QUELQUES ASPECTS DE LA THÉORIE DES PARALLÈLES DANS LA GÉOMÉTRIE ARABE[1]

Khalil JAOUICHE

La théorie des parallèles se ramène, historiquement, à l'étude des tentatives qui ont été faites pour démontrer le cinquième postulat d'Euclide : par un point en dehors d'une droite, on peut mener une et une seule parallèle à la droite, dans le plan formé par le point et la droite. Mais ce n'est pas sous cette forme qu'Euclide l'a énoncé dans ses *Éléments* et l'on ne peut comprendre l'histoire des « démonstrations » de ce postulat si on ne garde présente à l'esprit la formulation même d'Euclide (fig. 1) : « si une droite qui coupe deux droites fait les angles intérieurs situés du même côté de la droite plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits ».

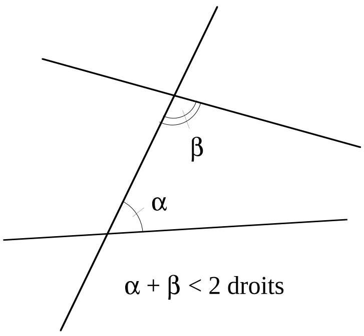

FIG. 1

La première proposition des *Éléments* où ce postulat intervient est la proposition 29 : « Une droite qui coupe deux droites parallèles fait les angles alternes égaux entre eux, l'angle extérieur égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté et les angles intérieurs placés du même côté égaux à deux droits ».

Dès le premier siècle avant J.-C., la validité du postulat d'Euclide était mise en doute par des auteurs comme Posidonius et Géminus. Ce dernier notamment faisait

[1] Ce texte a déjà été publié dans : *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, nº 20, Presses de l'Université de Nantes, 1987, p. 264-270. Il est republié ici avec l'aimable autorisation de M. J. Dhombres. Qu'il en soit remercié.

remarquer qu'il existait des lignes (l'hyperbole et ses asymptotes) qui peuvent se rapprocher indéfiniment sans jamais se rencontrer. Les Arabes reprirent les arguments avancés par leurs prédécesseurs hellénistiques pour mettre en doute la validité du postulat et s'appuyèrent notamment sur le fait que ce postulat n'était « ni clair ni évident ». Les efforts qu'ils ont déployés pour tenter de résoudre le problème et fonder la géométrie sur des principes certains s'étendent du IX^e^ au XIII^e^ siècle de notre ère. On ne peut évidemment examiner en détail toutes ces tentatives. Nous nous en tiendrons donc à certains aspects généraux de leurs théories.

Notre exposé comprendra quatre parties. Dans la première, nous indiquerons les deux tendances générales entre lesquelles on peut répartir l'ensemble des théories ainsi que les axiomes implicites qu'elles font intervenir. Dans la deuxième partie, nous évoquerons brièvement les principaux théorèmes et notions mathématiques qui s'en dégagent. Dans la troisième, nous tracerons une esquisse des principales tendances de la philosophie des mathématiques à l'œuvre dans ces théories. Enfin, dans la quatrième, nous relèverons les rares échos que ces théories semblent avoir eus en Occident du XVI^e^ au XVIII^e^ siècle.

Les théories des parallèles chez les Arabes peuvent être réparties en deux catégories : celles dont le but explicite et immédiat est de démontrer le cinquième postulat pour s'en servir dans la démonstration de la proposition 29 des *Éléments*, et celles qui tentent de lui en substituer un autre « plus clair et plus évident » afin de démontrer cette proposition sans recourir au postulat. Les auteurs de ces dernières théories n'en sacrifieront pas moins à la coutume en donnant ensuite une démonstration du cinquième postulat devenu alors logiquement inutile. Il va de soi que ces démonstrations reposent toutes sur l'introduction de postulats équivalents au cinquième postulat d'Euclide.

