

Plusieurs résolutions possibles :

- par retour à l'unité en cherchant la masse d'un centimètre de câble,
- en cherchant en 1500 cm combien il y a de bouts de 2 cm donc en divisant par 2, (puis en multipliant par 3,5) d'où le coefficient de proportionnalité 3,5 : 2 = 1,75.

Peut-on dire qu'une solution est meilleure qu'une autre dans cet exemple ?

Exemple 2 :

> On a payé 124 F pour 2,5 kg de viande.
> Combien aurait-on payé 7 kg de la même viande ?

Prix en F.	Masse en kg.
124	2,5
d2,5	d2,5
.	1
m7	m7
.	7

Passage par l'unité correspondant à un raisonnement du type :
Chaque fois que j'achète 2,5 kg de viande je paye 124 F.

Quand j'achète 7 kg, j'achète $\square$ fois 2,5 kg donc je paye $\square$ fois 124 F.

(oui, nous savons que $\square$ fois 2,5 ne signifie pas grand chose quand $\square$ n'est pas un nombre entier)

ou :

Prix en F.	Masse en kg.
124	2,5
$. = 124 \times \boxed{2,8}$	$7 = \square \times 2,5$
$\leftarrow$ m124	$\leftarrow$ d2,5

on trouve $\square = 2,8$

Utiliser "l'opérateur fractionnaire" ici n'est pas évident pour les enfants puisque 2,5 n'est pas entier.

On peut systématiser ce que l'on a déjà vu sur les tableaux de nombres et lors des premières situations de proportionnalité. Un certain nombre d'enfants utilisent cette technique d'eux-mêmes mais nous ne savons pas si la mécanisation que l'on peut amener restera fixée à long terme :

Exemple :

Une automobile consomme en moyenne 8*l* aux 100 km. Quelles distances pourra-t-elle parcourir avec 24 *l*, 40*l*, 70*l*, 5*l* ?

Résolution :

Consommation en *l*.	Distances parcourues en km.
8	100
$24 = \boxed{3} \times 8$	$\boxed{3} \times 100 = 300$
$40 = \boxed{5} \times 8$	$\boxed{5} \times 100 = 500$
$70 = \boxed{8{,}75} \times 8$	$\boxed{8\ 75} \times 100 = 875$
$5 = \boxed{0{,}625} \times 8$	$\boxed{0{,}625} \times 100 = 62{,}5$

A chaque fois on a donc cherché "combien de fois 8" puis multiplié ce nombre par 100. En plaçant ces 2 règles au dessus du tableau, on peut faire le rapprochement : diviser par le nombre de la 1ère colonne puis multiplier par celui de la 2ème.

$\xrightarrow{\text{d8}}\ \xrightarrow{\text{m100}}$

Consommation en *l*.	Distances parcourues en km.
8	100
24	300
.	.

- Il n'est pas certain qu'exiger l'écriture $\xrightarrow{\text{m}\frac{100}{8}}$ directement facilite les choses pour les enfants. Par contre ils peuvent d'abord écrire les 2 règles : diviser puis multiplier et ensuite donner l'écriture fractionnaire.

- Si on a une bonne mémoire, sans craindre d'intervertir l'ordre diviser puis multiplier on peut alors amener ce moyen :
Quand on est dans une situation de proportionnalité, on trouve la règle permettant de passer d'une liste de nombres à l'autre en **divisant d'abord** par le 1er nombre de la 1ère colonne **puis en multipliant** par le 1er nombre de la 2ème colonne.

Poursuivons :

en effet $\xrightarrow{\text{d8}}\ \xrightarrow{\text{m100}}$ peut être remplacé par $\xrightarrow{\text{m}\frac{100}{8}}$

$\xrightarrow{\text{d4}}\ \xrightarrow{\text{m50}}$ peut être remplacé par $\xrightarrow{\text{m}\frac{50}{4}}$ et on a bien $\frac{100}{8} = \frac{50}{4}$

Conclusion : On peut donc choisir la ligne que l'on veut pour écrire les règles.
On la choisira bien sûr de façon à ce que les calculs soient les plus faciles.

VIII.2. - Et “les produits en croix” ?

Il est évidemment très pratique d’utiliser cette méthode à condition de faire écrire aux enfants les titres des colonnes. Remarquons toutefois qu’ils ont au moins jusqu’à la fin de la classe de 5ème pour maîtriser la proportionnalité et qu’il n’est peut-être pas urgent de leur donner des recettes dont on oublie très rapidement la justification.

