L'APPORT DE L'INDE AUX MATHÉMATIQUES ARABES

Khalil JAOUICHE

Remarque préliminaire : Nous avons très peu utilisé dans les pages qui suivent les signes de translittération des mots et des noms arabes. Ce texte n'étant pas exclusivement destiné à des spécialistes des mathématiques arabes, ils auraient inutilement surchargé l'écriture et compliqué la tâche de ceux qui étaient chargés de son impression.

L'étude des rapports entre les mathématiques arabes et indiennes se heurte à de nombreuses difficultés. Les premières sont d'ordre documentaire. Il n'existe en effet aucun ouvrage du Moyen-Âge arabe traitant de cette question. Le seul livre général écrit sur l'Inde par un auteur du monde arabo-musulman, celui d'al-Bīrūnī, écrit en 1030[1], consacre plusieurs pages à l'astronomie indienne, mais ne traite ni de l'arithmétique ni de l'algèbre. Les secondes difficultés tiennent à l'extrême complexité des rapports entre le monde arabe et moyen-oriental d'une part, et l'Inde et la Chine d'autre part. Les travaux du colloque ont mis en lumière l'existence d'un ensemble culturel indo-chinois au sein duquel on peut relever des similitudes dans les méthodes de calcul, sans pour autant que l'on puisse établir une chronologie certaine entre ces méthodes. Se limiter à l'étude des rapports entre les mathématiques arabes et indiennes revient à exclure quelque peu ce que ces mathématiques doivent directement ou indirectement à la Chine.

Si l'on ajoute à ces difficultés l'existence d'une influence des mathématiques grecques depuis le troisième siècle avant l'ère chrétienne, au Proche-Orient sans doute, mais peut-être aussi en Inde et en Chine, les rapports entre les mathématiques arabes et indiennes apparaissent comme un îlot qu'on ne peut séparer qu'artificiellement des relations multiples et complexes qui vont de la Méditerranée à la mer de Chine, avec l'océan Indien pour carrefour, comme le rappelle justement le thème du colloque.

C'est pourtant à un tel découpage artificiel que nous allons procéder dans les lignes qui suivent. Seules en effet des études ponctuelles peuvent démêler progressivement l'écheveau de ces rapports complexes. Nous allons donc nous attacher ici à

[1] *Kitab tahqīq ma li-l-Hind min maqūlatin maqbūlatin fi l-'aql aw marzūlatin* (Enquête sur ce qui est dit en Inde de conforme ou de contraire à la raison).

l'étude de quelques chapitres des mathématiques arabes où l'influence de l'Inde est explicitement ou implicitement attestée.

*
* *

Que l'Inde ait joué un rôle prépondérant dans la formation de la culture islamique, dès l'apparition de celle-ci au VIIIe siècle de l'ère chrétienne, se voit au fait que la première grande œuvre classique de la littérature arabe – un livre de fables intitulé *Kalīlā wa Dimnā* – est la traduction, à partir du pehlévi, d'une œuvre indienne où les protagonistes sont deux animaux dont l'un représente l'hypocrisie et la cupidité et l'autre l'honnêteté et la sincérité, ce dernier finissant évidemment par l'emporter sur l'autre.

Mais c'est avec l'astronomie que la science indienne pénètre tout d'abord dans le monde arabe. En 782, à la suite de la visite à la cour de Baghdad d'un grand astronome indien, le calife al-Mansour (754-775) charge al-Fazārī de traduire en arabe les tables astronomiques du *Sidhanta*. Cette traduction, dont il ne nous reste que des fragments[2] est connue en arabe sous le nom de *as-Sindhind al-Kabīr*. Alors qu'al-Kabīr signifie le « grand », le mot *sindhind* veut dire en indien, selon la chronique d'ibn al-Qifti, *ad-dahr ad-dāhir*[3], expression équivalente à notre « dans les siècles des siècles ». Selon Pingree, qui étudia ces fragments[4], ces derniers contiennent des problèmes traités par l'astronomie grecque. Comme l'*Almageste* de Ptolémée ne sera traduit en arabe qu'à l'époque d'al-Ma'moun (812-833), nous avons là un exemple de la complexité des rapports entre les cultures de cette époque puisque c'est par les Indiens que des éléments de l'astronomie grecque seraient d'abord passés au Proche-Orient.

L'astronomie indienne devait de nouveau faire son apparition au Proche-Orient, mais cette fois sous la plume du premier grand mathématicien de l'Islam : Mohammad ibn Moussa al-Khwarizmī. Originaire du Khwarizm, comme son nom l'indique, région située au sud de la mer d'Aral, il fut l'un des savants les plus actifs et les plus célèbres de la « Maison de la Sagesse » à Baghdad. Cette institution, fondée par al-Ma'moun, fonctionnait à l'instar d'un véritable centre de recherches où se côtoyaient ce que Baghdad comptait de plus brillants parmi les traducteurs et les savants. C'est là qu'al-Khwarizmī rédigea les deux versions du *zij as-Sindhind* (tables astronomiques) que lui attribue Ibn an-Nadīm[5]. Nous n'en possédons aujourd'hui que la traduction latine d'Adélard[6] de Bath, faite probablement selon la seconde

