

Algorithme d'Euler pour trouver un circuit hamiltonien dans le cas du parcours du ♞ cavalier ♞

Dans cet article, on va commenter [celui qu'Euler a rédigé](#) en français en 1759 pour publication, [en 1766](#), dans les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*. Il s'agit non seulement de donner une solution au problème du parcours du cavalier, mais également d'expliquer comment Euler l'a trouvée. Le jeu (en solitaire) consiste à trouver un parcours pour un cavalier aux échecs, qui passe une fois et une seule par chaque case de l'échiquier. L'article d'Euler est antérieur de plus d'un siècle à la publication du jeu icosien d'Hamilton. Il s'agit néanmoins d'un cas particulier de chemin hamiltonien.

1. La compagnie en laquelle se trouvait un jour Euler, est probablement une station de diligence : Euler, né à Bâle, a fait l'essentiel de sa carrière à Saint-Petersbourg et à Berlin, et voyageait beaucoup¹. L'énoncé donné par Euler :

parcourir avec un cavalier toutes les cases d'un échiquier, sans parvenir jamais deux fois à la même, & en commençant par une case donnée.

On remarque une tactique similaire à celle d'Hamilton, à ceci près qu'au lieu de poser des jetons numérotés dans l'ordre (chez Hamilton) on pose d'emblée 63 jetons non numérotés sur l'échiquier, et on enlève au fur et à mesure des déplacements du cavalier, les jetons marquant les cases non encore visitées par celui-ci.

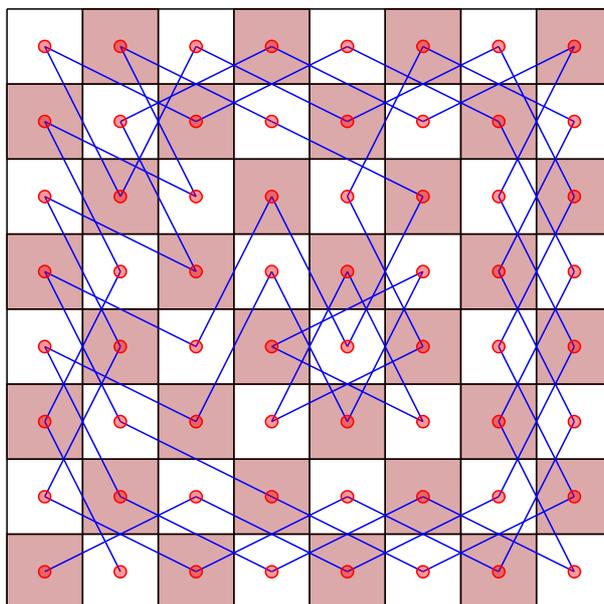
2. On peut imaginer l'ambiance de ce relais, éclairé à la chandelle, où sur une table de bois épais constellé de chopes de bières, un parieur déplace le cavalier sur l'échiquier, enlevant au fur et à mesure les jetons, et parmi les admirateurs, Euler, tentant de mémoriser les positions successives du cavalier. Sans succès d'après ce qu'il écrit. Mais il se souvient d'avoir entendu le parieur affirmer être capable de suivre un tel chemin hamiltonien depuis n'importe quelle case de l'échiquier.

C'est donc après de multiples essais chez lui, qu'Euler a fini par trouver, non un chemin hamiltonien, mais plusieurs, et il consacre l'article à expliquer comment il a fait.

Pour repérer les cases, on va faire comme aux échecs : a1 est la case en bas à gauche et h8 la case en haut à droite.

¹ On sait par exemple qu'Euler a inventé la notion de graphe lors d'une escale à Königsberg à propos des 7 ponts de cette ville.

3. Pour illustrer son propos, Euler donne un exemple de chemin hamiltonien, partant de la case en bas à gauche (a1), et aboutissant à sa voisine b1 :



Euler utilise la notation matricielle (nombres entiers pour les positions successives du cavalier) alors que dans le présent article on montre la trajectoire du cavalier sans les numéros².

Ce chemin hamiltonien³ peut être reproduit depuis un coin (a8, h1 ou h8) par rotation.

4. En parcourant le chemin à l'envers, on a une solution du problème du cavalier partant de la case b1. On en a alors aussi depuis l'une des cases a2, g1, h2, h7, g8, b8 et a7. Mais Euler reconnaît que depuis une case située ailleurs il faut recommencer à zéro si on veut trouver une solution au problème du cavalier.

Il en appelle alors à « quelque espèce d'Analyse » soit à une heuristique, qu'il se propose de décrire dans la suite de l'article.

5. Euler attribue l'idée originale à « Mr. Bertrand de Geneve » ; il s'agit probablement de son collègue Louis Bertrand⁴. La méthode est basée sur des transformations de graphes et lorsqu'Euler la décrit comme « totalement étrangère à la Géométrie » il décrit ni plus ni moins qu'un nouveau chapitre des mathématiques⁵. Et il fait l'apologie de l'application des mathématiques aux jeux.

2 Il semble y avoir une coquille dans l'article d'Euler : La case b6 a l'air de porter le nombre 45 alors que c'est un 43 qu'il faut.

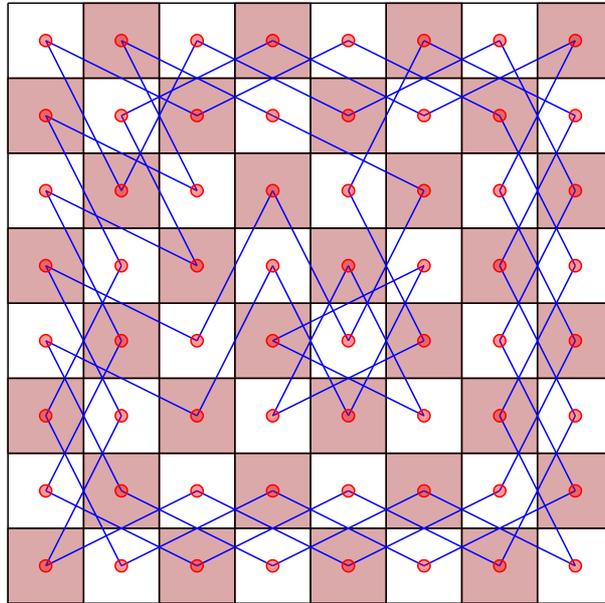
3 On réservera ici le vocable **chemin hamiltonien** pour les chemins parcourant l'échiquier en passant une fois et une seule par chaque case, et ne fermant pas. Lorsque, de plus, la case d'arrivée est à portée de cavalier de la case de départ, on a un **circuit hamiltonien** qu'Euler appelle « route rentrante en elle-même ». Il va de soi que l'adjectif *hamiltonien* ne pouvait pas être connu d'Euler, Hamilton étant né en 1805 soit après 39 ans la publication de l'article d'Euler.

4 Mathématicien et géologue (1731-1812) ayant travaillé à Berlin en même temps d'Euler et publié à Genève (sa ville natale) *développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques prise dans toute son étendue*, ouvrage dans lequel il écrit avoir eu Euler comme professeur.

5 Au siècle des lumières, « géométrie » désignait souvent les mathématiques en général. Et le mot « analyse » est visiblement, chez Euler, synonyme de « raisonnement ».

6. L'avantage d'un circuit hamiltonien c'est que, vu que c'est un circuit, on peut le mémoriser une fois pour toutes et le faire commencer par la case de l'échiquier que l'on veut.