Les maîtres désirant apprendre le produit en croix à leurs élèves pourront commencer par le rendre visible sur des exemples. Reprenons la dernière situation :

Consommation en litres.	Distances parcourues en km.
8	100
$24 = 3 \times 8$	$3 \times 100 = 300$

Le produit en croix s’écrit $8 \times 300 = 24 \times 100$

ou $8 \times 3 \times 100 = 3 \times 8 \times 100$

Cette égalité est visiblement vérifiée

Avec une autre ligne : $8 \times 500 = 40 \times 100$

$8 \times 5 \times 100 = 5 \times 8 \times 100$

On a toujours : $8 \times (\quad \times 100) = (\quad \times 8) \times 100$

où $(\quad \times 100)$ est le nombre que l’on cherche, on peut l’appeler $\boldsymbol{x}$

et où $(\quad \times 8)$ est connu (par exemple 24, 40, 70, 5, ...)

Exemple : $8 \times \boldsymbol{x} = 24 \times 100$ On peut trouver $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{x} = (24 \times 100) : 8$ ou $\boldsymbol{x} = \dfrac{24 \times 100}{8}$

Application :

Consommation en litres	Distances parcourues en km
8	100
30	$\boldsymbol{x}$

$$8 \times \boldsymbol{x} = 30 \times 100$$
$$\boldsymbol{x} = (30 \times 100) : 8$$
$$\boldsymbol{x} = \frac{30 \times 100}{8}$$
$$\boldsymbol{x} = 375$$

On remarque que pour trouver $\boldsymbol{x}$, il faut faire les mêmes calculs qu’avec l’autre méthode : diviser par 8 et multiplier par 100. Mais on peut utiliser le TRUC :

Pour aller de **8** à 100, je marche sur **8** et j’écris $\dfrac{\quad}{\mathbf{8}}$ pour arriver à 100 que j’écris $\dfrac{100}{\mathbf{8}}$

Dernière remarque :

Comme nous l’avons écrit dans les premières pages, nous avons présenté ici les activités permettant, du moins c’était notre objectif, aux enfants d’accumuler un capital d’expériences et de recherches sur la proportionnalité.

Nous laissons aux maîtres le soin de choisir et de proposer de nombreuses autres situations de réinvestissement afin que leurs élèves dépassent le stade de l’investigation et se sentent à l’aise et sans crainte devant ces questions.

Saint-Denis, décembre 1993.

(OUFFF!)

ANNEXES

SOMMAIRE

1) Place le point **A** qui correspond à $2+\frac{3}{5}$,

2) Place le point **B** qui correspond à $\frac{17}{10}$,

3) Place le point **C** qui correspond à $2+\frac{1}{2}$

4) Complète : $2+\frac{3}{5}=\frac{.}{5}$ $\quad 2+\frac{1}{2}=\frac{.}{2}$ $\quad \frac{17}{10}=.+\frac{.}{10}$

Trouve une écriture qui correspond au point **D** : ______ une autre : ______

Trouve une écriture qui correspond au point **E** : ______ une autre : ______

Trouve une écriture qui correspond au point **F** : ______ une autre : ______

1) Écris des fractions égales à 7.

$7 = \frac{\ }{\ }$ $\quad 7 = \frac{\ }{\ }$ $\quad 7 = \frac{\ }{\ }$ $\quad 7 = \frac{\ }{\ }$ $\quad 7 = \frac{\ }{\ }$ $\quad 7 = \frac{\ }{\ }$ $\quad 7 = \frac{\ }{\ }$

2) Complète :