Le premier mathématicien qui ait essayé d'introduire un autre postulat que celui d'Euclide est Aganis, auteur que la plupart des critiques contemporains identifient à Géminus – mathématicien et astronome du I^er^ siècle avant J.-C. et élève de Posidonius. Il définit les droites parallèles comme étant des droites équidistantes, alors que pour Euclide, les parallèles sont des droites qui ne se rencontrent d'aucun des deux côtés aussi loin qu'on les prolonge (*Éléments*, Livre I, déf. 23). Pour Aganis, la distance entre deux droites est la plus courte des droites qui les coupent et il démontre que cette dernière est la perpendiculaire commune. Cette définition des parallèles est évidemment équivalent au postulat d'Euclide et c'est elle qui permet la démonstration de la proposition 29. Aganis donne ensuite une démonstration du cinquième postulat.

Après Aganis, c'est Ṯābit ibn Qurra (836-901) qui essayera, dans les deux opuscules qu'il a écrits sur ce problème, de démontrer la proposition 29 sans recourir au postulat.

Dans le premier opuscule, intitulé : *Sur la démonstration du célèbre postulat*, ibn Qurra définit les parallèles comme des droites qui ne se rapprochent ni ne s'éloignent l'une de l'autre. Il n'utilise d'ailleurs jamais le mot « parallèle ». De plus, il introduit le postulat suivant : si une sécante coupe deux droites et que celles-ci se rapprochent l'une de l'autre d'un de leurs côtés, alors elles s'écartent l'une de l'autre de l'autre côté et leur rapprochement du côté où elles se rapprochent l'une de l'autre et leur écartement du côté où elles s'écartent vont en croissant. C'est à l'aide de ce postulat et de la définition des parallèles que nous venons de rappeler que Ṯābit ibn Qurra démontre la proposition 29 d'Euclide. Il donne enfin, dans la proposition 5 de son opuscule, une démonstration du postulat.

Dans son deuxième opuscule, intitulé : *Sur le fait que si deux droites sont menées suivant deux angles moindres que deux angles droits, elles se rencontrent*, ibn Qurra élabore une théorie des parallèles qui est, en fait, une théorie du quadrilatère. Il ne prononce d'ailleurs qu'une seule fois le mot « parallèle » et substitue à la notion de droites parallèles celle de droites équidistantes, ainsi que l'avait fait Aganis. Mais il introduit un postulat important sur lequel nous reviendrons plus loin et aux termes duquel tous les points d'un solide qui se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme décrivent des droites. C'est à l'aide de ce postulat et de quelques propositions sur les propriétés du quadrilatère qu'ibn Qurra démontre la proposition 29 d'Euclide. Il donne ensuite une démonstration du cinquième postulat.

Ibn al-Hayṯam (965-1039), quant à lui, a consacré, comme ibn Qurra, deux opuscules à la théorie des parallèles. C'est dans le second qu'il démontre la proposition 29 sans recourir au cinquième postulat. Celui qu'il lui substitue est le suivant : « deux droites qui se coupent ne peuvent être parallèles à une même troisième ». Mais dans ce texte qui souffre d'une certaine confusion dans l'exposé des théorèmes, ibn al-Hayṯam propose d'inverser l'ordre des propositions d'Euclide et de faire précéder les propositions 27, 28 par la proposition 29 (réciproque de 27, 28). Dans ce cas, la proposition 29 serait démontrée par le postulat d'Euclide.

La théorie d'al-Ḫayyām (1045-1130), comme celle de Ṯābit ibn Qurra, est essentiellement une théorie du quadrilatère. Dans son livre sur *L'explication des postulats problématiques d'Euclide*, la démonstration de la proposition 29 – dont il dit explicitement qu'elle peut être faite sans le recours au cinquième postulat – fait intervenir les propriétés du quadrilatère et le postulat suivant : deux droites qui se coupent s'écartent l'une de l'autre et deux droites qui se rapprochent l'une de l'autre se coupent. Al-Ḫayyām démontre ensuite, comme ses prédécesseurs, le cinquième postulat à l'aide des propositions préalablement établies.

