Mathématiques et Philosophie en classe de seconde

Note :
Cet atelier (partie mathématique) s'est déroulé en dehors du cours de mathématiques en classe entière sur une durée de 12 heures (1 heure hebdomadaire). Il avait pour but de souligner différents points abordés, en parallèle, en cours de philosophie où les élèves ont pu recevoir une initiation à la philosophie autour du thème : «Qu'est-ce qu'un nombre ?».

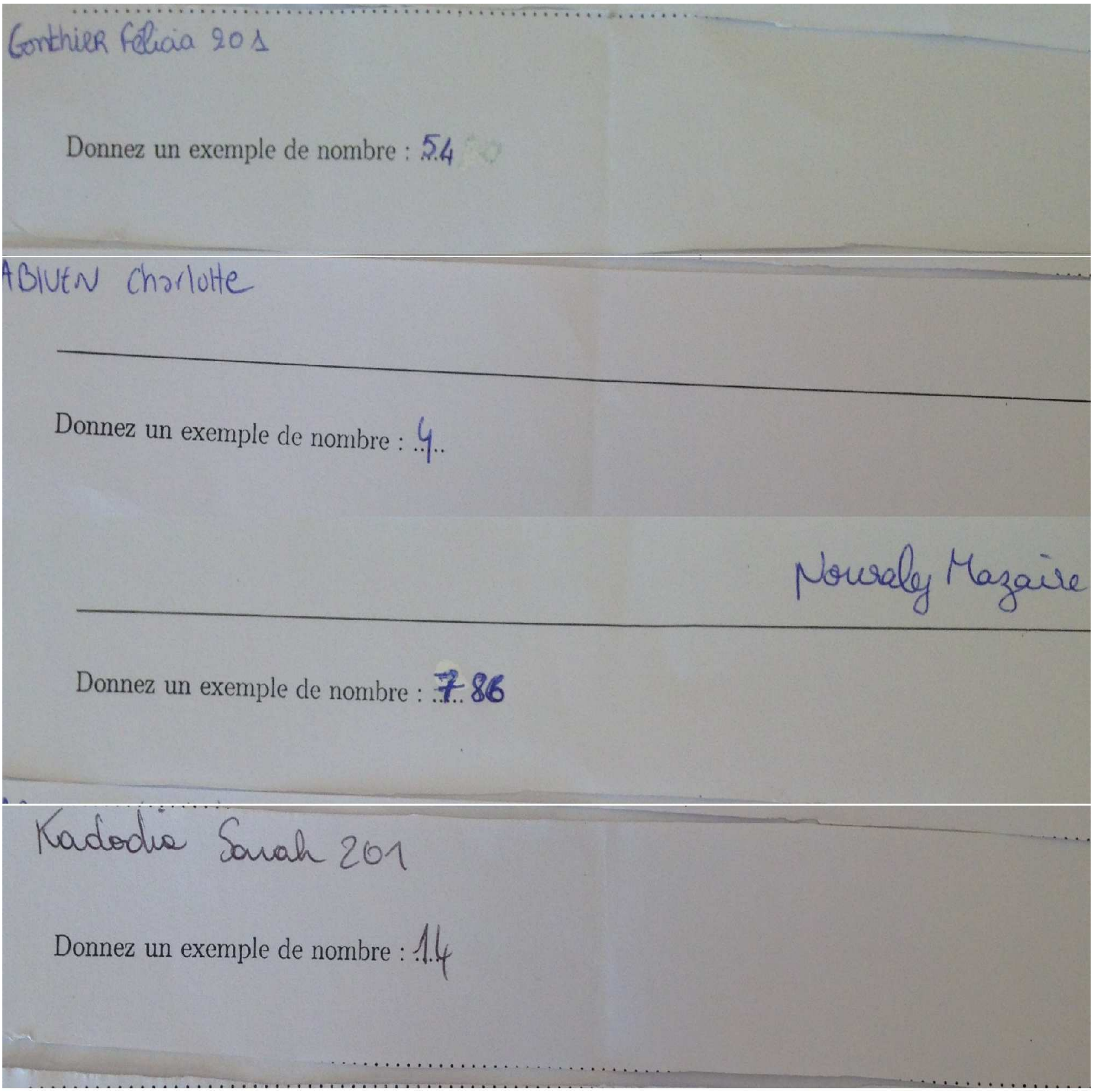
Effectif de la classe : 35 élèves.
Niveau : assez bon dans l'ensemble.