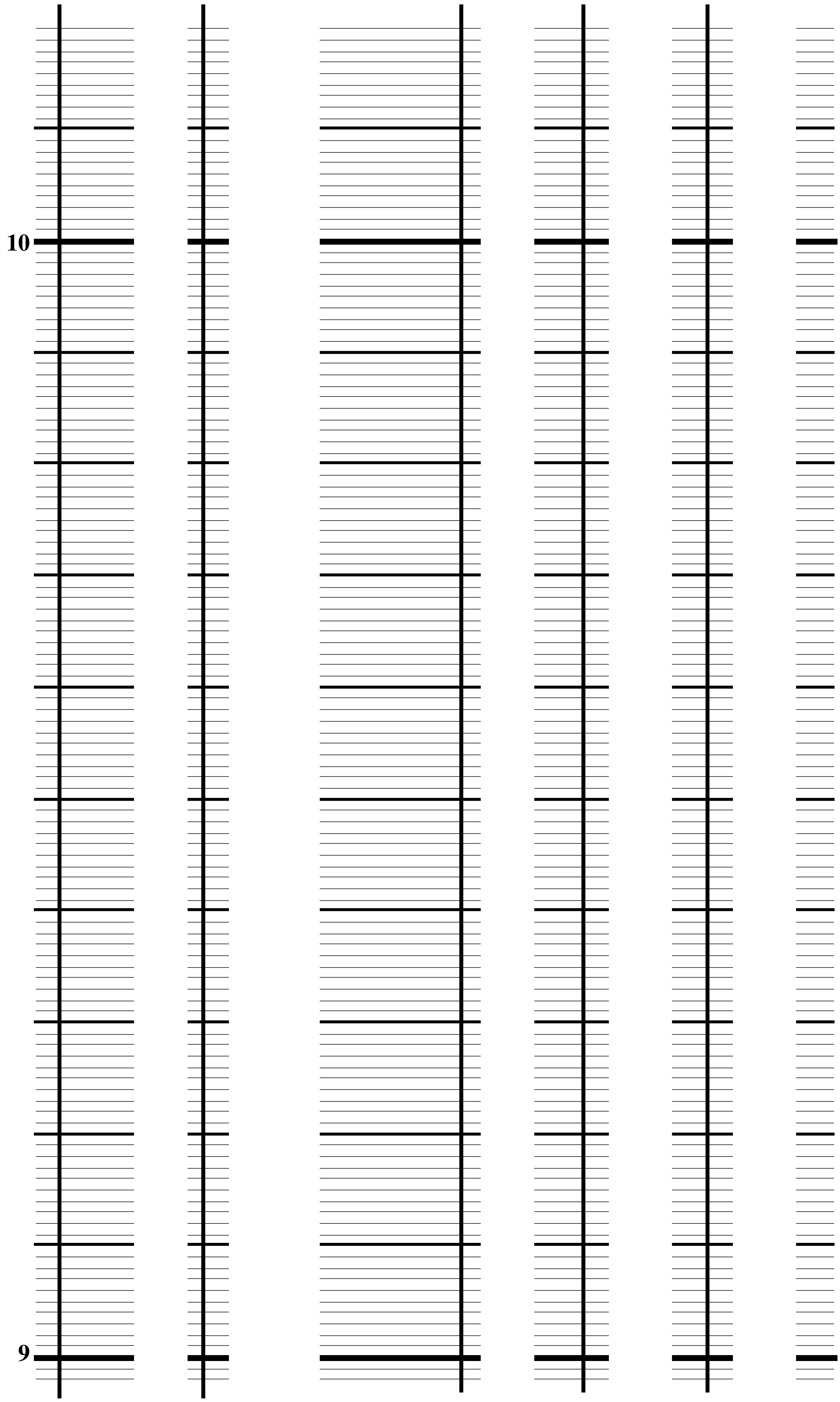
$7 = \frac{\ }{15}$ $\quad 24 = \frac{\ }{10}$ $\quad 5 = \frac{\ }{100}$ $\quad \frac{\ }{25} = 4$ $\quad \frac{\ }{16} = 7$

3) Pour chaque fraction, trouve le nombre entier qui lui est égal.

$\frac{15}{3} =$ $\quad \frac{36}{12} =$ $\quad \frac{500}{100} =$ $\quad \frac{15}{3} =$ $\quad \frac{64}{4} =$

Complète : $\frac{2}{5}=\frac{.}{10}=\frac{.}{30}=\frac{.}{100}$

$\frac{7}{4}=\frac{.}{8}=\frac{.}{32}$ $\quad \frac{11}{8}=\frac{.}{24}$


10
9

Sur chaque ligne, $\boxed{\text{entoure}}$ le plus grand des trois nombres :

a.	148,56	184,56	148,77
b.	750,8	750,65	75,98

Dans la case vide, écris un nombre compris entre :

a. 46 et 47	46		47
b. 46,4 et 46,5	46,4		46,5
c. 152,9 et 153	152,9		153

Range du plus grand au plus petit :

34,6	3,5	3,46	35,3	3,57

Écris tous les nombres ayant <u>deux</u> chiffres après la virgule compris entre 24,18 et 24,3.