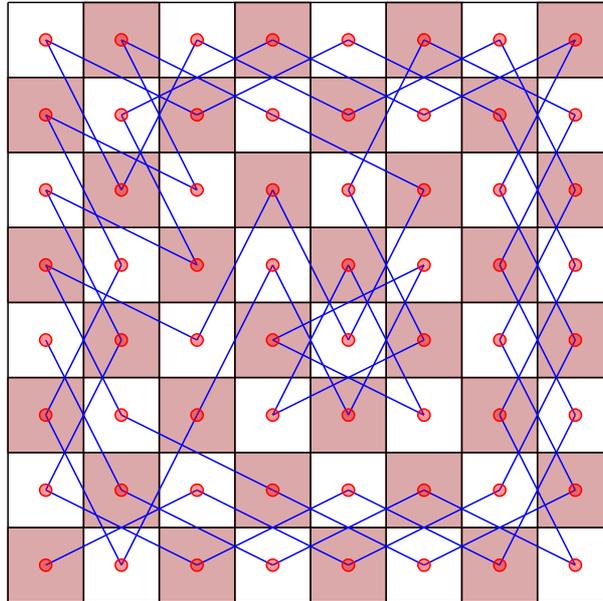
Euler donne alors un exemple de circuit hamiltonien :



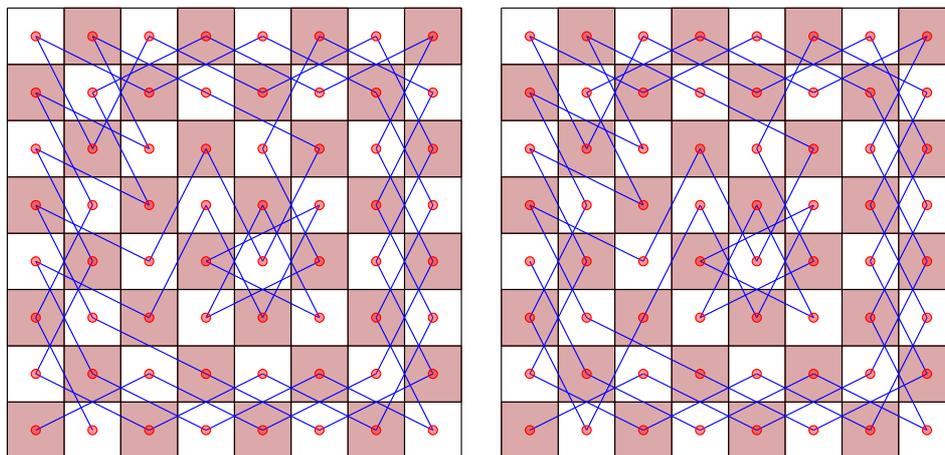
7. On remarque que la numérotation de ce circuit à partir d'une autre case est simplement une permutation circulaire sur les entiers de 1 à 64^6 .
8. On peut, en inversant le sens de parcours, encore doubler le nombre de circuits hamiltoniens.
9. Le nombre de circuits est donc trop grand pour qu'on puisse raisonnablement espérer les énumérer tous, et la situation est encore pire pour les chemins. L'algorithme qu'Euler se propose de décrire ensuite, permet néanmoins d'« en trouver autant qu'on voudra, tant de l'une que de l'autre espèce ».
10. Dans la suite, Euler propose de décrire d'abord une méthode permettant de construire un *circuit* hamiltonien à partir d'un *chemin* hamiltonien ; et par la suite (à partir du paragraphe 15) il applique la même méthode à la construction d'un chemin hamiltonien. Dans les deux cas, il transforme un graphe par des permutations sur une partie de ses sommets.

6 La notion de permutation circulaire a été promue par Arthur Cayley après les travaux de Hamilton, et bien évidemment Euler n'utilisait pas ce vocabulaire non plus.

Dans le chemin du paragraphe 3, le cavalier, au bout de la moitié de son trajet, arrive en c3 d'où il passe en a4 et continue sur l'autre moitié du chemin, jusqu'à la case b1 (arrivée). Or, depuis la case c3, il peut arriver directement en b1 et ensuite remonter l'autre moitié du trajet « à l'envers » ce qui transforme le chemin hamiltonien du paragraphe 3 en un autre chemin hamiltonien (case finale en a4 cette fois-ci) :

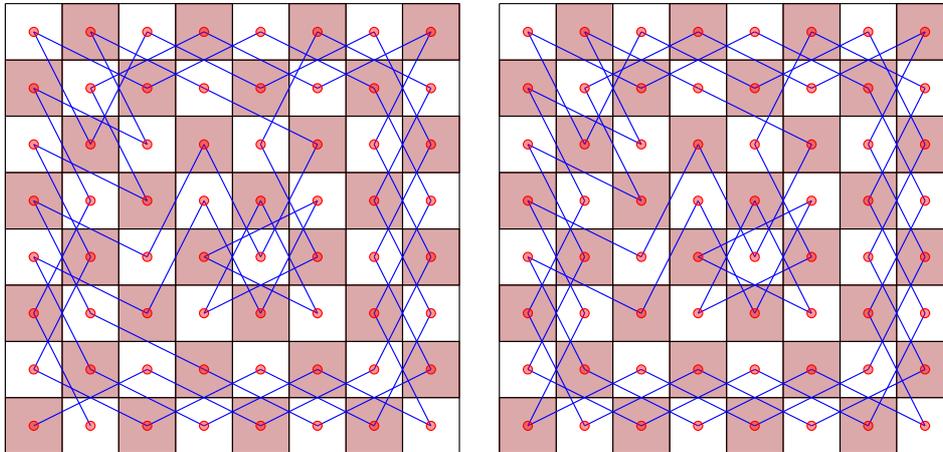


Voici les deux chemins côte à côte à fin de comparaison :

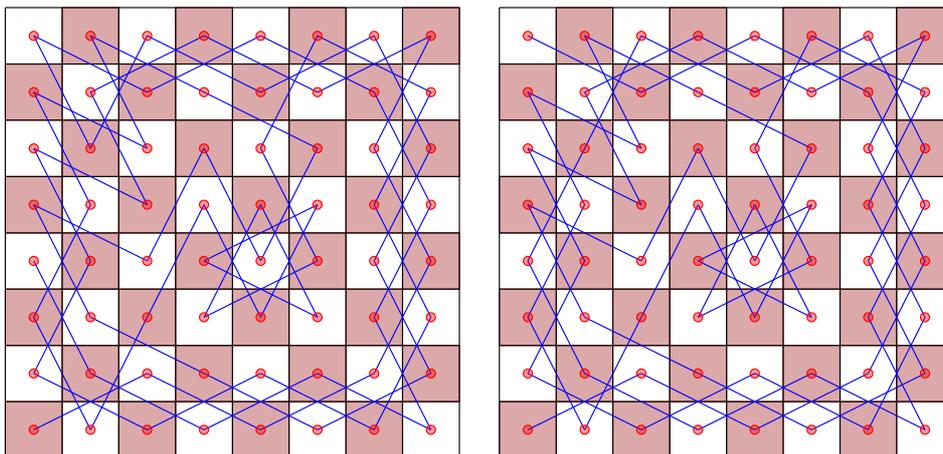


Comme on le voit, la transformation du graphe consiste juste à enlever une arête (ici entre a4 et c3) et la remplacer par une autre (ici entre b1 et c3). Elle transforme un chemin hamiltonien en un autre chemin hamiltonien, le point d'arrivée étant ici déplacé de b1 à a4. Si le cavalier pouvait aller directement de a4 à a1, on aurait fini : Circuit hamiltonien. Ici ce n'est pas le cas donc on va continuer à transformer le chemin au paragraphe 12.