Objectifs :
- Faire prendre conscience aux élèves : qu'un nombre possède une infinité de représentants, que manipuler un nombre revient à manipuler un de ses représentants.
- Montrer aux élèves la diversité des nombres au travers de quelques exemples.
- Et surtout susciter leur curiosité.

Il s'agissait au départ de faire un petit état des lieux de ce que les élèves ont compris (ou retenu) à propos du nombre, après toutes ces années passées à apprendre des mathématiques.
Deux activités, dont quelques résultats suivent, ont été données à faire aux élèves :

- Donner un exemple de nombre.
- Entourer parmi un ensemble de cases celles qui contiennent un nombre.

ACTIVITÉ 1


Gonthier Félicia 201

Donnez un exemple de nombre : 54

ABIVEN Charlotte

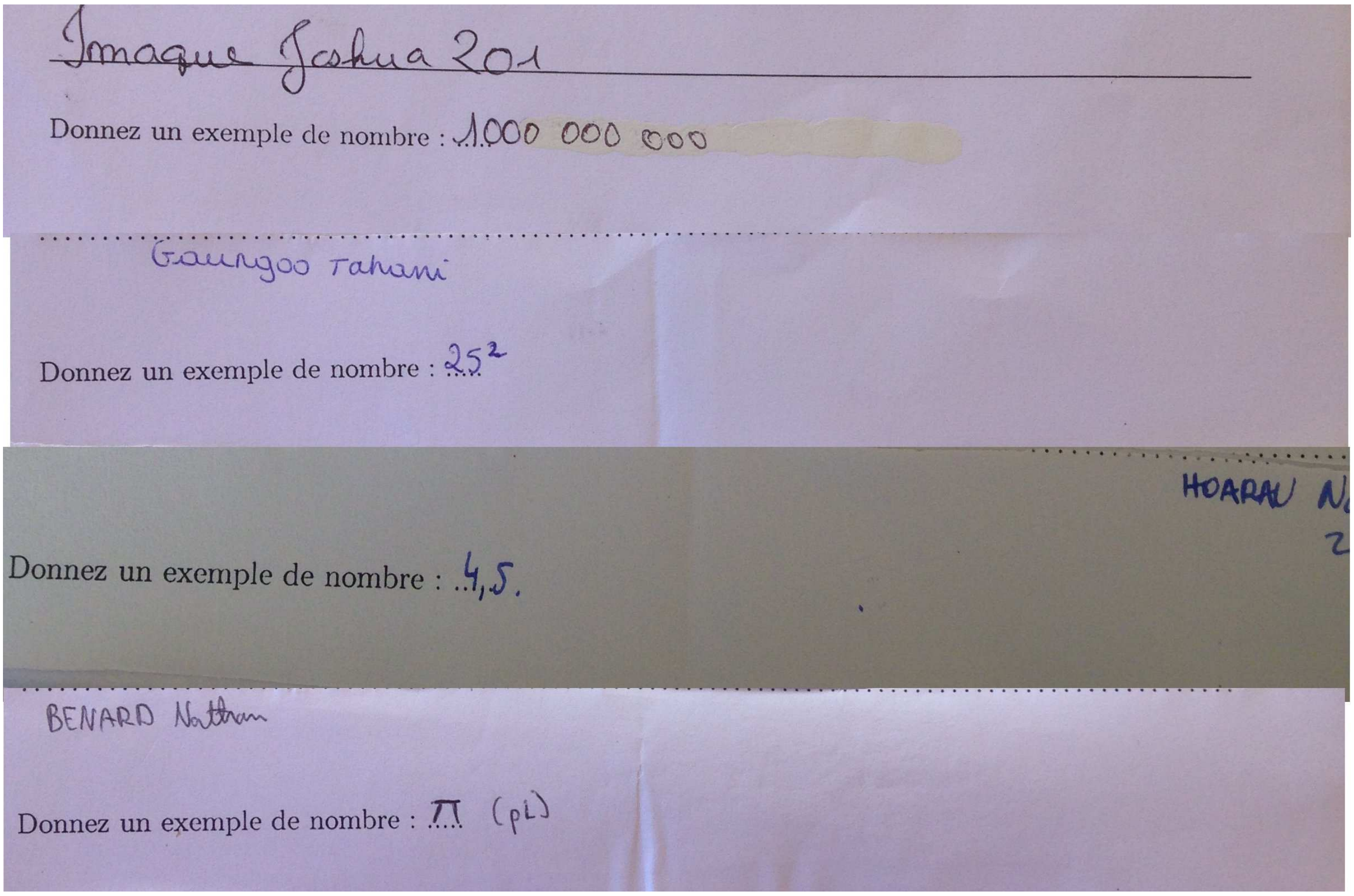
Donnez un exemple de nombre : 4

Nouraly Mazaire

Donnez un exemple de nombre : ~~7~~ 86

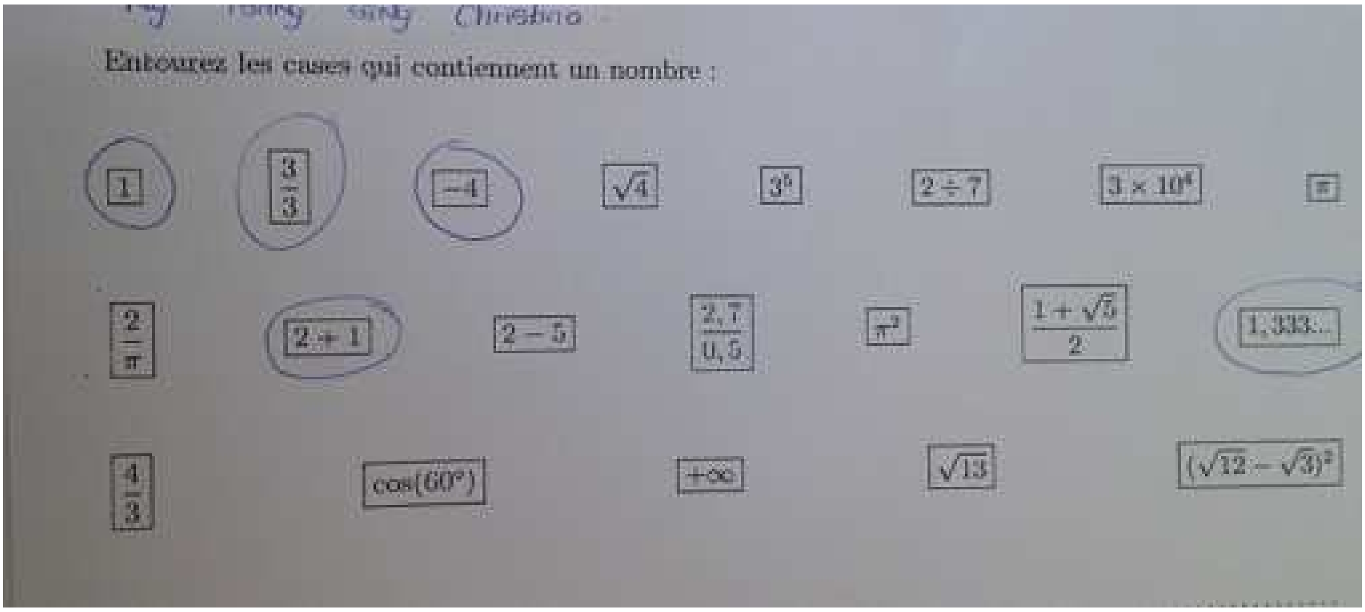
Kadodia Sarah 201

Donnez un exemple de nombre : 14



Presque tous les élèves ont donné un nombre entier naturel.
Seul un élève a donné un nombre décimal et un autre π alors que les ensembles de nombres ont été vus en début d'année. On aurait pu s'attendre à un peu plus d'originalité. Mais cet exercice donné à des adultes non spécialistes des mathématiques donne les mêmes résultats.