---

[2] F. Sezgin, *Geschichte des Arabischen Schriftums*, vol. VI, Leiden, 1978, p. 123.
[3] Ibn al-Qifti, *Ta'riḫ*, édition Lippert, Leipzig, 1903, p. 270.
[4] Sezgin, *ibid.*
[5] *Al-Fihrist*, édition Flügel, p. 274.
[6] Orthographié « Athélard » dans les ouvrages allemands.

version, révisée par Aboul-Qāsim al-Maghrīti (mort en 1007 de l'ère chrétienne)[7]. La première version de ce *zij* étant perdue, et ne possédant que des fragments des tables d'al-Fazārī, il nous est difficile de savoir quelles sont les véritables sources d'al-Khwarizmī. Il semble que ses sources indiennes soient les *Brahma-Siddhanta* de Brahmagupta (1re moitié du VIIe siècle après J.-C.) et les *Surya-Siddhanta* sur lesquels sont fondées les *zij as-Shah*, traduites du persan en arabe au VIIIe siècle après J.-C. Mais comme le texte d'al-Khwarizmī le montre, il faut ajouter à ces sources l'influence de l'*Almageste* de Ptolémée ainsi que les résultats des observations faites par les astronomes de la « Maison de la Sagesse ». Sur le plan mathématique, l'usage des *lignes* trigonométriques : sinus, cosinus, tangente et cotangente est courant dans le texte[8].

*
* *

C'est à al-Khwarizmī que l'on doit également le second ouvrage dans lequel l'influence indienne est manifeste. Il s'agit de son livre sur l'arithmétique, qu'il emprunte explicitement à l'Inde. Le titre exact de l'ouvrage demeure inconnu, aussi bien dans l'original arabe, aujourd'hui perdu, que dans les traductions ou versions latines du XIIe siècle qui nous en sont parvenues et dont M. Allard a fait une remarquable édition critique, accompagnée d'une traduction française[9].

L'importance de cet ouvrage pour l'histoire des mathématiques, tant en Orient qu'en Occident, ne saurait être sous-estimée. C'est lui qui a donné à la numération décimale la place éminente qu'elle occupera désormais dans le bassin méditerranéen.

Rappelons pour l'anecdote qu'il débute par deux mots dont l'un connaîtra une fortune exceptionnelle dans l'histoire des mathématiques et, aujourd'hui, en informatique : « Dixit Algorizmi » (Al-Khwarizmī a dit). C'est l'origine de notre « algorithme » utilisé pour désigner toute recette opératoire dans un calcul donné[10].

L'ouvrage a un double objet. D'abord, d'exposer le système de numération des Indiens qui « utilisent 9 lettres pour tous leurs nombres grâce à une disposition qui leur est propre »[11]. Il s'agit d'un exposé du système décimal, où, comme chacun sait, chacun des neuf chiffres qui le composent, désigné par une « lettre », a une valeur particulière selon la position qu'il occupe : celle des unités, dizaines, centaines, milliers, dizaine de milliers, etc.

---

7 H. Suter, *Die Astronomischen Tafeln des Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi*, réédité par l'Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften, Francfort, 1986, *in* Suter, vol. 1, p. 473 *sqq*.

8 Voir, pour l'ensemble de cette question, Suter, *ibid.*, ainsi que F. Sezgin, *op. cit.*, vol. VI, p. 141-143.

9 A. Allard, *Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, Le calcul indien*, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1992.

10 *Le calcul indien*, *ibid.*, p. 1. C'est par ce titre que nous renverrons dans les notes qui suivent à l'édition et à la traduction de M. Allard.

11 *Ibid.*, p. 1-6.

C'est dans son exposé des propriétés du système décimal qu'al-Khwarizmī décrit l'origine de ce qui deviendra notre « zéro ». On y constatera que pas plus les Arabes que les Indiens ou les Chinois n'ont « inventé » le zéro. Tel que nous le concevons aujourd'hui, il est le fruit d'une longue évolution qui a pris fin au XIXe siècle avec la publication, en 1889, par Giuseppe Peano, de ses *Arithmetices principia nova methodo exposita*, qui comprenaient ses fameux axiomes. Le premier d'entre eux affirme : « zéro est un nombre »[12].

Une telle conception eût profondément choqué tout autant al-Khwarizmī que ses prédécesseurs indiens et chinois. Non seulement leur était-elle étrangère, mais de plus ils n'avaient *aucun mot* pour exprimer ce que *nous* appelons « zéro ». C'est pourquoi, nous pensons que l'utilisation de ce mot par M. Allard tout au long de sa remarquable traduction est malencontreuse. Le mot « zéro », pour un lecteur moderne, véhicule le concept d'un nombre qui jouit de certaines propriétés définies par les règles auxquelles il est soumis dans le calcul. Il n'est ni positif, ni négatif ; il est plus petit que tous les réels positifs et plus grand que tous les réels négatifs, etc. Autant de notions complètement étrangères aux Arabes, aux Indiens et, sans doute, aux Chinois. Le zéro est pour nous un objet mathématique qui existe réellement alors qu'il est, dans le texte d'al-Khwarizmī, comme nous allons le voir immédiatement, un pur non-être, un « vide ». C'est la raison pour laquelle, dans les lignes que nous allons citer de la traduction de M. Allard, nous avons remplacé le mot « zéro » par le mot « rond », traduction littérale du latin « circulus »[13].