24,18 _ ... 24,3

Écris tous les nombres ayant <u>deux</u> chiffres après la virgule compris entre 12 et 12,2.

12 _ ... 12,2

Écris tous les nombres ayant <u>deux</u> chiffres après la virgule compris entre 5,9 et 6,15.

5,9 _ ... 6,15

Sur chaque ligne, $\boxed{\text{entoure}}$ le plus grand des trois nombres :

a.	148,56	184,506	148,077
b.	730,8	730,65	730,984

Dans la case vide, écris un nombre compris entre :

a. 31,44 et 31,45	31,44		31,45
b. 123,08 et 123,09	123,08		123,09
c. 529,99 et 530	529,99		530

Range du plus grand au plus petit :

34,61	3,5	3,461	35,371	35,3

Écris tous les nombres ayant <u>trois</u> chiffres après la virgule compris entre 18,996 et 19,011.

18,996 _

19,011

Écris tous les nombres ayant <u>trois</u> chiffres après la virgule compris entre 12 et 12,024.

12 _

12,024

Écris tous les nombres ayant <u>trois</u> chiffres après la virgule compris entre 5,99 et 6,003.

5,99 _

6,003

Écris les DIX nombres ayant <u>trois</u> chiffres après la virgule qui suivent 99,99.

99,99										

1. Pour tout achat de 2 grands paquets de pâtes, un grand magasin offre 3 petites boîtes de sauce tomate.
Choisis des nombres de paquets de pâtes achetés et calcule à chaque fois le nombre de boîtes de sauce tomate offertes.

2. Jean a des billes, René a des images. Ils veulent faire des échanges. Ils décident de la règle : pour 3 billes on a 5 images.
Fais un tableau pour y indiquer des échanges possibles.

3. Aujourd'hui, Paul a 10 ans et son frère René a 14 ans.
Quand Paul avait 9 ans, 7 ans, 4 ans, 1 an quels étaient les âges de René ?
Quand René aura 15 ans, 18 ans, quels seront les âges de Paul ?

4. Un magasin propose des filets contenant 3 boîtes de pâté pour 14 F.
Combien paiera-t-on 6 boîtes, 9 boîtes, 24 boîtes, 114 boîtes ?
Si on a payé 140 F , 784 F, combien de boîtes a-t-on achetées à chaque fois ?

5. Le pâtissier utilise 2 500 g de chocolat pour faire 350 petits œufs de Pâques.
Quelle quantité de chocolat a été utilisée pour 35 œufs ? pour 7 œufs ? pour 700 œufs ?
Avec 150 g de chocolat on pourrait faire combien d'œufs ?
Avec 1 kg de chocolat ? avec 3,500 kg de chocolat ?

6.
1. Trace des carrés de 2, 3, 4 carreaux de côté. Compte le nombre total de carreaux dans chaque carré. Écris tes résultats dans un tableau.
2. Calcule ensuite le nombre total de carreaux dans des carrés qui ont 5, 6, 7, 10 carreaux de côté, en essayant de trouver sans dessiner les carrés.
   Un carré qui a 81 carreaux au total a un côté de combien de carreaux ?
3. Fais la représentation graphique. Que remarques-tu ?

7. Un commerçant fait des remises (ou réductions) sur tous ses prix, toujours de la même façon : il rembourse 15F chaque fois qu'on paye 100F.
Quelles remises fera-t-il sur des prix de 400F, 500F, 900F, 1 000F, 50F, 10F, 160F, 330F, 35 000F, 23F, 7F ?

8. Pour faire le plan de la classe, on décide de représenter une longueur d'un mètre mesurée dans la salle par un trait de 6 cm tracé sur le cahier.
Voici des mesures prises dans la classe : 3 m ; 0,60 m ; 2,7 m ; 6,45 m.
Trouve les mesures correspondantes des traits à tracer sur la feuille.

Sur la feuille, on trouve les dimensions suivantes : 7,2 cm ; 15 cm ; 30 cm.
A quelles longueurs correspondent-elles dans la classe ?