Les nombres entiers naturels sont profondément ancrés en nous et solidement liés au mot «nombre».
Dans la vie de tous les jours, même si les nombres décimaux se rencontrent très fréquemment, on n'a pas l'impression de les utiliser.
$2,5$ € se dira «2 euros 50». On remplace volontiers ce nombre par la somme de deux quantités entières...

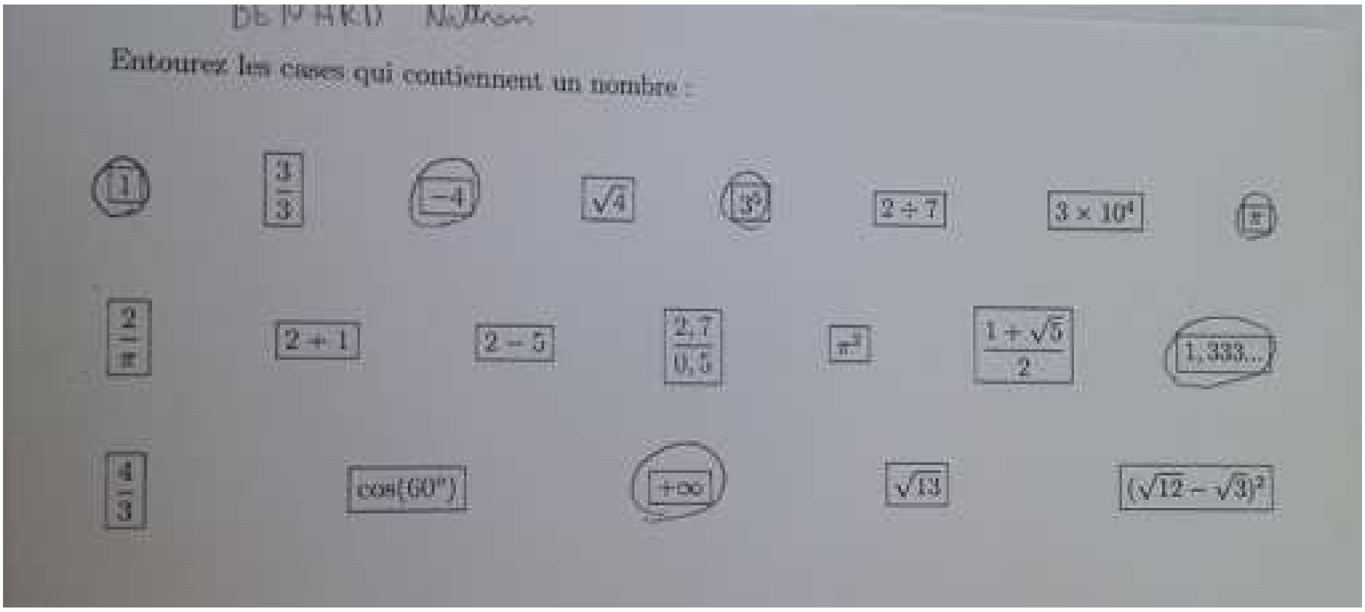
ACTIVITÉ 2


Entourez les cases qui contiennent un nombre :

1 $\quad \frac{3}{3}$ $\quad -4$ $\quad \sqrt{4}$ $\quad 3^5$ $\quad 2 \div 7$ $\quad 3 \times 10^4$ $\quad \pi$

$\frac{2}{\pi}$ $\quad 2+1$ $\quad 2-5$ $\quad \frac{2,7}{0,5}$ $\quad \pi^2$ $\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad 1,333...$