Dès le début de son ouvrage, al-Khwarizmī rappelle, à juste titre, « qu'il n'y a en aucune position plus de 9 ni moins que 1, *à moins qu'il y ait un rond, qui n'est rien* »[14]. Le système décimal ne peut en effet comprendre que neuf chiffres. De plus, nous l'avons dit, al-Khwarizmī dit clairement que la valeur d'un chiffre dépend de la place qu'il occupe dans le nombre, en comptant les positions à partir de la droite (unités, dizaines, centaines…). La première difficulté qui se pose dans ce système est l'écriture du nombre 10 – et ensuite des dizaines – qui ne peut donc être désigné par une seule « lettre » (chiffre). On ne peut donc le désigner que par un 1 placé dans la position des dizaines. Mais comment indiquer qu'il s'agit de cette position, dans une écriture qui ne *trace pas de colonnes* pour indiquer les positions ? Al-Khwarizmī nous le dit[15] : « … une représentation des dizaines a été pour eux [les Indiens] nécessaire puisqu'elle était semblable à la représentation de un, afin que l'on sache par elle qu'il s'agissait de 10. Ils ont donc posé devant celle-ci une position et posé en elle un petit rond en ressemblance avec *la lettre O pour savoir par là que la position des*

[12] Cf. Carl Boyer, *A History of Mathematics*, Princeton University Press, Wiley & Sons, 1968, p. 645.

[13] « *Circulus* » est sans doute la traduction latine de l'arabe *dā'ira*. Or, ce mot, en arabe, signifie aussi bien « cercle » que « rond ». Mais al- Khwarizmī ne se réfère manifestement pas à la figure géométrique mais, comme il le dit explicitement quelques lignes plus loin, à un signe qui « ressemble à la lettre O ».

[14] *Le calcul indien*, p. 6 ; c'est nous qui soulignons.

[15] *Ibid.*, p. 3.

unités était vide[16], qu'il n'y avait en elle rien d'un nombre sinon ce petit rond dont nous avons dit qu'il l'occupait, et pour montrer que le nombre qui occupait la position suivante était une dizaine… ». Le même problème se pose évidemment quand il s'agit d'écrire un nombre dont l'une des positions « ne contient rien ». Alors « tu poseras un rond pour que la position ne soit pas vide, mais qu'il y ait en elle un rond qui l'occupe, de peur que lorsqu'elle est vide on ne réduise les positions et que l'on croie que la seconde est la première, et qu'ainsi tu te trouves trompé dans ton nombre »[17]. Si, par exemple, on veut écrire en chiffres le nombre deux cent quatre, il suffit théoriquement d'écrire un 4 et, un peu plus loin, sur la gauche, un 2. Mais on pourrait lire vingt quatre et non deux cent quatre. Alors, *par précaution*, on met un « rond » entre le 4 et le 2 pour bien indiquer que ce dernier occupe la position des centaines.

Certes, le mot « ciffre », dont dérive étymologiquement le mot « zéro » – ainsi que le mot « chiffre » – n'est pas totalement absent du *Calcul indien*. Il y figure au moins une fois avec ses *deux* symboles possibles. « Ils [les Indiens] utilisent aussi, dit al-Khwarizmī, le sifr de cette manière O et $\boldsymbol{\tau}$ »[18]. Mais le mot *sifr*, traduit en latin par « ciffre » signifie en arabe « vide », « exempt de », comme l'a justement fait remarquer M. Ifrah[19], en précisant qu'il s'agissait de la traduction arabe du sanscrit « sunya », qui a le même sens. Et M. Ifrah, citant M. Taton[20], rappelle « qu'au XIIIe siècle, en France, le langage populaire qualifiait un homme dépourvu de valeur de *Cyfre d'angorisme* ou encore de *Cifre en algorisme* »[21].

Est-il étonnant après cela que les Indiens aient déduit intuitivement que le résultat de la multiplication d'un « rond qui signifie rien » (*circulus nihil significans*)[22] par un nombre soit rien ? « … tout rond qui est multiplié par un nombre quelconque, écrit al-Khwarizmī[23], n'est rien, c'est-à-dire qu'aucun nombre ne résulte de lui, que tout ce qui est multiplié par un rond n'est de même rien… » Écrire, comme on le fait habituellement, que les Indiens, les Arabes ou les Chinois savaient que la multiplication d'un nombre quelconque par zéro était égale à zéro[24], c'est occulter la représentation, la conception que ces peuples se faisaient d'une telle opération et lui substituer une conception qui ne sera établie que beaucoup plus tard.