La théorie de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (1201-1274), exposée dans son *Opuscule qui délivre des doutes concernant les droites parallèles*, est également, comme celle d'al-Ḫayyām, une théorie du quadrilatère. Mais la proposition 29 se présente dans sa théorie sous une forme quelque peu modifiée : les deux parallèles coupées par une sécante sont, par hypothèse, perpendiculaires à une même droite, c'est-à-dire qu'elles sont des droites équidistantes. Cette définition du parallélisme étant, comme nous l'avons rappelé, équivalente au postulat d'Euclide, la démonstration de la proposition 29 peut alors se faire sans le recours à ce postulat.

Tels sont les principaux représentants de la tendance qui consiste à démontrer la proposition 29 sans recourir au cinquième postulat.

L'autre tendance, qui consiste à « démontrer » d'abord le postulat et à s'en servir ensuite pour démontrer la proposition 29, est principalement représentée par al-Ǧauharī (fin du VIII^{e} et première moitié du IX^{e} siècle). Dans son ouvrage *Sur la théorie des parallèles*, qui nous a été transmis par aṭ-Ṭūsī, al-Ǧauharī ne donne pas de définition explicite des parallèles mais quand il veut démontrer, dans l'une de ses propositions, que des droites sont parallèles, il démontre qu'elles ne se rencontrent pas. C'est donc bien à la définition donnée par Euclide qu'il se rallie implicitement. Sa théorie est essentiellement une théorie, non pas du quadrilatère, mais du triangle. Elle frappe par son originalité et certaines de ses propositions sont particulièrement intéressantes, notamment celle qui concerne l'existence du triangle. Voulant démontrer directement le cinquième postulat, al-Ǧauharī ne pose aucun postulat explicite et ne se sert, à notre avis, d'aucun postulat implicite. S'il est effectivement parvenu à démontrer le postulat, ce n'est pas parce qu'il lui a substitué un postulat équivalent, c'est parce qu'il s'est trompé dans la démonstration de sa deuxième proposition, à savoir : les droites qui joignent les extrémités de deux droites égales et parallèles sont égales et parallèles. Pour pouvoir démontrer cette proposition, il lui eût fallu démontrer dans sa première proposition que si une sécante qui coupe deux droites détermine des angles alternes égaux, alors toute autre sécante qui coupe ces deux droites déterminera également des angles alternes égaux. Or, comme le lui reprochera aṭ-Ṭūsī, al-Ǧauharī ne l'a pas fait. Et c'est sa deuxième proposition, faussement démontrée, qui lui permettra de démontrer une proposition équivalente au postulat d'Euclide, à savoir : par un point pris à l'intérieur d'un angle, on peut mener une droite qui coupe les deux côtés de l'angle, autrement dit : on peut construire un triangle. Finalement, al-Ǧauharī démontre le postulat d'Euclide à l'aide de cette proposition sur la possibilité de construire un triangle.

Les quelques tentatives que nous venons d'évoquer et dont le but était d'assurer à la théorie des parallèles une base certaine étaient évidemment vouées à l'échec. Elles n'en ont pas moins servi à établir quelques théorèmes et à forger des types de raisonnement d'une importance toute particulière et dont certains seront repris au cours des XVI^{e}, XVII^{e} et XVIII^{e} siècles.

Parmi les théorèmes les plus importants élaborés au cours de ces tentatives, il faut certainement placer ceux qui ont trait aux propriétés du quadrilatère et, plus précisément, du parallélogramme rectangle. Comme nous l'avons fait observer plus haut, la théorie des parallèles a pris, en effet, chez la plupart des mathématiciens la forme d'une théorie du parallélogramme, ce qui n'a rien d'étonnant puisque, pour la plupart d'entre eux, les droites parallèles étaient des droites équidistantes.