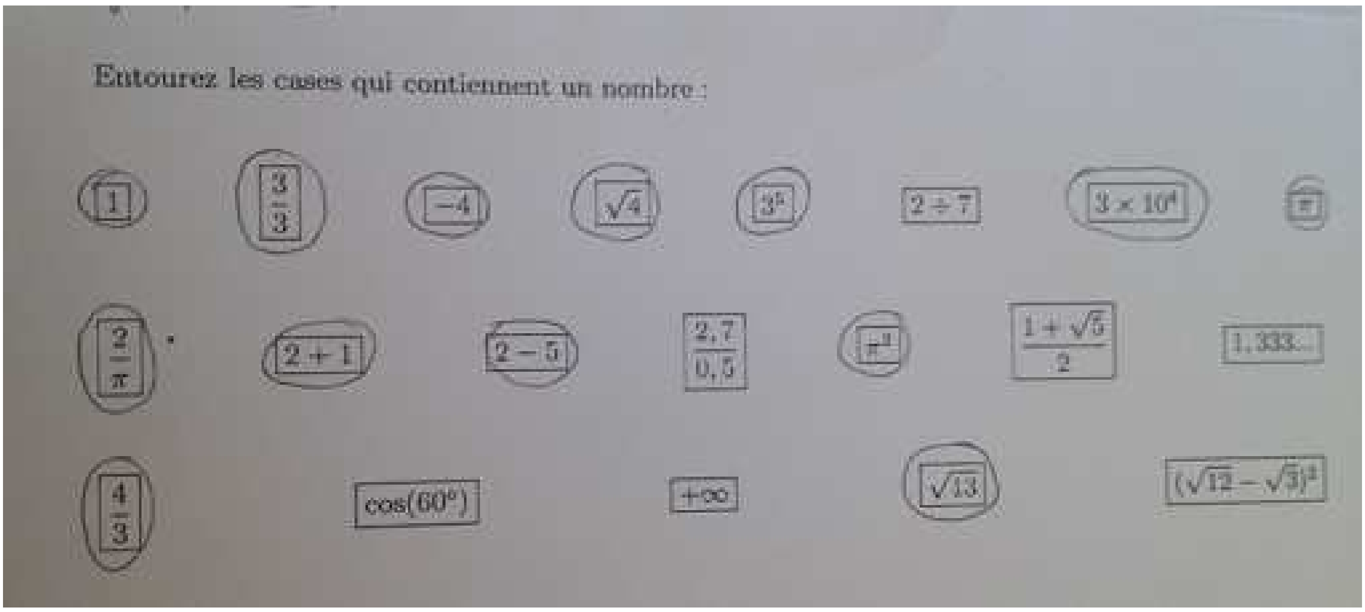
$\frac{4}{3}$ $\quad \cos(60°)$ $\quad +\infty$ $\quad \sqrt{13}$ $\quad (\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$


Entourez les cases qui contiennent un nombre :

1 $\quad \frac{3}{3}$ $\quad -4$ $\quad \sqrt{4}$ $\quad 3^5$ $\quad 2 \div 7$ $\quad 3 \times 10^4$ $\quad \pi$

$\frac{2}{\pi}$ $\quad 2+1$ $\quad 2-5$ $\quad \frac{2,7}{0,5}$ $\quad \pi^2$ $\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad 1,333...$