9. Voici une échelle graphique : **0** —— **1** —— **2 km**
1.- Quelles sont les distances sur le terrain qui sont représentées sur la carte par 16 cm ? par 10 cm ? par 7 cm ?
2.- Quelles sont les distances sur la carte qui représentent sur le terrain des distances de 3 km ? 7,5 km ? 1,25 km ?

10. Tu vas construire des rectangles qui auront tous le même périmètre : 16 cm.
Construis un rectangle de largeur 1 cm . Quelle longueur a-t-il ?
Construis un rectangle de largeur 2 cm . Quelle longueur a-t-il ?
Continue et récapitule tous les résultats dans un tableau. Tu n'es pas obligé de tracer à chaque fois le rectangle.

11. Pour faire 5 litres de confitures, il faut utiliser 7kg de goyaviers.
1.- Avec 14 kg, 21 kg, on peut faire ...

2.- L'usine TRUC a fabriqué 745 *l* de confiture. Elle a du utiliser ...

3.- Avec 322 kg de goyaviers, elle pourra faire ...

4.- Jean a cueilli 3,5 kg de goyaviers, Rémi en a cueilli 0,7 kg et Paul 4,9 kg.
Combien chacun pourrait-il faire de confiture ?

Compléter :

$\xrightarrow{m4}$	$\xrightarrow{d7}$	
0	.	.
21	.	.
42	.	.
7	.	.
1	.	.
2	.	.
3	.	.

Compléter les tableaux :

$m\frac{3}{4}$	1	2	3	4	8	10	60

$m\frac{2}{7}$	0	1	7	4	27	84	140

①	
2	6
5	15
6	18
8	.
.	9
0	.

②	
4	6
10	15
12	18
20	.
.	21
0	.

③	
8	2
12	6
16	10
20	.
6	.
.	30

④	
8	2
16	4
20	5
.	6
4	.
0	.

⑤	
2	7
5	10
9	14
.	17
10	.
0	.

⑥	
6	10
9	15
12	20
15	.
3	.
.	0

⑦	
2	0,4
3	0,6
5	1
9	1,8
.	2
0	.

⑧	
6	2
12	8
7	3
9	.
.	14
.	0

⑨	
1	12
2	14
3	16
4	18
5	.
.	28
0	.

⑩	
2	7
3	10
4	13
5	16
6	.
.	31
0	.

11	
0	50
3	86
4	93
7	114
10	130
14	165
20	170
24	.

12	
2	8
3	13
4	18
6	28
.	3
8,2	.

Trois personnes jouent au loto. Elles se partagent les gains de la façon suivante : la première reçoit les $\frac{2}{5}$ du gain total, la deuxième reçoit les $\frac{3}{4}$ de la part de la première et la troisième reçoit ce qu'il reste.

Elles ont gagné à elles trois 1020 F une première fois et 840 F une autre fois.

Calcule les sommes reçues par chaque personne à chaque fois.

Pourcentages.

1. Chaque fois qu'on paye 100 F, un commerçant rembourse 12F à la caisse.
Il fait donc une remise, une réduction.
Calcule les réductions qu'il fait pour des achats de 300 F, de 70 F, de 138 F.

2.-. Un commerçant annonce qu'il fait des réductions de 5%. Calcule les réductions qu'il fait sur des achats de 400 F, de 250 F, de 4 630 F, de 32 748 F.

3.-. Les salaires des employés d'une entreprise sont augmentés de 3 %.
Calcule les augmentations reçues par des employés qui touchaient 4 730 F, 5 680 F, 9 345 F, ...
Calcule maintenant les nouveaux salaires.

4.-. Un commerçant a dû augmenter de 4 % les prix de certains articles. Calcule les nouveaux prix des articles qui coûtaient 200 F, 300F, 400F, 572F, 1245 F.