C'est avec l'opuscule de Ṯābit ibn Qurra *Sur le fait que si deux droites sont menées suivant deux angles moindres que deux angles droits, elles se rencontrent*, que nous voyons apparaître les premières considérations importantes sur les propriétés du rectangle. Il s'agit d'abord de démontrer (fig. 2) que si dans un quadrilatère deux angles adjacents à un même côté sont égaux ($\angle A = \angle D$) et si les deux autres côtés de ces angles sont égaux (AB = DG), alors les deux autres angles du quadrilatère sont égaux ($\angle G = \angle B$). Le théorème suivant reviendra à démontrer que si les deux angles à la base sont droits, les deux autres angles le sont aussi.

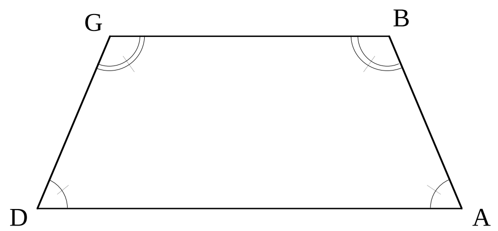

FIG. 2

C'est ce dernier théorème qui inaugure une phase importante de la théorie des parallèles. Avec ibn al-Hayṯam d'abord, mais surtout avec ʿUmar al-Ḫayyām, la démonstration de cette proposition fera l'objet d'un type de raisonnement qui sera repris par les géomètres occidentaux et deviendra classique au XVIIIe siècle. Pour démontrer que si, dans un parallélogramme, les deux angles à la base sont droits, les deux autres le sont aussi, ibn al-Hayṯam d'abord et ʿUmar al-Ḫayyām ensuite démontrent qu'ils ne peuvent être ni aigus ni obtus. Ce sont là les fameuses trois hypothèses – angles droits, aigus ou obtus – qui caractérisent le quadrilatère appelé par une injustice ou une ignorance de l'histoire « le quadrilatère de Saccheri ». C'est Saccheri en effet qui reprendra ce type de démonstration au XVIIIe siècle dans son ouvrage paru en 1733 : *Euclides ab omni naevo vindicatus*.

L'autre forme prise par la théorie des parallèles chez les mathématiciens de l'Islam est celle d'une théorie du triangle. C'est celle qu'adopte al-Ǧauharī. Après avoir démontré quelques propriétés du triangle et notamment que la droite qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième, al-Ǧauharī démontre la proposition à laquelle nous avons fait allusion plus haut et qui concerne la possibilité de construire un triangle à partir d'un point situé à l'intérieur d'un angle.

Signalons enfin, en ce qui concerne les deux formes de la théorie des parallèles chez les Arabes, qu'elles sont déterminées par le but même que se sont assignés les mathématiciens qui ont traité de cette théorie. Il était naturel que ceux qui s'étaient donnés pour objectif de démontrer la proposition 29 sans recourir au cinquième postulat élaborent une théorie du rectangle. Nous avons vu en effet que ceux-ci avaient adopté l'équidistance comme définition des parallèles. Il suffisait donc de tracer deux « distances » entre deux droites équidistantes pour construire un rectangle. Tandis qu'al-Ǧauharī, qui voulait démontrer d'abord le cinquième postulat pour démontrer ensuite la proposition 29, devait être amené à élaborer une théorie du triangle. Le cinquième postulat, sous la forme que lui a donnée Euclide, n'est, après tout, que la réciproque de la proposition selon laquelle la somme de deux angles d'un triangle est inférieure à deux angles droits.

Pour ce qui est des axiomes utilisés par les géomètres arabes dans les démonstrations, nous signalerons les deux suivants, fréquemment utilisés et qui se conjuguent souvent dans les démonstrations.

Il s'agit d'abord d'un axiome de continuité, qui est un axiome de mesure, à savoir l'axiome d'Eudoxe-Archimède, appliqué bien sûr à des grandeurs représentées par des segments et non à des nombres.

Le second est un axiome d'ordre non linéaire, qui portera à la fin du XIXᵉ siècle le nom d'axiome de Pasch, mais dont l'origine est très probablement hellénistique. Il s'énonce ainsi (fig. 3) : soient A, B, C trois points non alignés et *a* une droite du plan ABC qui ne passe par aucun des points A, B, C ; si la droite *a* passe par l'un des points du segment AB, elle passe ou par un point du segment BC ou par un point du segment AC (Hilbert, *Fondements de la géométrie*, trad. Rossier, Paris, Dunod, 1971).