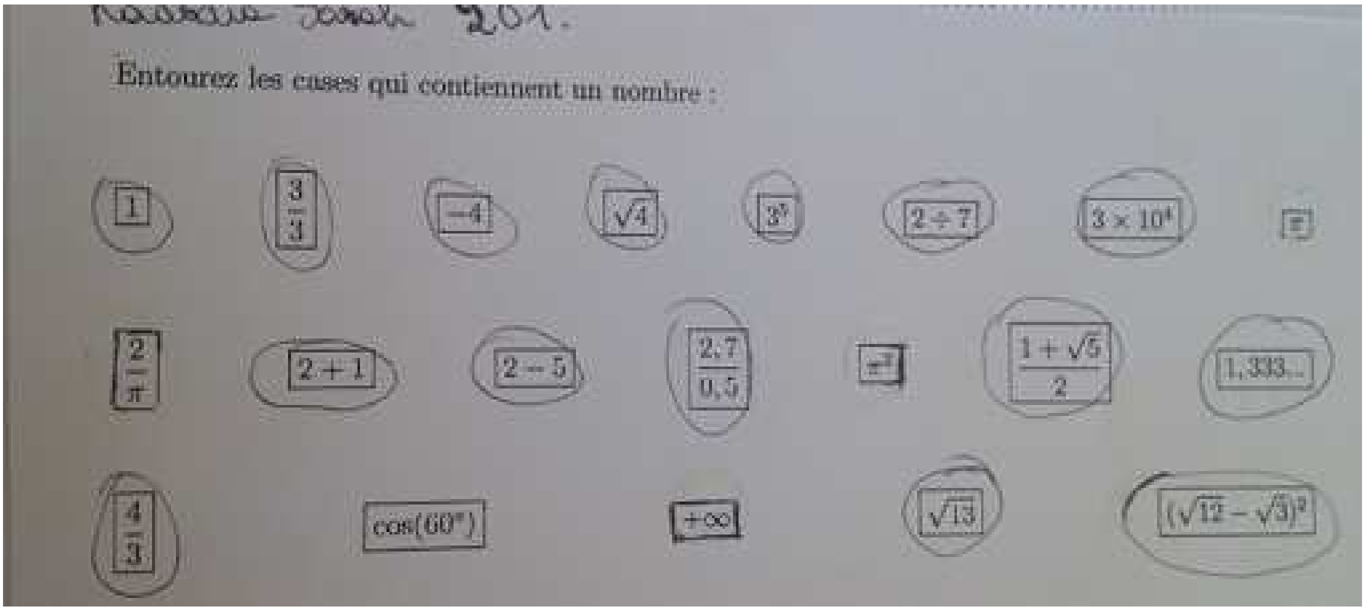
$\frac{4}{3}$ $\quad \cos(60°)$ $\quad +\infty$ $\quad \sqrt{13}$ $\quad (\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$


Entourez les cases qui contiennent un nombre :

1 $\quad \frac{3}{3}$ $\quad -4$ $\quad \sqrt{4}$ $\quad 3^5$ $\quad 2 \div 7$ $\quad 3 \times 10^4$ $\quad \pi$

$\frac{2}{\pi}$ $\quad 2+1$ $\quad 2-5$ $\quad \frac{2,7}{0,5}$ $\quad \pi^2$ $\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad 1,333...$