11. On aurait pu faire pareil avec la case d2 qui elle aussi permet d'arriver directement en b1 puis remonter un bout de chemin. C'est ainsi qu'Euler a construit le circuit hamiltonien du paragraphe 6, à partir du chemin du paragraphe 3. En effet dans ce cas on tombe par chance sur un circuit :



12. Dans le paragraphe 10, on avait obtenu, par une première transformation, un chemin finissant par la case a4 ; ci-dessous il est rappelé à gauche. À droite on montre l'effet d'une seconde transformation, menant à un autre chemin finissant en a8 :



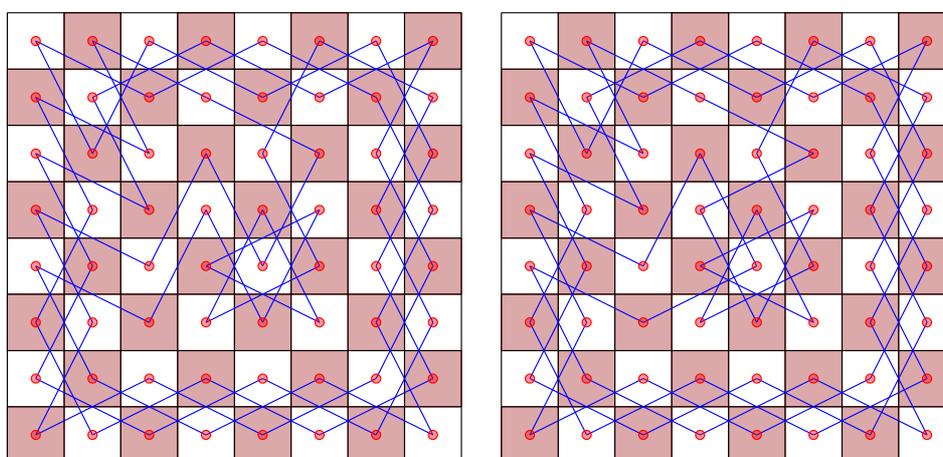
Il s'agit essentiellement d'établir une connexion entre a4 et b6 en coupant la connexion entre b6 et a8.

Depuis ce nouveau chemin hamiltonien, Euler en propose deux autres, et en recommençant depuis ces deux, il trouve 6 nouveaux chemins hamiltoniens. Ce qui esquisse une explosion combinatoire.

13. Il y a encore plus de chemins hamiltoniens à trouver si on part du chemin initial parcouru à l'envers. L'explosion combinatoire fait que « on peut encore trouver quantité d'autres parmi lesquelles on ne manquera pas d'en découvrir qui sont rentrantes en elles-mêmes ».

Il est à noter qu'Euler manque de rigueur ici : Il ne démontre pas l'existence de *circuits* hamiltoniens parmi ces nombreux *chemins*, son argument est uniquement heuristique. L'idée est qu'il y a tellement de chemins⁷ engendrés par ces transformations de graphes, qu'il n'est pas possible qu'ils évitent tous les cases b3 et c2.

14. Les transformations de graphes permettant de passer d'un *chemin* hamiltonien à un autre, appliquées à un *circuit*, donnent un autre *circuit*. Il y a donc aussi beaucoup de circuits hamiltoniens différents. Par exemple à partir du circuit du paragraphe 6 (à gauche ci-dessous), Euler trouve un nouveau circuit (à droite) :



Ci-dessus on a coupé la connexion entre c3 et d5 et établi une nouvelle connexion entre c3 et e4 ; mais pour cela il a fallu couper la connexion entre e4 et f6 et rétablir une connexion entre f6 et d5.

Dans ce paragraphe, Euler donne encore 4 autres exemples de circuits.

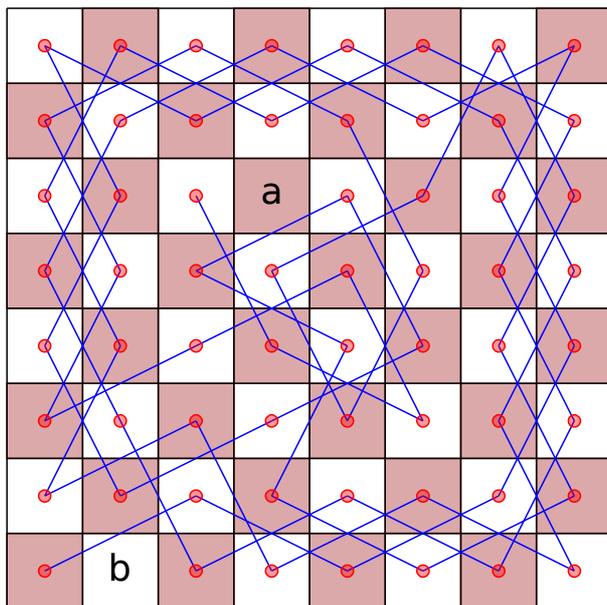
Résumé de la situation à la fin du paragraphe 14 : Une fois qu'on a un circuit hamiltonien, on peut en fabriquer plein d'autres par transformations de graphes ; et une fois qu'on a un chemin hamiltonien, on peut en fabriquer plein d'autres, parmi lesquels des circuits hamiltoniens.

Pour résoudre le problème du cavalier, il suffit donc de trouver un chemin hamiltonien. Et là encore on va utiliser les transformations de graphes.

15. On commence par parcourir le plus grand nombre possible de cases différentes avec le cavalier, sans espérer réussir du premier coup à trouver un chemin hamiltonien.

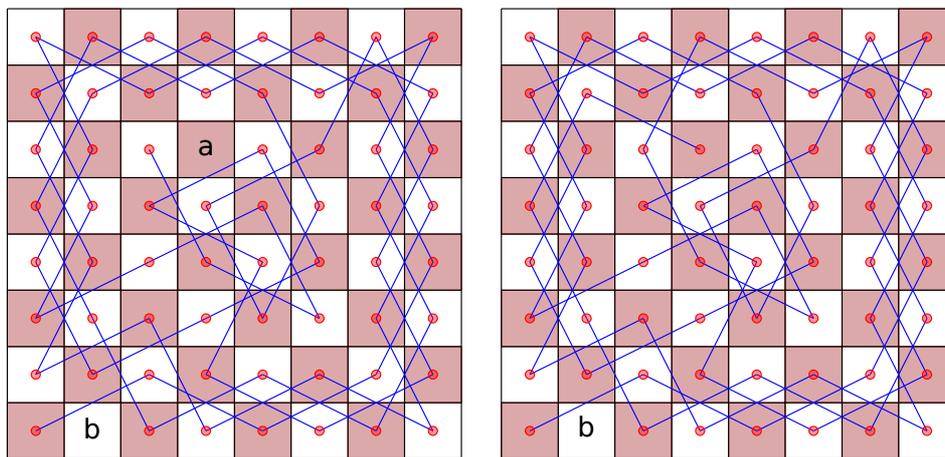
⁷ D'après l'encyclopédie en ligne des entiers (Conway et Sloane), il y a 19 591 828 170 979 904 tels chemins pour un échiquier 8×8. On comprend pourquoi Euler a renoncé à les construire tous !

Euler réussit ainsi à parcourir 62 cases de l'échiquier⁸, mais les cases restantes, marquées a et b, ne sont pas à portée de cavalier :



On va donc appliquer des transformations de graphe à ce parcours imparfait pour l'améliorer.