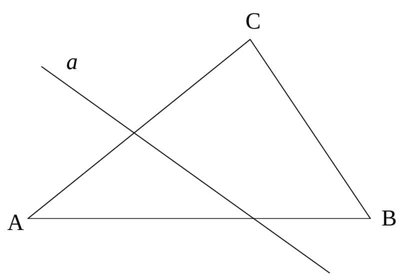

FIG. 3

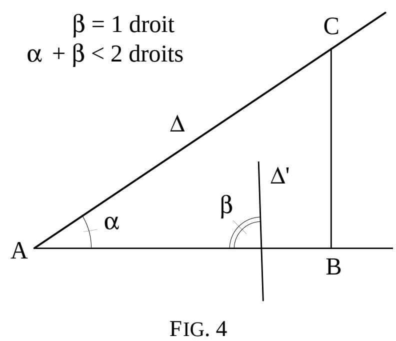

FIG. 4

Toutefois, cet axiome n'est pas utilisé sous cette forme générale par les géomètres de l'Islam. Le triangle que coupe la sécante est, chez eux, un triangle rectangle construit à l'aide de l'axiome d'Eudoxe-Archimède. Expliquons-nous brièvement. Pour démontrer le postulat d'Euclide, la plupart des géomètres arabes l'ont d'abord démontré dans un cas particulier, à savoir celui où l'un des angles formés par la sécante AB et les deux droites Δ, Δ' est un angle droit, les autres cas étant ramenés à celui-ci (fig. 4). Et pour démontrer que Δ et Δ' se rencontrent, il suffisait de prolonger la droite Δ et d'affirmer que, en vertu de l'axiome d'Archimède, il existait sur Δ un point C tel que la perpendiculaire abaissée de C sur AB tombait au delà de Δ' du côté de B. On obtenait ainsi un triangle et l'on pouvait alors appliquer l'axiome de Pasch. La droite Δ' étant parallèle au côté CB ne pouvait le couper. Elle coupait donc nécessairement la droite Δ.

C'est également à l'aide d'un type de raisonnement semblable à celui que nous venons d'indiquer qu'al-Ǧauharī a démontré son fameux théorème sur la construction du triangle.

On peut également relever à certains endroits l'utilisation de certains axiomes d'ordre linéaire entre les différents points d'un segment mais nous n'y insisterons pas ici.

Nous relèverons enfin l'introduction en géométrie d'un nouveau type de problèmes qui ne semble pas avoir été abordé dans l'Antiquité : c'est celui de la non-déformation des figures au cours de leur déplacement. À notre connaissance, c'est Ṯābit ibn Qurra qui est le premier à le poser au début de son second opuscule sur la théorie des parallèles. Cet opuscule commence par une description de la géométrie considérée essentiellement comme une science de la mesure. Comme celle-ci s'effectue par une application des figures les unes sur les autres, ibn Qurra est amené à se demander comment on peut s'assurer qu'elles n'ont pas été déformées au cours de leur déplacement.

Ibn Qurra résout le problème grâce à une méthode intuitive où la mécanique détermine les propriétés géométriques de l'espace. Il imagine un modèle mécanique constitué par un solide animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Chaque point de ce solide tracera donc une ligne droite. Il imagine de plus que ce solide contient « l'image tracée » de la ligne ou de l'angle dont il veut étudier le déplacement. La démonstration d'ibn Qurra – il s'agit de démontrer, dans la première proposition, l'égalité de certains angles ou de certains segments – aura pour objet les lignes et les angles qu'il a imaginés dans le solide et non ceux qui sont donnés dans la figure, si l'on peut dire, réelle. Un examen quelque peu attentif des différentes lignes qu'ibn Qurra considère dans ce solide nous amène à croire que chez lui la conservation des angles est implicitement admise et que c'est la conservation des angles qui assure en définitive la conservation des segments. Il reste qu'un tel modèle suppose la non-déformation des solides et on ne voit pas au nom de quoi ibn Qurra admet que ces derniers ne sont pas déformables.