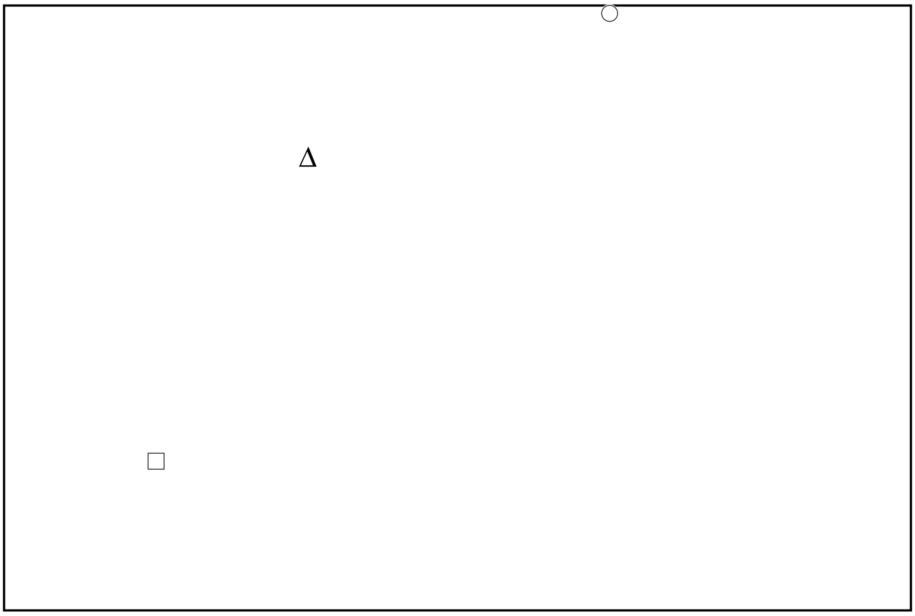
5.-. Un magasin annonce des soldes : baisse des prix de 15 %.
Calcule les nouveaux prix des articles qui valaient 180 F, 420 F, 36 F.
Trouve les règles qui permettent de calculer les remises.
Trouve les règles qui permettent de calculer directement les nouveaux prix.

6.-. Un commerçant a modifié ses étiquettes en utilisant toujours la même règle.
Anciens prix : 360 F, 400 F, 50 F.
Nouveaux prix : 288 F, 320 F, 40 F.
Trouvela règle que le commerçant a utilisée.

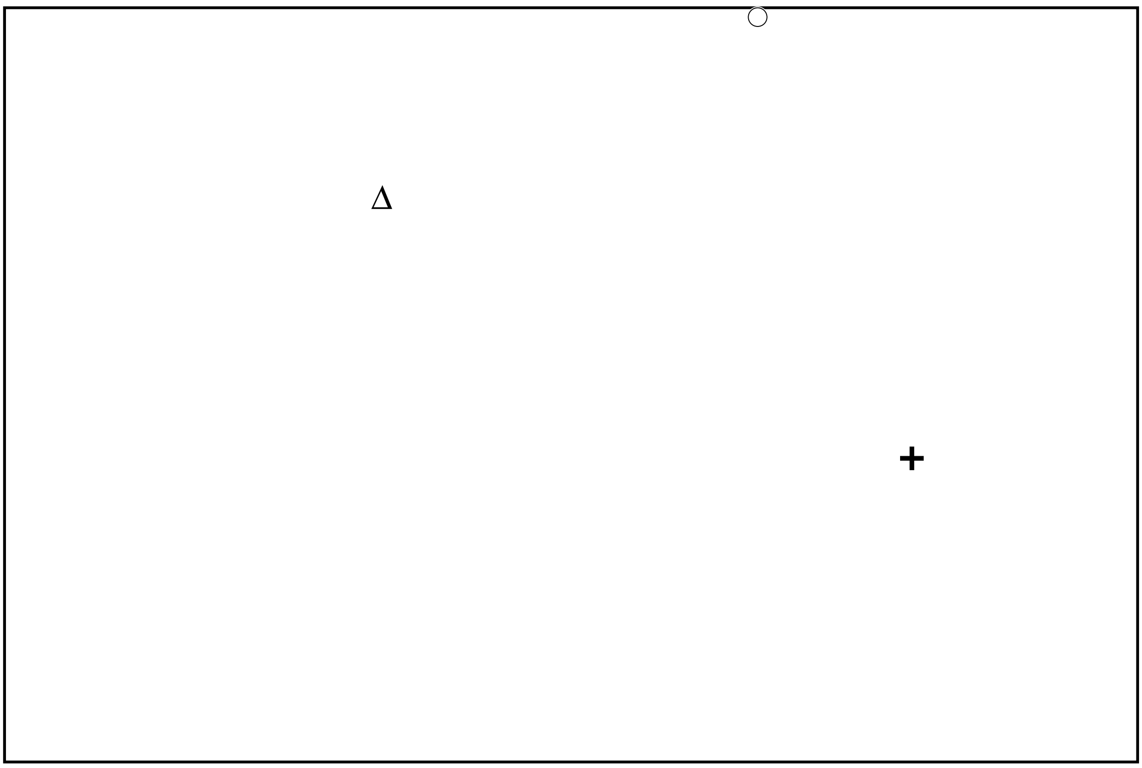
7.-. Une enquête faite auprès des 340 enfants d'une école X nous a appris que 119 enfants viennent à pied à l'école, que 153 viennent en car, et que 68 sont amenés en voiture ou à moto.