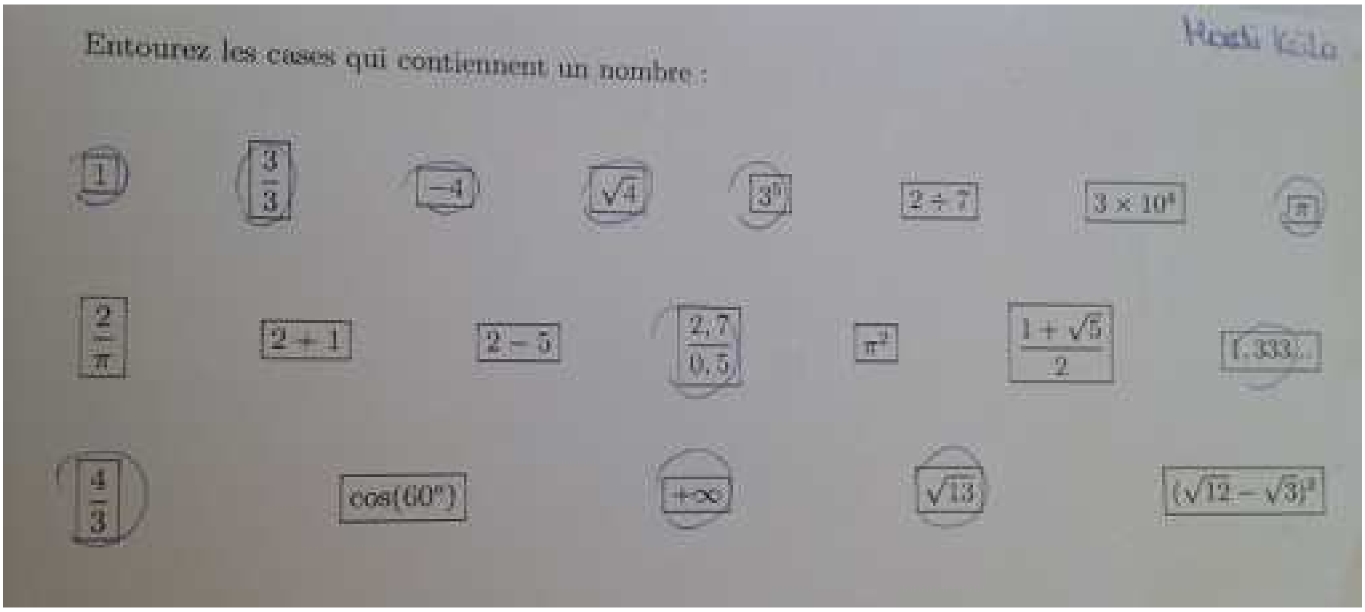
$\frac{4}{3}$ $\quad \cos(60°)$ $\quad +\infty$ $\quad \sqrt{13}$ $\quad (\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$


Entourez les cases qui contiennent un nombre :

1 | $\frac{3}{3}$ | -4 | $\sqrt{4}$ | 3^5 | $2 \div 7$ | 3×10^4 | π

$\frac{2}{\pi}$ | $2+1$ | $2-5$ | $\frac{2,7}{0,5}$ | π^2 | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | $1,333...$

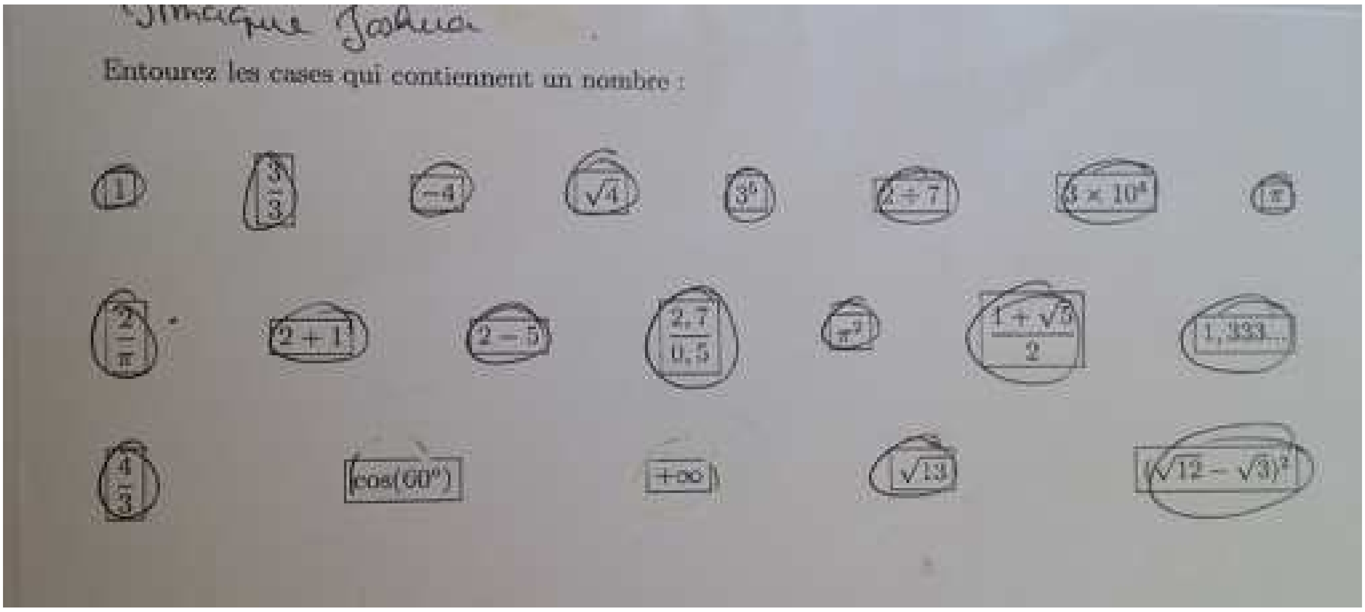
$\frac{4}{3}$ | $\cos(60°)$ | $+\infty$ | $\sqrt{13}$ | $(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$