Signalons enfin que c'est au cours d'une critique adressée par aṭ-Ṭūsī à la théorie d''Umar al-Ḫayyām qu'on trouve énoncée pour la première fois à notre connaissance la condition de validité de ce que nous appelons le théorème des valeurs intermédiaires, à savoir la continuité de la fonction sur tout l'intervalle où elle est définie, bornes comprises. Bien sûr, aṭ-Ṭūsī ne l'énonce pas en termes aussi nets, mais il signale qu'il existe des cas où la grandeur qui varie peut prendre des valeurs discontinues. Il cite, à tort selon nous, l'exemple de la proposition 31 du livre III des

Éléments, dans laquelle Euclide démontre que l'angle d'un segment de cercle plus grand qu'un demi-cercle est plus grand qu'un angle droit alors que l'angle d'un segment plus petit qu'un demi-cercle est plus petit qu'un angle droit (fig. 5). Et aṭ-Ṭūsī de conclure que ces angles ne sont jamais égaux à un droit.

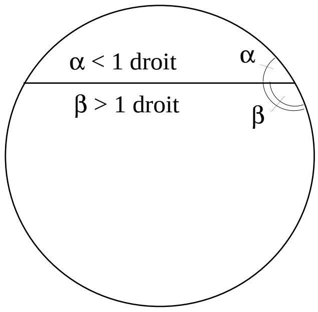

FIG. 5

Telles sont certaines des propositions les plus importantes établies par les géomètres arabo-islamiques au cours de leurs tentatives pour démontrer le cinquième postulat et fonder la théorie des parallèles sur des bases certaines. Mais en dehors de ces aspects purement techniques, il se dégage de ces théories un certain nombre de tendances philosophiques concernant les mathématiques dont nous évoquerons brièvement les plus importantes.

Le premier problème auquel les géomètres se sont heurtés dès l'époque hellénistique est celui de l'infini en mathématiques. L'univers aristotélicien étant limité et sphérique, il s'agissait de savoir quel sens il convenait de donner à une expression qui figurait dans l'énoncé même du cinquième postulat d'Euclide : « … si on les prolonge [les droites] indéfiniment… ». On connaît la boutade attribuée à Archytas : si j'enfonce ma canne à la limite de l'univers, que se passera-t-il de l'autre côté de la limite ? C'est dire à quel point, dès l'Antiquité, la géométrie était solidaire des structures cosmologiques.

Celui qui a explicitement posé le problème et essayé de le résoudre est ibn al-Hayṯam. Il rejette tout recours à la notion d'infini en disant que seul le fini peut faire l'objet d'une représentation et que l'esprit humain est incapable de concevoir l'infini. Nul ne sait ce qui se passe à l'infini ni comment deux droites peuvent s'y rencontrer. À la notion de droite prolongée à l'infini, ibn al-Hayṯam substitue la notion de droite construite à l'aide de segments finis que l'on ajoute bout à bout autant de fois qu'il le faudra.

Cette attitude d'ibn al-Hayṯam s'intègre d'ailleurs fort bien dans sa philosophie générale des mathématiques. Ibn al-Hayṯam est en effet un intuitionniste convaincu. Cela, non pas seulement dans le sens que l'intuition nous guide pour trouver la solution d'un problème, mais également et surtout dans le sens que seul ce qui nous est donné dans l'intuition – au sens kantien du terme –, seul ce que nous pouvons nous représenter dans l'imagination existe en mathématiques.