Le deuxième objet du *Calcul indien* est d'exposer les méthodes de calcul des opérations élémentaires de l'arithmétique : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'extraction des racines, la multiplication des fractions décimales et

16 C'est nous qui soulignons.
17 *Ibid.*, p. 7.
18 *Op. cit.* ; M. Allard a traduit par « zéro » comme pour « circulus ».
19 *Histoire universelle des chiffres,* Seghers, Paris, 1981 (première édition), p. 509.
20 R. Taton, *Histoire du calcul,* Coll. « Que sais-je ? », P.U.F., Paris, 1969.
21 Ifrah, *op. cit.*, p. 512.
22 *Le calcul indien*, p. 29.
23 *Ibid.*, p. 10.
24 Cf. par exemple, Youschkevitch, *Les mathématiques arabes,* Vrin, Paris, 1976, p. 18.

sexagésimales, la duplication[25] et la dimidiation[26]. Pour que le lecteur puisse avoir une idée des méthodes de calcul utilisées au Proche-Orient au moins à partir du IX[e] siècle – et bien après l'Inde – et de la forme sous laquelle elles passèrent en Occident à partir du XII[e] siècle, nous allons citer un exemple de multiplication donné par al-Khwarizmī[27].

Soit à multiplier 2326 par 214.

1) On écrit :

$$\begin{array}{l} 2326 \\ 214 \end{array}$$

le rang des unités du multiplicateur (4) étant placé sous le rang le plus élevé du multiplicande (2).

2) On multiplie le rang le plus élevé du multiplicande (2) par le multiplicateur, ou : $2 \times 214 = 428$.

3) On écrit ce produit à la gauche du multiplicande de telle sorte que les huit unités de 428 remplacent le 2 qui a déjà servi à la multiplication et on recule d'un rang le multiplicande. On a alors les deux lignes suivantes :

$$\begin{array}{l} 428326 \\ 214 \end{array}$$

4) C'est à présent le nombre 3 du multiplicande qui doit être multiplié par le multiplicateur, ou : $3 \times 214 = 642$.

5) On écrit ce dernier produit au-dessus du multiplicande de sorte que les deux unités de 642 se trouvent au dessus du 3 que l'on vient de multiplier par 214 ; on a donc les lignes suivantes :

$$\begin{array}{l} 642 \\ 428326 \\ 214 \end{array}$$

6) Les deux unités de 642 doivent remplacer le 3 qui est en dessous ; on additionne 64 et 28 et l'on recule d'un rang le multiplicateur ; on obtient donc :

$$\begin{array}{l} 492226 \\ 214 \end{array}$$

7) On multiplie le 2 qui suivait le 3 par 214 et on obtient les lignes suivantes :

$$\begin{array}{l} 428 \\ 492226 \\ 214 \end{array}$$

[25] Opération qui consiste à effectuer plus simplement une multiplication en écrivant le multiplicateur sous la forme d'une somme de puissances de 2 et à multiplier le multiplicande par chacune de ces puissances. Cf. M. Caveing, *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte ancienne*, Presses Universitaires de Lille, 1994, p. 251-253.

[26] Méthode de division inverse de la multiplication, utilisant les puissances successives de 1/2.

[27] *Le calcul indien, op. cit.*, p. 9-11. Les différentes étapes du calcul étant quelque peu difficiles à suivre dans le texte, nous allons les emprunter à A. Youschkevitch, *Les mathématiques arabes,* p. 19.

8) On refait la même opération que précédemment et on obtient les lignes suivantes :

496486
214

9) On multiplie enfin les six unités de la ligne supérieure – dernier chiffre du multiplicande initial – par 214 – soient 1284 – on refait la même opération que précédemment et l'on obtient les deux lignes suivantes :

497764
214

10) La ligne supérieure est le résultat de la multiplication.

Mais ce n'est pas seulement parce qu'il constitue un traité complet de calcul que *Le calcul indien* est intéressant sur le plan historique. On y trouve aussi de surprenantes réminiscences de la philosophie et de la géométrie grecques. C'est ainsi que l'on retrouve pêle-mêle[28] dans un passage concernant la multiplication des fractions sexagésimales et sous une forme passablement altérée, un rappel de quelques notions aristotéliciennes concernant l'unité comme principe du nombre, les différentes sortes de mouvements, les concepts de diminution et d'augmentation et enfin le *zij* de Ptolémée. Il est peu probable que ces notions aient été introduites dans *Le calcul indien* par al-Khwarizmī lui-même à partir de traductions contemporaines qui en auraient été faites par les traducteurs qui travaillaient à la Maison de la Sagesse. Celles-ci devaient présenter des textes cohérents et structurés alors qu'al-Khwarizmī cite, à la suite les unes des autres, des notions traitées par Aristote dans divers ouvrages et sans lien apparent entre elles. La traduction de l'œuvre de Ptolémée porte, dans les traductions arabes de cette époque, le titre d'*al-Majisti* et non de *zij*. Tout porte à croire qu'il s'agit là de reliquats de la philosophie et de la science grecques, passés en Inde bien avant l'apparition de l'Islam.