16. Pour commencer on défait la connexion entre d8 et b7 (qui est à portée de « a ») ce qui permet d'établir une connexion entre d8 et c6, et ainsi obtenir un chemin allant de a1 à « a » (d6) :

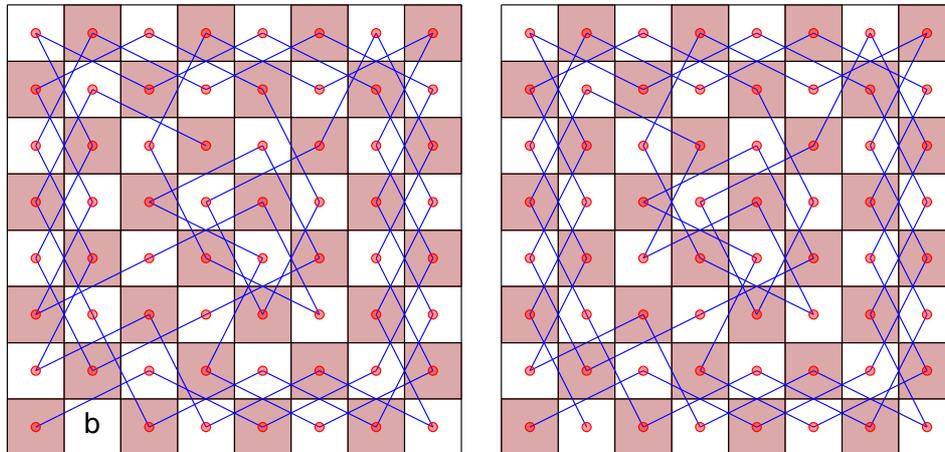


On a maintenant un chemin de 63 cases, il reste à régler le problème de la case marquée « b » (en b1) qui n'est pas à portée de cavalier de d6.

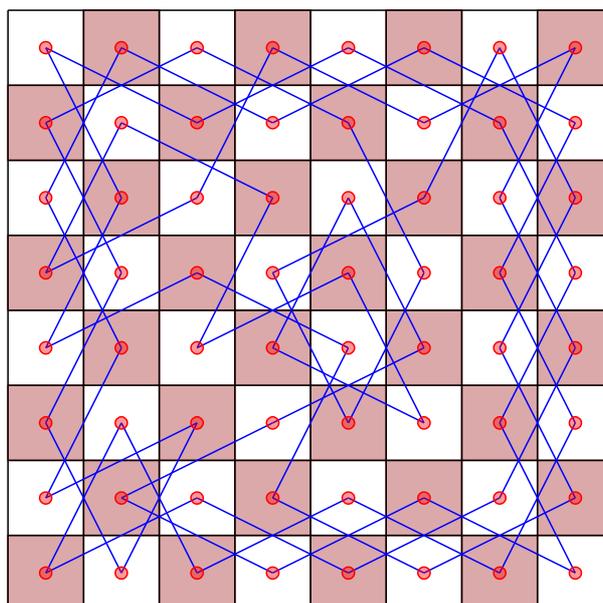
17. Euler énumère les transformées du chemin de 63 cases obtenu au paragraphe précédent, mais aucun des chemins hamiltoniens obtenus n'est un circuit.

⁸ On voit mal le nombre porté en b6 : C'est un 35

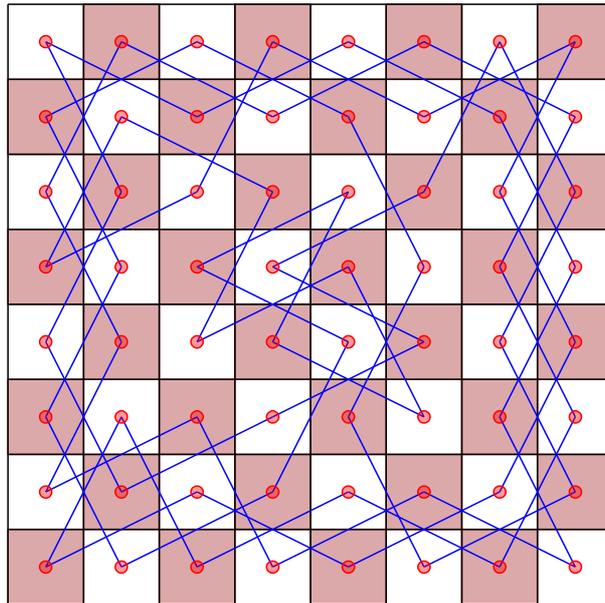
Par exemple, en déconnectant a3 (qui est à portée de cavalier de la case « b ») de c4, on peut connecter c4 à la case d6 (marquée « a » précédemment), ce qui donne (à droite ci-dessous) un chemin hamiltonien, puisque a3 peut ensuite être reliée à b1 (« b ») :



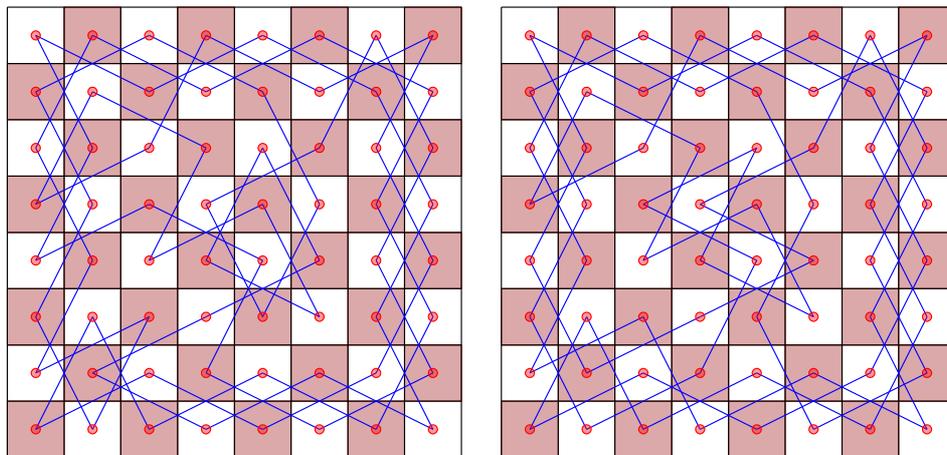
18. Euler applique alors de nouvelles transformations au chemin obtenu au paragraphe précédent. Il obtient deux chemins.
19. Il inverse ces deux chemins et par transformations de graphes, il en tire 18 nouveaux.
20. De deux des chemins du paragraphe 19 il en obtient 12 autres, mais aucun d'entre eux n'est un circuit. Cependant « leurs transformées ultérieures en fourniront assez ».
21. Mais de l'un des autres chemins obtenus au paragraphe 19 Euler obtient un nouveau circuit :



22. D'un autre chemin du paragraphe 19, Euler obtient, par de nouvelles transformations, un nouveau circuit hamiltonien

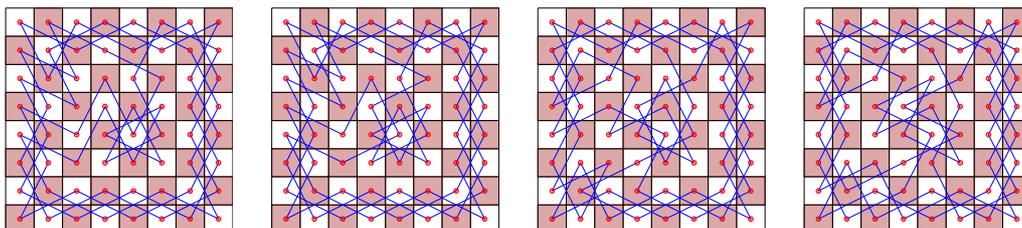


« qui ne diffère pas beaucoup de la précédente » :