À cette attitude intuitionniste on peut opposer ce que nous pourrions appeler l'attitude formaliste d'un Ṭūsī et surtout d'un ʿUmar al-Ḫayyām. Ces deux derniers, en effet, se soucient fort peu de savoir si les notions mathématiques qu'ils utilisent sont ou ne sont pas représentables dans l'imagination. Seule compte pour eux la rigueur de la déduction à partir d'un certain nombre d'axiomes. ʿUmar al-Ḫayyām a même été jusqu'à déclarer, au début de son ouvrage, que le nombre d'axiomes et de postulats donnés par Euclide au début des *Éléments* était insuffisant et qu'il fallait en ajouter d'autres, comme par exemple : les grandeurs se divisent à l'infini et ne sont pas composées d'indivisibles ; ou encore : deux droites qui se coupent s'écartent l'une de l'autre à partir de leur point d'intersection. Ce formalisme n'empêchera d'ailleurs pas ʿUmar al-Ḫayyām de recourir à des démonstrations intuitives qu'il appelle des « quasi-démonstrations » comme une aide pour trouver des démonstrations rigoureuses.

Disons enfin un mot de l'usage du mouvement en géométrie. On sait que pour Aristote les êtres mathématiques sont immuables, c'est-à-dire qu'ils ne changent pas. Un triangle ne peut se transformer de lui-même et devenir autre chose qu'un triangle. En termes aristotéliciens, les êtres mathématiques ne peuvent être affectés par le mouvement, au sens non pas de mouvement local, mais au sens de changement d'état, d'altération. Certains mathématiciens, ceux que nous avons appelés « formalistes », interpréteront d'une façon très large cette notion d'immuabilité et interdiront l'usage du mouvement – c'est-à-dire le déplacement des figures – en géométrie. Ainsi l'empiriste ibn al-Hayṯam aura droit à tous leurs sarcasmes parce qu'il se sera servi, pour tracer une droite, de l'extrémité d'une perpendiculaire qui se déplace le long de la droite à laquelle elle est perpendiculaire.

Ces théories des parallèles ont-elles eu un écho en Occident à l'époque de la Renaissance ?

Observons tout d'abord qu'il n'existe dans l'Occident latin aucune trace de la discussion du cinquième postulat d'Euclide avant le XVIe siècle. Dans son ouvrage sur la géométrie non-euclidienne, Roberto Bonola fait remarquer que c'est à la suite de la publication du *Commentaire* de Proclus dans sa langue originale à Bâle en 1533 et ensuite dans sa traduction latine à Padoue en 1560 qu'apparaissent les premières discussions du cinquième postulat d'Euclide avec Clavius (1537-1612), Cataldi (1548?-1626) et Borelli (1608-1679). Dans le bref aperçu de leurs théories que donne Bonola, il n'existe aucune référence aux auteurs arabes. Mais les postulats que ces mathématiciens substituent au cinquième postulat sont ceux qu'avaient énoncés les auteurs arabes. Le cas le plus frappant est celui de Borelli qui donne un moyen de construire une droite parallèle qui est exactement le même que celui qu'avait donné ibn al-Hayṯam. La probabilité pour que deux auteurs, à six siècles d'intervalle, énoncent, indépendamment l'un de l'autre, deux propositions rigoureusement identiques, composée chacune de plus de cinquante mots, est quasiment nulle. Il est difficile dans ce cas de ne pas accuser le second de plagiat.

La seule référence aux auteurs arabes se trouve dans l'ouvrage *De postulato quinto* de Wallis, publié à Oxford en 1693, dans ses *Omnia opera mathematica*. Wallis y rapporte une démonstration de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī d'après un texte considéré aujourd'hui comme apocryphe et traduit de l'arabe en latin par Pocock.

Saccheri rappellera ce texte de Ṭūsī, pour le critiquer, dans son *Euclides ab omni naevo vindicatus*. Mais ses quatre premières propositions sont identiques à celles d'al-Ḫayyām, qu'il ne cite pas.

En bref, en dehors de ce texte apocryphe de Ṭūsī, il n'existe, à notre connaissance, aucun document permettant d'affirmer qu'il y a eu transmission des théories arabes en Occident aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles. Seule la notion de probabilité nous permet de dire que des ressemblances poussées aussi loin ne peuvent être fortuites.