Il en est de même de ce rappel des nombres pairement pairs, pairement impairs et impairement pairs définis par Nicomaque de Gérase[29] (Ier-IIe siècle après J.-C.), que l'auteur accompagne d'explications quelque peu oiseuses. On ne voit pas pourquoi al-Khwarizmī aurait introduit ces espèces de nombres s'il ne les avait pas trouvés dans l'original indien. Mais alors se pose ici de nouveau le problème des relations entre les mathématiques grecques et indiennes.

On le voit, si *Le calcul indien* d'al-Khwarizmī, dont l'importance historique est considérable, est un exemple de l'influence incontestable des mathématiques indiennes sur celles du monde islamique et, à travers celles-ci, sur celles du Moyen-

---

[28] *Op. cit.*, p. 23-24.

[29] Je remercie M. Bernard Vitrac de m'avoir fait remarquer que la distinction entre ces trois sortes de nombres, tels qu'ils sont définis dans *Le calcul indien*, remontait à Nicomaque de Gérase et non aux définitions 8-10 du Livre VII des *Éléments* d'Euclide, où l'on trouve d'ailleurs (Déf. 11) une quatrième sorte de nombres : les impairement impairs.

Âge occidental, il met bien en lumière la difficulté méthodologique qu'il y a à isoler une culture donnée pour en étudier l'influence sur une autre. Tel qu'il se présente, *Le calcul indien* est une sorte de creuset où sont venus se fondre des reliquats de civilisations diverses : babylonienne, égyptienne, grecque, indienne et chinoise – entre lesquelles il est difficile d'établir une chronologie strictement linéaire.

*
* *

Mais *Le calcul indien* d'al-Khwarizmī n'est pas le seul exemple – important il est vrai – qui illustre les rapports étroits qui ont existé entre le monde arabo-islamique et l'Inde. C'est ainsi qu'on rencontrera de nouveau les mathématiques indiennes à une époque bien plus tardive, celle d'al-Karagī (mort vers 1029-1030 après J.-C.). Celui-ci s'est beaucoup occupé de l'addition, de la soustraction et de l'extraction des racines carrées de polynômes numériques irrationnels, domaine dans lequel le mathématicien indien Bhaskara II (1114-1185) s'est également illustré[30].

Nous commencerons par donner l'exemple de l'extraction de la racine carrée de la somme d'un nombre et de racines irrationnelles. Soit à calculer[31] :

$$\sqrt{16+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{48}+\sqrt{60}+\sqrt{72}+\sqrt{120}}.$$

Cette expression comprend sept termes dont le premier, 16, qui est rationnel, est la somme d'un certain nombre de carrés. Les autres termes, au nombre de six, ne sont que le double produit des racines prises deux à deux. Al-Karagī en conclut que la racine cherchée ne peut donc avoir que quatre termes. Soit :

$$\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p}+\sqrt{q}.$$

Al-Karagī les suppose rangées par ordre de grandeur croissante. Alors : « Vingt-quatre, qui est la plus petite quantité, est le résultat de la multiplication du carré du plus petit monôme par le carré de celui qui lui est le plus proche, quatre fois. » Soit, en transcription : $24 = 4mn$. « Et quarante est également le résultat de la multiplication du carré du plus petit monôme par le carré du troisième, quatre fois. » Soit en transcription : $40 = 4mp$. Et, de même : $48 = 4mq$. « Cela implique que les 24, les 40 et les 48 sont proportionnels à trois des monômes de la racine[32], à l'exception du premier, c'est-à-dire à n, p, q. Le second de ces trois monômes doit donc être une chose. » Posons $n = r$ (r = « la chose »). Alors : $4m = 24/r$, et : $40 = (24/r)\,p$, donc : $p = 5r/3$. De même : $48 = (24/r)q$, donc : $q = 2r$. Et : $60 = 4np$, donc : $24/60 = 2/5 = 4mn/4np = m/p$, donc : $m = 2p/5 = 2(5r/3)/5 = (2\times 5r)/(3\times 5) = 2r/3$.

---

30 Il existe aussi un Bhaskara I, qui vécut au VI^{e} siècle de l'ère chrétienne.

31 Al-Karagī, *al-Badi'*, édition, introduction (en français) et notes par Adel Anbouba, Publications de l'Université libanaise, section des mathématiques, Beyrouth, 1964, p. 44-45.

32 Ils sont, plus précisément, proportionnels à leur carré.

Mais : $m+n+p+q=16$, donc : $2r/3+r+5r/3+2r=16$, ou : $16r=48$, donc : r = 3. Donc : m = 2 ; n = 3 ; p = 5 ; q = 6. La racine est donc :

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}.$$

En donnant cet exemple, al-Karagī ne renvoie pas aux mathématiques indiennes. On trouve cependant chez Bhaskara II (1114-1185) le même polynôme, dans le *Vija-ganita* – ou *Bijaganita* selon l'orthographe adoptée par Youschkevitch[33]. Quant à la méthode d'extraction de la racine carrée, elle est différente chez les deux auteurs. Celle de Bhaskara est plus proche de celle d'al-Karagī que nous donnons plus bas.