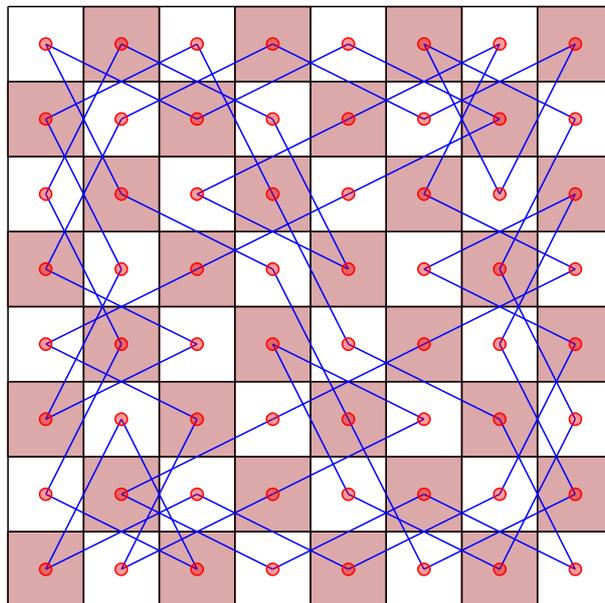
(à gauche, la solution du paragraphe 21, à droite celle de ce paragraphe)

23. Récapitulation : On en est à 4 circuits hamiltoniens découverts par Euler :

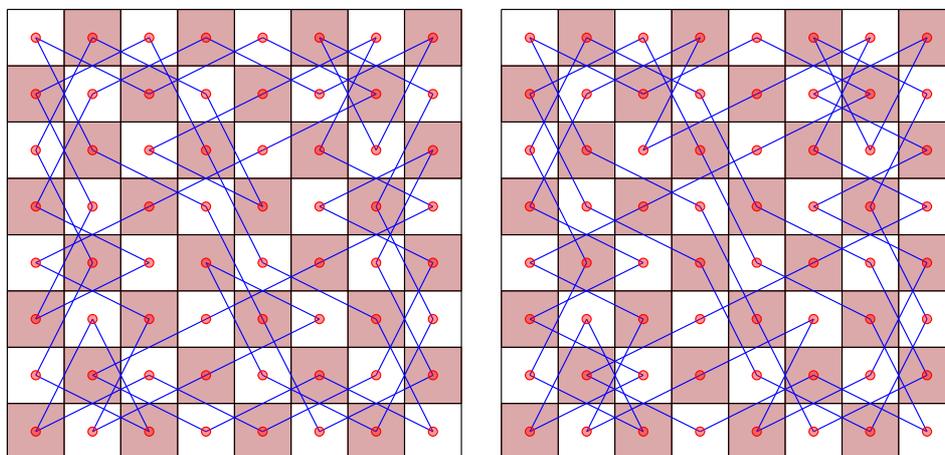


À partir d'autres chemins du paragraphe 19, Euler en trouve d'autres, que l'on ne représentera pas ici. En effet l'abondance de tels circuits incite à cesser là leur recherche exhaustive.

24. La méthode donnée par Euler pour construire des circuits fonctionne si bien qu'on peut imposer des contraintes supplémentaires. Par exemple des circuits hamiltoniens possédant une symétrie centrale. On va y consacrer les paragraphes suivants.
25. Euler reprend la méthode des paragraphes 15 à 17 mais en ajoutant, au fur et à mesure des déplacements du cavalier, leurs symétriques par rapport au centre de l'échiquier. Il y a maintenant 6 cases à joindre, et le graphe n'est pour l'instant pas connexe.
26. Euler applique diverses transformations de graphes à ces chemins pour finalement parcourir tout l'échiquier ;
27. d'autres transformations permettent ensuite de rendre le graphe connexe, et il obtient ainsi un circuit hamiltonien symétrique par rapport au centre de l'échiquier :

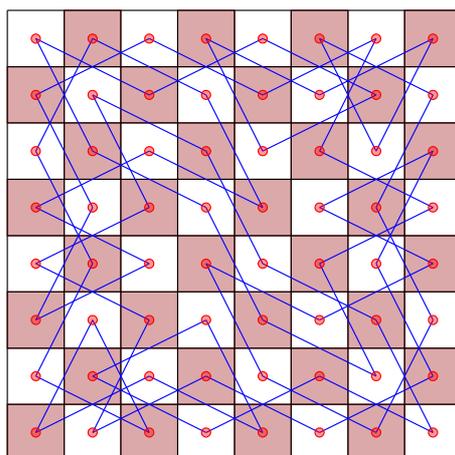
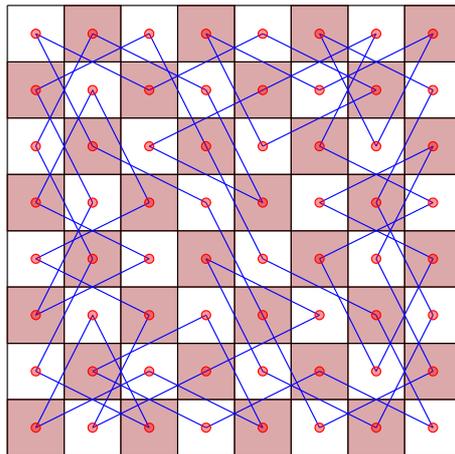
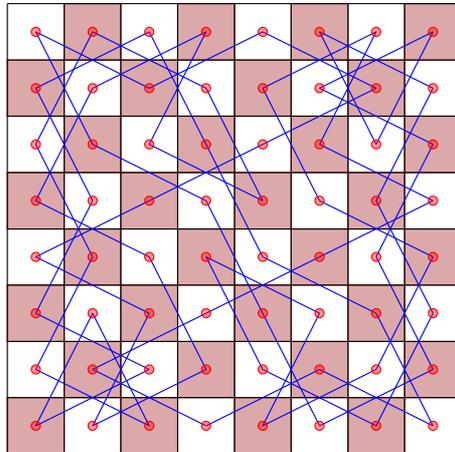


28. Des transformations peuvent être menées sur ce circuit, sans lui faire perdre sa symétrie :



29. D'autres transformations donnent d'autres circuits hamiltoniens symétriques. Euler en construit 3.

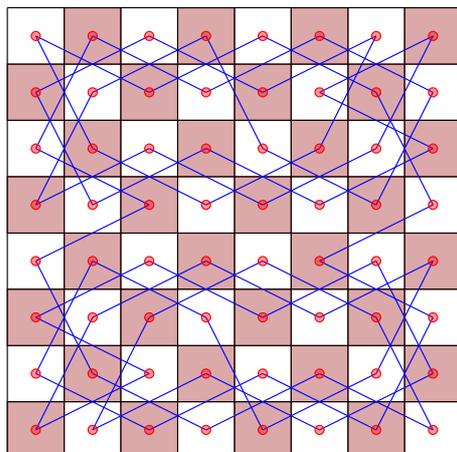
30. Les voici :



31. À partir de maintenant, Euler rajoute une autre contrainte, compatible avec la symétrie centrale : Que les 32 premières positions du cavalier soient toutes dans la moitié inférieure de l'échiquier. Il commence là encore par un parcours incomplet (4 cases manquantes).