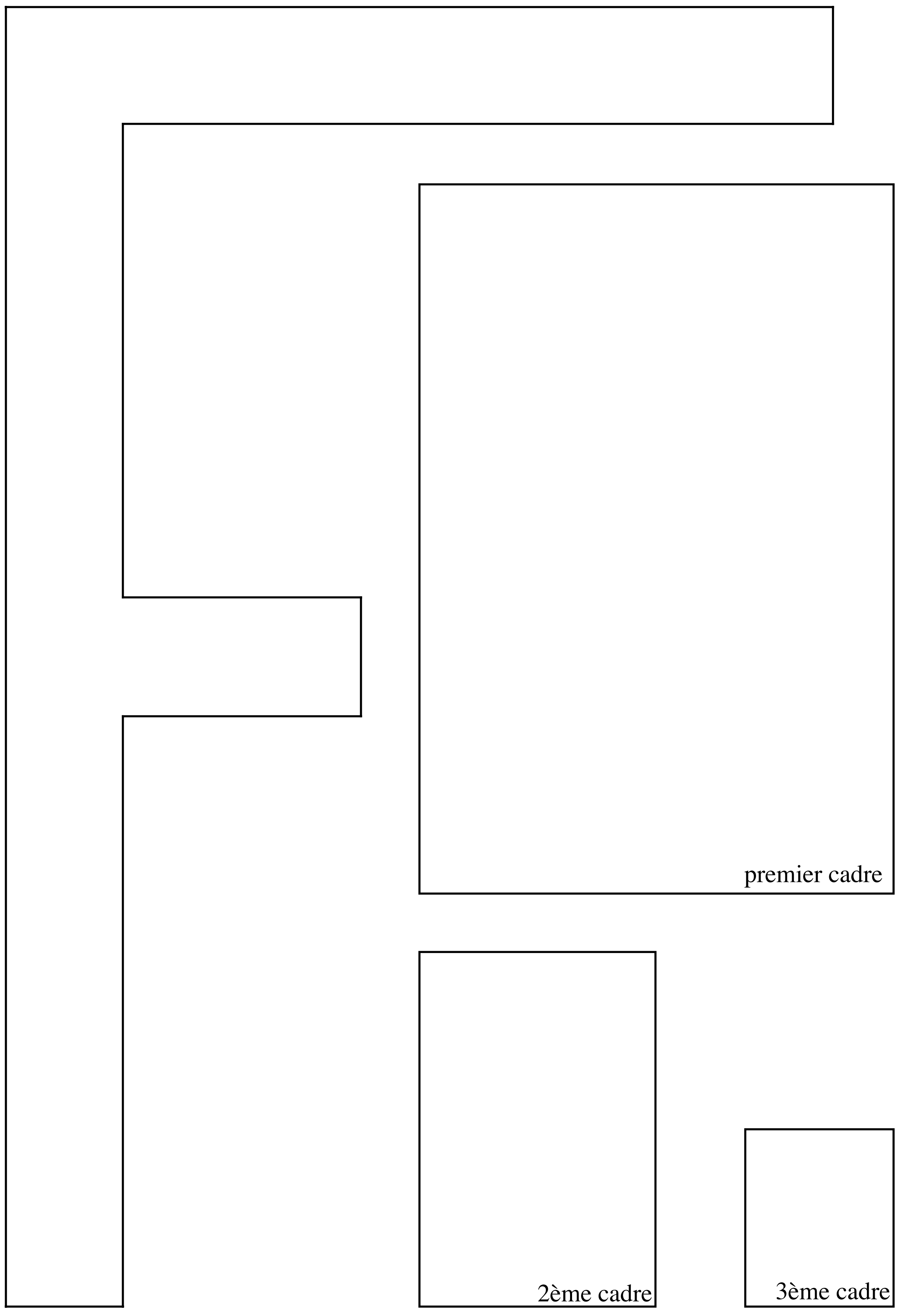
8.-. Entre 1991 et 1992 un produit a augmenté de 20 %.
Entre 1992 et 1993 ce produit a encore augmenté de 10 %.
Quelle a été l'augmentation totale entre 1991 et 1993 ?