Cet exemple illustre bien la difficulté de l'étude des rapports entre les mathématiques dans le monde islamique et l'Inde. Le fait que Bhaskara a vécu plus d'un siècle après al-Karagī porterait à croire que c'est Bhaskara qui a emprunté cet exemple à al-Karagī. Une telle conclusion serait fausse. En effet, on trouve déjà ce polynôme chez Brahmagupta (VIe siècle après J.-C.), dans son *Kuttaka*[34]. On a là un exemple parmi d'autres du traditionalisme qui marque toutes les civilisations orientales. M. Youschkevitch signale lui-même, à propos de l'ouvrage de Bhaskara II[35], que le *Siddhanta-Sirmani* (La couronne des sciences), dont fait partie le *Vija-ganita*, est en liaison très étroite avec les mathématiques des prédécesseurs de Bhaskara. Les deux mathématiciens, al-Karagī et Bhaskara ont donc pu puiser tous deux leurs exemples dans une tradition antérieure qui remonte au moins à Brahmagupta.

Le second exemple d'al-Karagī que nous allons donner – l'extraction de la racine carrée d'un *polynôme algébrique* – ne laisse place à aucun doute quant à son origine. C'est al-Karagī lui-même qui nous apprend qu'il a suivi dans ses calculs la méthode utilisée dans « le calcul indien » (*hisab al-Hind*) pour extraire les racines carrées des « quantités connues », c'est-à-dire des polynômes numériques[36]. Dans cet exemple, nous avons transcrit les calculs dans les termes mêmes qu'utilisaient les Arabes, lesquels ne connaissaient évidemment pas notre symbolisme et utilisaient des mots propres pour nos degrés de l'inconnue, à savoir « la racine » (symbole *r*), la dynamis (symbole *d*) et le cube (symbole *c*). Il suffira donc au lecteur de remplacer *r* par *x*, *d* par x^2 et *c* par x^3 pour suivre facilement les étapes du calcul.

Soit à extraire la racine carrée de :

$$4dcc+12ddc+9cc+20dc+42dd+18c+25d+30r+9.$$

Appelons $\mathrm{P}(r)$ le polynôme donné, qu'al-Karagī appelle « l'agrégat » (*al-gumla*), et appelons $\mathrm{R}_i(r)$ les restes successifs des soustractions qui vont être effectuées.

33 Cf. *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the sanscrit, of Brahmegupta and Bascara*, traduit en anglais par H.T. Colebrook, John Murray, Londres, 1817, p. 149, et Youschkevitch, *op. cit.*, p. 128.
34 Colebrook, *op. cit.*, p. 342.
35 *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*, Pfalz Verlag, Basel, p. 94-95.
36 Al-Karagī, *al-Badi'*, *op. cit.*, texte, p. 51.

1) Prenons la racine ou « la quantité (*al-miqdar*) dont le rang est le plus élevé ». On a : $\sqrt{4dcc} = 2dd$ et $(2dd) \times (2dd) = 4dcc$.

2) Soit : $\mathrm{R}_1(r) = \mathrm{P}(r) - 4dcc = 12ddc + 9cc + \cdots + 9$.

3) « Tu cherches la plus grande quantité possible qui soit la plus proche de 2*dd*. » Soit A cette quantité. Il faut alors que : a) $2\mathrm{A}(2dd)$ ait un degré égal au degré le plus élevé de $\mathrm{R}_1(r)$, c'est-à-dire le degré *ddc* ; b) $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$ puisse être soustrait de $\mathrm{R}_1(r)$. « Tu trouves alors que » : A = $3c$. Il vient alors : $2\mathrm{A}(2dd) = 12ddc$ et $\mathrm{A} \times \mathrm{A} = 9cc$. Il faut alors soustraire la somme de ces deux quantités de $\mathrm{R}_1(r)$. Alors : $\mathrm{R}_2(r) = \mathrm{R}_1(r) - (12ddc + 9cc) = 20dc + 42dd + \cdots + 9$. Les deux premiers termes de la racine sont donc :

$$\boxed{2dd + 3c}$$

4) « Tu cherches alors la plus grande quantité » B telle que : a) $2\mathrm{B}(2dd + 3c)$ soit d'un degré égal au degré le plus élevé de $\mathrm{R}_2(r)$, c'est-à-dire du degré de la dynamo-cube ; b) $\mathrm{B} \times \mathrm{B}$ puisse être soustrait de $\mathrm{R}_2(r)$. « Tu trouveras alors » que : B = $5r$. Alors : $2\mathrm{B}(2dd + 3c) = 2(5r)(2dd + 3c) = 20dc + 30dd$ et $\mathrm{B} \times \mathrm{B}$ = $25d$. Il faut alors soustraire la somme de ces deux quantités de $\mathrm{R}_2(r)$. Alors : $\mathrm{R}_3(r) = \mathrm{R}_2(r) - (20dc + 30dd + 25d) = 12dd + 18c + 30r + 9$. Les trois premiers termes de la racine sont donc :