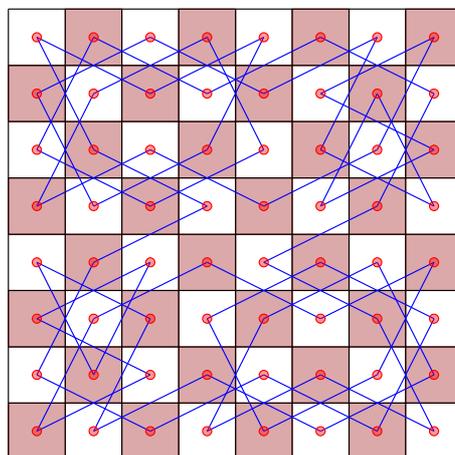
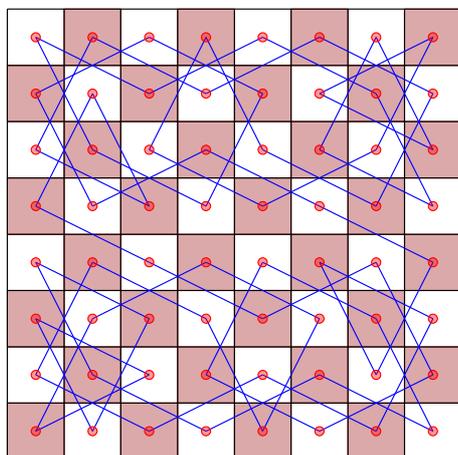
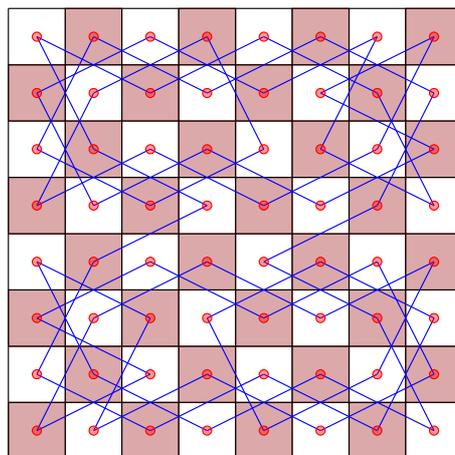
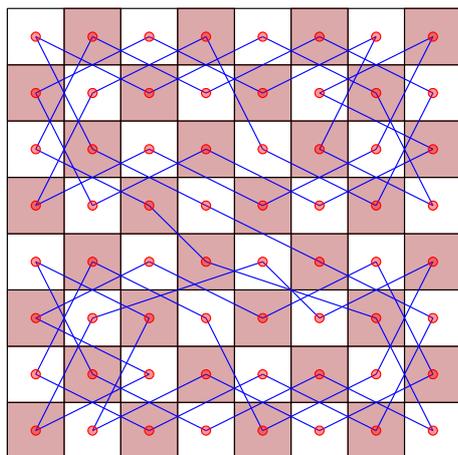
32. Il lui applique des transformations similaires à celles déjà vues ;

33. et il obtient ceci :



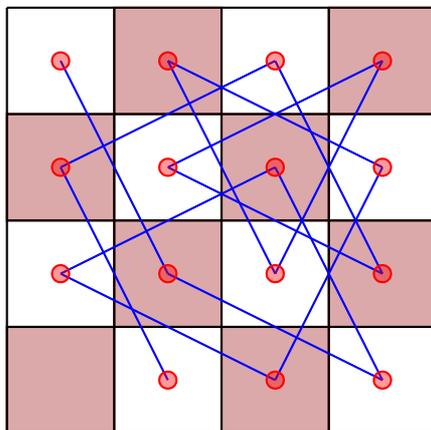
Il en trouve d'autres par une méthode similaire mais aussi par transformations de celle-ci (mais au risque de perdre la symétrie centrale, voir en haut à gauche dans le paragraphe suivant).

34. « Voilà donc encore quelques routes de cette espèce » :

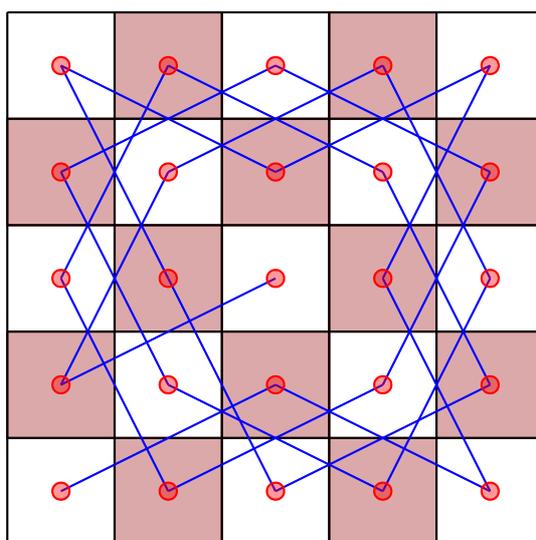


35. La complexité du problème sur un échiquier de 64 cases incite alors Euler à explorer d'autres tailles d'échiquiers.

« Or d'abord il est évident⁹, que ni un carré de 4, ni un de 9 cases n'y est propre ». Euler passe alors au carré de $4 \times 4 = 16$ cases. Et là, on n'a guère de chances d'y arriver que si on commence par un coin, ce qui donne un trajet incomplet :



36. Sur un échiquier de 25 cases, il faut aussi démarrer par une case dans un coin :



Mais comme dans un parcours de cavalier, les cases parcourues sont alternativement blanches et noires, et que 25 est impair, la case d'arrivée est blanche (ici, la c3) et il n'est donc pas possible d'obtenir un circuit hamiltonien sur un échiquier de taille 25.

37. Les transformations de graphes vues auparavant permettent alors à Euler de construire 22 autres chemins hamiltoniens sur un échiquier de 25 cases.

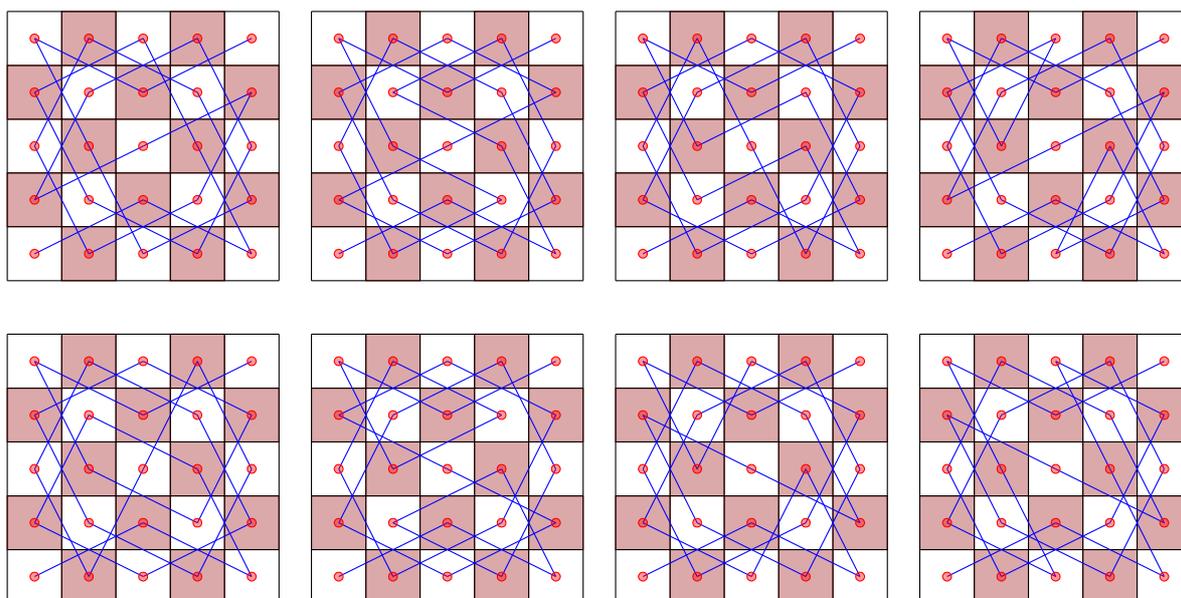
38. Dans ce paragraphe Euler en donne 6 autres, en signalant qu'à partir de chacune on peut en obtenir pas mal d'autres. « Ensuite, chaque route pouvant être renversée, le nombre des routes possibles deviendra extrêmement grand¹⁰ ».