Plan E

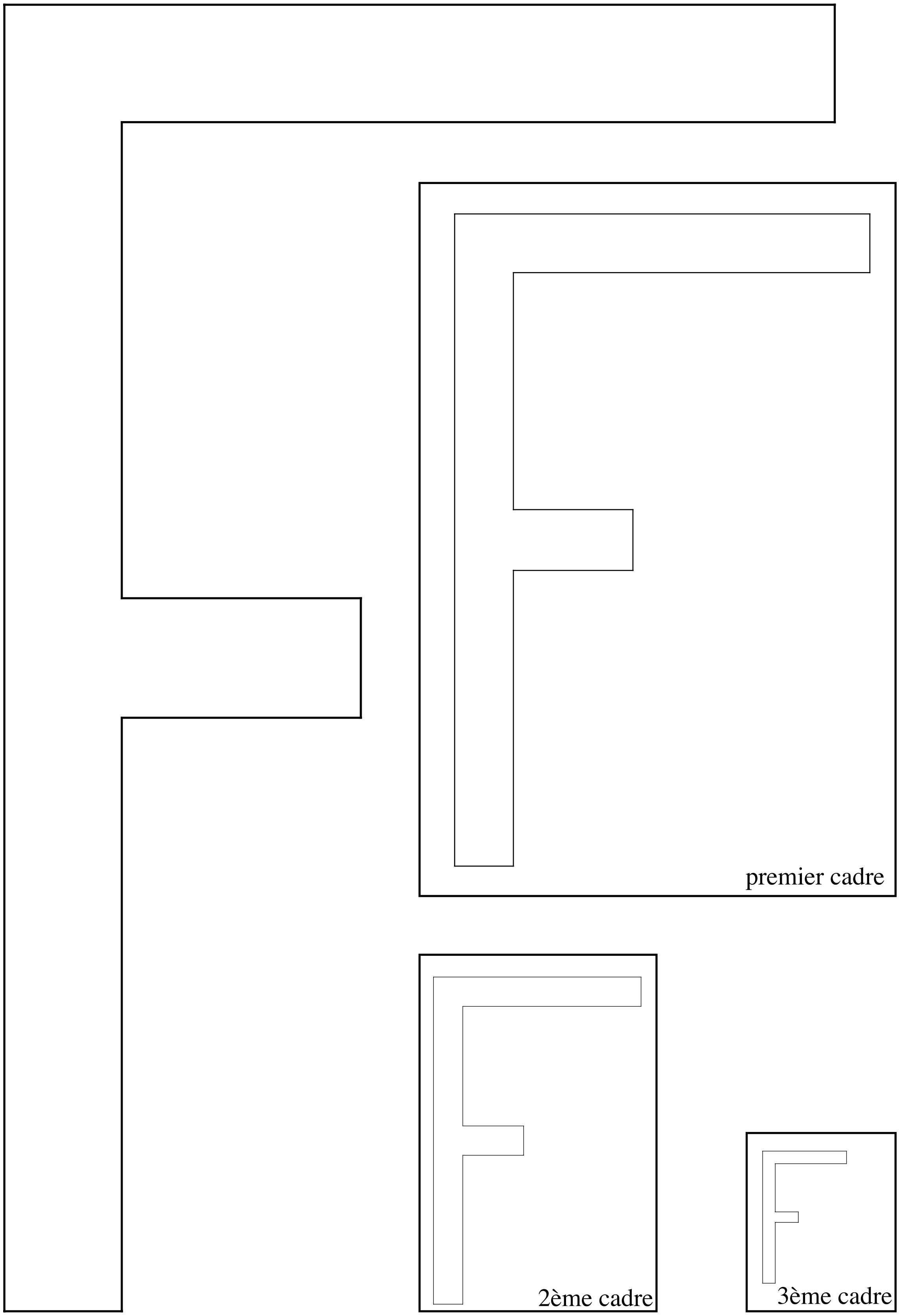


Plan F




premier cadre
2ème cadre
3ème cadre

Solutions du grand F :



Disposition intéressante des F :