$$\boxed{2dd + 3c + 5r}$$

5) « Cherche ensuite une quantité » C, telle que : a) $2\mathrm{C}(2dd + 3c + 5r)$ soit d'un degré égal au degré le plus élevé de $\mathrm{R}_3(r)$; b) $\mathrm{C} \times \mathrm{C}$ puisse être soustrait de $\mathrm{R}_3(r)$. Comme $\mathrm{R}_3(r)$ est déjà du degré de la dynamo-dynamis, C ne peut être qu'un nombre. « Tu trouves ainsi » que : C = 3. Alors : $2\mathrm{C}(2dd + 3c + 5r) = 12dd + 18c + 30r$ et $\mathrm{C} \times \mathrm{C} = 9$. Il faut alors soustraire la somme de ces deux quantités de $\mathrm{R}_3(r)$. Alors : $\mathrm{R}_4(r) = \mathrm{R}_3(r) - (12dd + 18c + 30r + 9)$. « Et il ne reste rien. » Les racines de $\mathrm{P}(r)$ sont donc :

$$\boxed{2dd + 3c + 5r + 3}$$

La méthode de calcul utilisée dans l'exemple précédent pour extraire la racine carrée de ce polynôme algébrique est, comme nous l'avons dit, explicitement empruntée par al-Karagī à la méthode indienne d'extraction de la racine carrée d'un polynôme *numérique*. Celle-ci est décrite par Bhaskara II dans son *Vija-Ganita*[37] au chapitre consacré aux nombres irrationnels.

*

* *

[37] Colebrook, *op. cit.*, p. 150-151.

As-Samaw'al (mort « jeune » en 1174), un fervent disciple d'al-Karagī, dont il cite de très nombreux passages dans son livre *al-Bāhir* (L'éblouissant), attribue aux Indiens la méthode de division de deux polynômes algébriques[38]. Des deux exemples de division de polynômes donnés par as-Samaw'al, nous avons choisi celui qui contient des quantités « manquantes » (*naqisat*)[39]. En haut des colonnes nous avons indiqué leur nom par la première lettre de leur appellation, comme dans le tableau d'al-Karagī. Ainsi, *r* = racine, *d* = dynamis, *c* = cube. Nous avons surmonté ces appellations par leur équivalent moderne pour que le lecteur puisse suivre plus facilement les opérations. Les rangs du quotient, des dividendes et des restes successifs ne contiennent que les « coefficients » des différents termes dont le « degré » est indiqué en haut des colonnes. Sauf en ce qui concerne la disposition des différentes étapes de la division, le lecteur pourra constater que la « méthode indienne » est exactement celle selon laquelle nous opérons aujourd'hui.

	$6x^8$ *dcc*	$28x^7$ *ddc*	$6x^6$ *cc*	$-80x^5$ *dc*	$38x^4$ *dd*	$92x^3$ *c*	$-200x^2$ *d*	$20x$ *r*	unités
quotient									
dividende	6	28	6	– 80	38	92	– 200	20	
diviseur				2	8	0	– 20		
quotient						3			
1er reste	0	4	6	– 20	38	92	– 200	20	
diviseur				2	8	0	– 20		
	quotient					3	2		
	2e reste	0	– 10	– 20	78	92	– 200	20	
	diviseur			2	8	0	– 20		
		quotient				3	2	– 5	
		3e reste	0	20	78	– 8	– 200	20	
		diviseur		2	8	0	– 20		
			quotient			3	2	– 5	10
			4e reste	0	– 2	– 8	0	20	
			diviseur	2	8	0	– 20		

As-Samaw'al traite ensuite de l'extraction des racines carrées selon une méthode qu'il qualifie de générale, parce qu'elle s'applique aussi bien aux polynômes additifs qu'à ceux qui contiennent des termes à soustraire[40]. L'auteur s'attribue à lui-même la découverte de cette méthode alors qu'elle s'inspire en fait de celle d'al-Karagī.

38 As-Samaw'al, *al-Bāhir,* édition, traduction française et commentaire par MM. Roshdi Rashed et Ahmad Salah, publications du ministère syrien de l'Enseignement supérieur, Damas, 1972, p. 45 *sqq.*
39 Expression généralement traduite, d'une façon erronée, par quantités « négatives ». Nous reviendrons plus loin brièvement sur cette question. Nous avons néanmoins indiqué ces quantités, par commodité, par le signe usuel (–).
40 *Al-Bāhir, op. cit.*, texte, p. 68-70.

C'est à la fin de ce chapitre qu'as-Samaw'al donne la « règle des signes », peut-être la plus complète que l'on puisse trouver dans les mathématiques de l'Islam[41]. Il y rappelle non seulement la règle de multiplication des quantités algébriques, mais également celle de leur division et surtout celle de leur addition et soustraction. Mais ces quelques lignes d'as-Samaw'al reposent à leur tour le problème des rapports entre mathématiques arabes et indiennes. Ces règles se trouvent en effet énoncées, et d'une façon tout aussi complète, chez Bhaskara II[42]. Ces deux auteurs sont rigoureusement contemporains, as-Samaw'al étant peut-être mort une dizaine d'années avant l'auteur indien. Il est évidemment vain de se demander lequel des deux a pu inspirer l'autre. La question est d'autant plus vaine que cette « règle des signes » se trouve déjà dans le *Kuttaka-ganita* de Brahmagupta (VIIe s.)[43].