9 Pour un carré de $2 \times 2 = 4$ cases, le cavalier n'a même pas de place pour effectuer un mouvement. Pour le carré de $3 \times 3 = 9$ cases il peut parcourir les cases du pourtour depuis l'une d'entre elles mais pas depuis la case centrale.

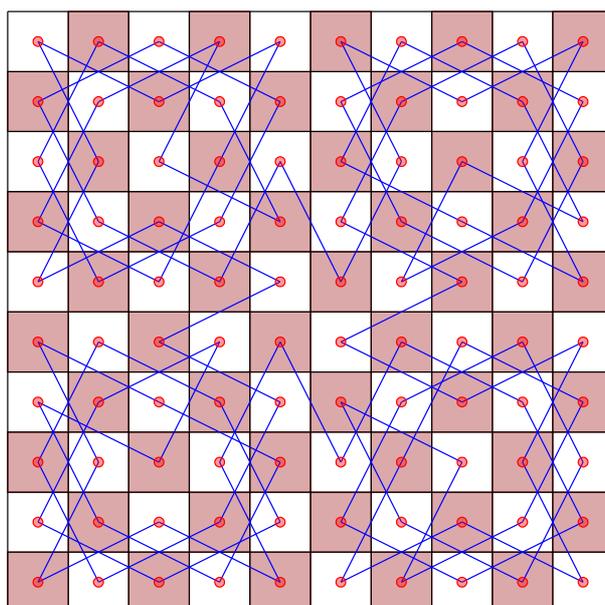
10 En fait seulement 1728 d'après l'encyclopédie de Conway et Sloane.

39. Pour restreindre le nombre de possibilités, Euler construit un chemin hamiltonien symétrique par rapport au centre de l'échiquier (en haut à gauche dans le paragraphe suivant) puis, à l'aide de transformations, 7 autres chemins symétriques (dessinés dans le paragraphe suivant).

40. Pour des raisons d'invariants et de symétries, Euler conjecture qu'il n'y a pas d'autres chemins hamiltoniens sur un échiquier 5×5, et montre exhaustivement les 8 seuls possibles :

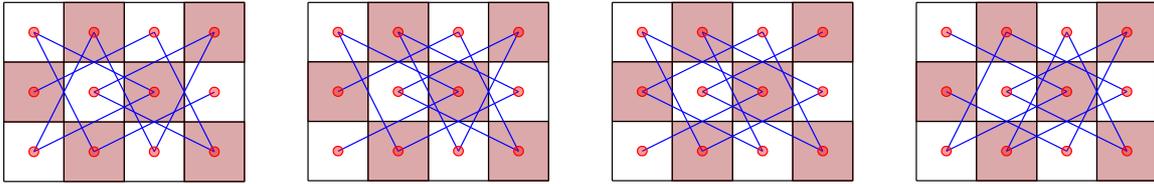


41. Comme chacun des chemins ci-dessus va d'un coin à celui qui lui est opposé, ils peuvent être pavés et remplir ainsi un échiquier de 100 cases. En plus, on obtient un circuit hamiltonien :

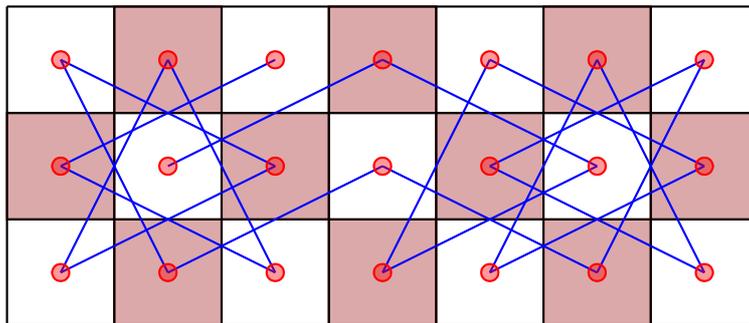
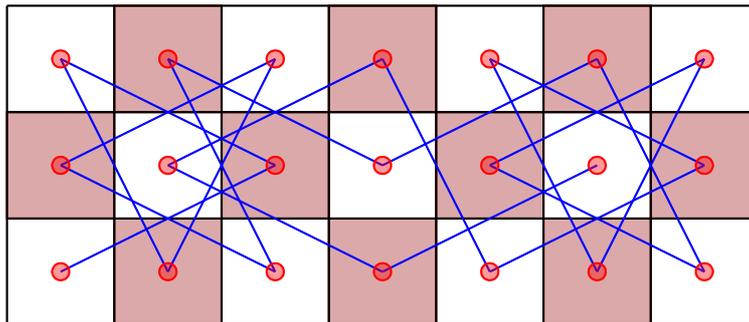


42. D'autres tailles possibles sont des rectangles.

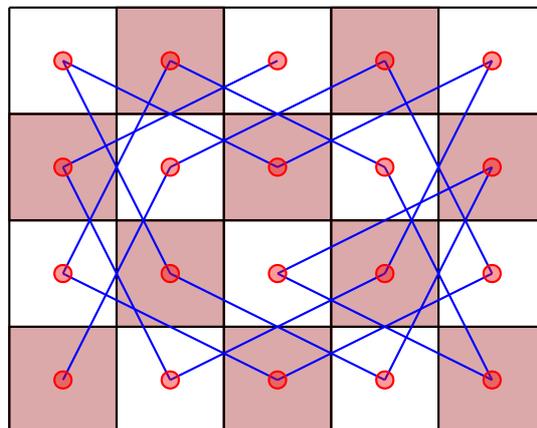
Le plus petit rectangle que peut parcourir le cavalier (toutefois sans circuit) est 4×3 . Euler donne 4 exemples de tels chemins hamiltoniens :

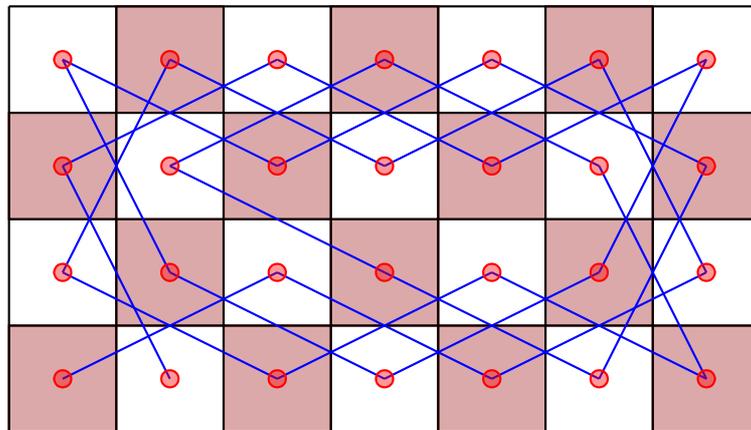
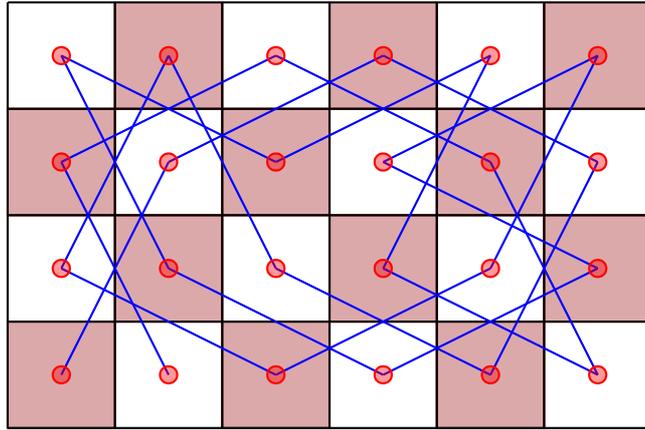


Il n'y a pas de solution au problème du cavalier sur un échiquier 5×3 ou 6×3 , mais sur un échiquier 7×3 (ou plus) on en trouve :

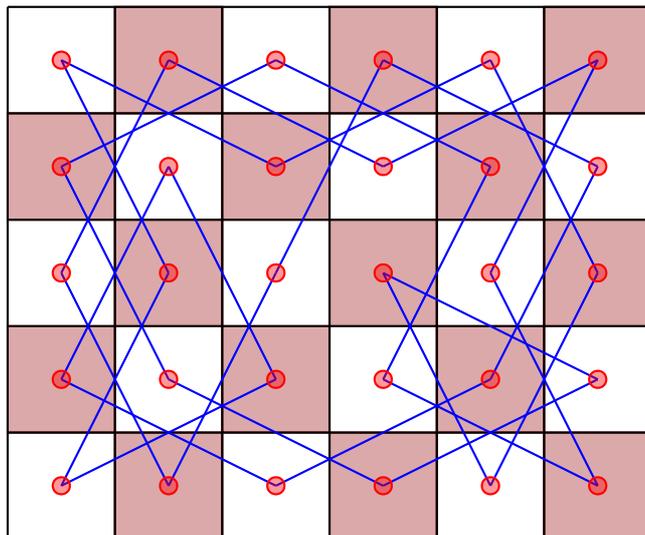


Ensuite, trois exemples de rectangles de hauteur 4 (5×4 , 6×4 et 7×4) :

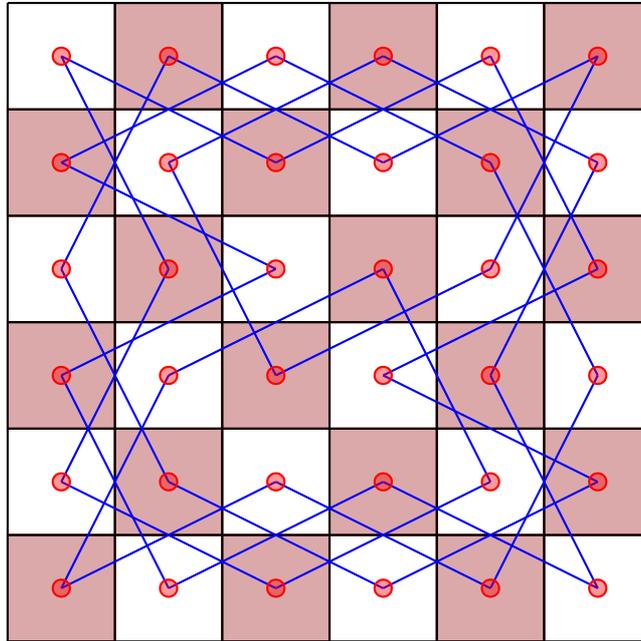




43. Des circuits hamiltoniens sont donnés dans ce paragraphe, l'un dans un rectangle 6×5 :



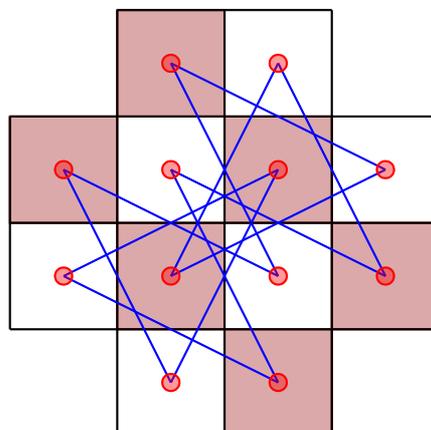
et l'autre dans un échiquier de $6 \times 6 = 36$ cases :



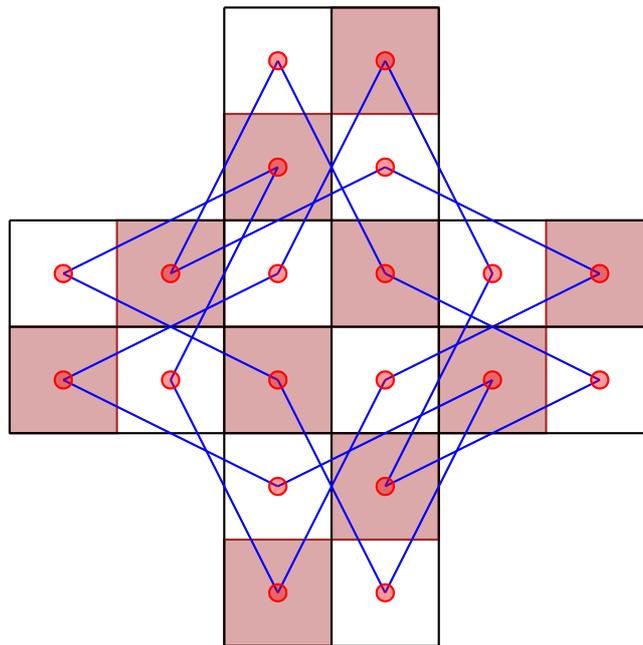
On remarque qu'il est symétrique par rapport au centre de l'échiquier !

44. On passe ensuite aux échiquiers non rectangulaires (cruciformes). Euler donne les exemples les plus simples qu'il aie trouvés, mais ce sont des circuits hamiltoniens symétriques par rapport au centre de l'échiquier :

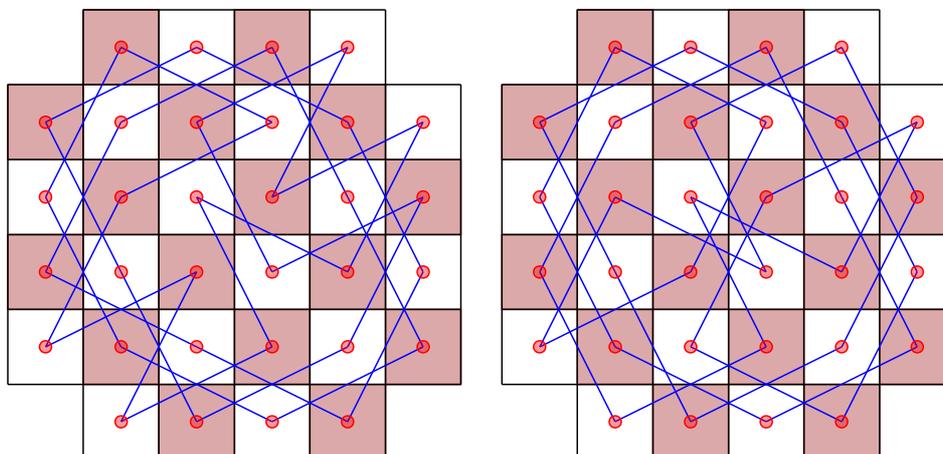
12 cases :



20 cases :



et deux de 32 cases¹¹ :



Les transformées de graphes sont faites de manière « intelligente » et ne mènent pas directement à des algorithmes rigoureux. Mais la démarche algorithmique est présente chez Euler dans cet article, et il n'est pas impossible de traduire en algorithmes plus rigoureux ladite démarche.



11 Le second comporte 3 coquilles : 7 au lieu de 17 en e1, 17 au lieu de 11 en d2 et 10 au lieu de 28 en d3