Il nous faut toutefois relever ici que les deux traductions, celle, anglaise, de Colebrook et celle, française, de MM. Ahmed et Rashed ont malheureusement traduit le mot arabe *nāqis* (manquant) et les mots sanscrits *rina* ou *cshaya* (dette ou perte, indique Colebrook en note) par le mot « négatif ». Ce dernier terme, tout comme celui de zéro, véhicule pour nous un certain nombre de concepts totalement étrangers aux Arabes et aux Indiens. Rien, dans leur littérature mathématique, ne permet de penser qu'ils admettaient l'existence de nombres plus petits que zéro, surtout quand on se souvient que même le *sifr* ou le vide n'avaient pas pour eux, nous l'avons dit, le même sens que le zéro pour nous. De plus, la relation d'ordre entre les nombres « manquants » était l'inverse de celle que nous établissons entre les nombres négatifs. Pour nous, le nombre (– 1) est plus grand que (– 5). Pour al-Karagī, c'est ce dernier qui est plus grand que le premier, puisque lorsque cinq objets *manquent* à une somme, il en manque davantage que lorsqu'il n'en manque qu'un seul. Il en est de même si l'on s'exprime en terme de dette[44].

Les deux exemples cités plus haut, explicitement attribués aux Indiens, ainsi que d'autres, calculés par les mêmes méthodes, montrent que le calcul des *polynômes algébriques* chez les Arabes est très certainement emprunté au calcul des *polynômes numériques* de ceux-là. Al-Karagī ne se fait pas faute de le dire explicitement : « … cette méthode est celle qui est utilisée pour l'extraction des connues dans le calcul indien et autres calculs »[45].

Qu'en est-il à présent de la résolution des équations quadratiques ? Dans ce domaine, on ne trouve aucune référence à l'Inde dans la littérature mathématique arabe. C'est plutôt du côté de la Babylonie qu'il faut chercher l'origine de la théorie des équations, compte tenu de la similitude évidente entre les méthodes arabes et les

41 *Ibid.*, p. 70-71.
42 Colebrook, *op. cit.*, p. 132-135.
43 *Ibid.*, p. 339.
44 Nous traitons plus amplement de cette question dans notre ouvrage en préparation : *La rationalisation de l'algèbre en pays d'Islam ; une nouvelle lecture de l'algèbre arabe*.
45 *Al-Badi', op. cit.*, texte, p. 51.

méthodes babyloniennes de résolution des équations. Il semble toutefois que la « règle des signes » dont nous avons parlé plus haut, et dont *al-Khwarizmī faisait déjà état* – tout au moins dans le cas de la multiplication – au début de son ouvrage sur l'algèbre[46], puisse être considérée comme étant d'origine indienne.

*
* *

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS

Dès le début de l'histoire des mathématiques en pays d'Islam, qu'il s'agisse d'arithmétique ou d'algèbre, on voit immédiatement les difficultés qui apparaissent quand on veut isoler l'étude de l'influence d'un pays – l'Inde en l'occurrence – sur ces mathématiques. L'étude d'une telle influence déborde immédiatement le cadre géographique où elle s'exerce pour s'étendre à l'est, à la Chine, à l'ouest et au nord, à la Grèce et à la Babylonie. Il faudrait même y englober les mathématiciens alexandrins, notamment Héron et Diophante[47]. Cette étude appartiendrait à un domaine de recherches non encore constitué : celui de l'histoire comparée des mathématiques. Nous n'avions ici ni la place – ni la compétence ! – pour en rédiger le premier chapitre.

L'examen des rapports entre les mathématiques arabes et indiennes, même limité à quelques exemples particuliers, nous a toutefois permis de déceler l'existence de ce que l'on pourrait appeler des centres de synthèse mathématique, sortes de creusets situés au confluent de plusieurs influences. L'Inde en est un incontestablement. Il a contribué à son tour à la constitution d'un autre centre de synthèse : celui des mathématiques arabes à partir du IX^e siècle. Si son influence sur la théorie des équations – en dehors de la « règle des signes » – peut prêter à discussion, elle est manifeste dans les domaines de l'arithmétique et des opérations effectuées sur les polynômes algébriques. C'est finalement au Proche et au Moyen-Orient que la plus grande partie des mathématiques grecques et orientales seront reprises, considérablement développées et mises sous la forme définitive qu'elles prendront pour passer à l'Occident à partir du XIII^e siècle.

---

46 *Kitāb al-gabr*, édition M. Moucharrafa et M. Ahmad, Dar al-katib al-'arabi, Le Caire, 1968, p. 27-28.

47 Certaines pages de Brahmagupta, d'al-Khwarizmī et de Bhaskara sur les mensurations rappellent les travaux de Héron d'Alexandrie. D'autres, de Brahmagupta, ceux de Diophante.