Entourez les cases qui contiennent un nombre :

1 | $\frac{3}{3}$ | -4 | $\sqrt{4}$ | 3^5 | $2 \div 7$ | 3×10^4 | π

$\frac{2}{\pi}$ | $2+1$ | $2-5$ | $\frac{2,7}{0,5}$ | π^2 | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | $1,333...$

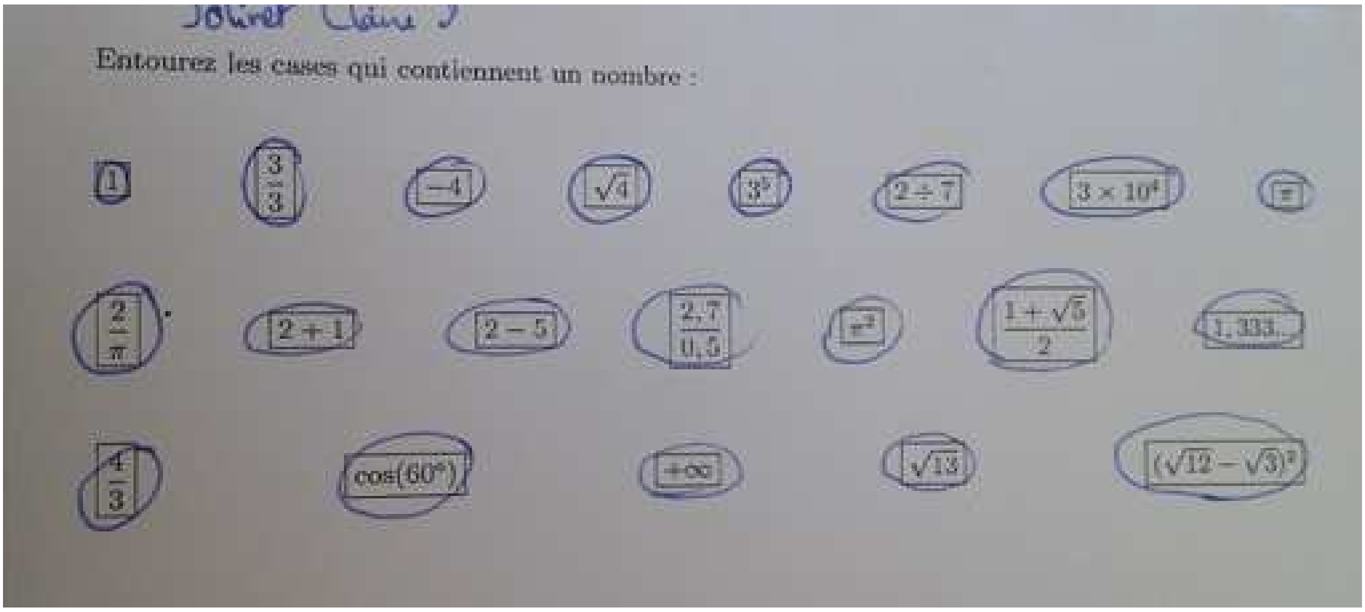
$\frac{4}{3}$ | $\cos(60°)$ | $+\infty$ | $\sqrt{13}$ | $(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$


Entourez les cases qui contiennent un nombre :

1 | $\frac{3}{3}$ | -4 | $\sqrt{4}$ | 3^5 | $2 \div 7$ | 3×10^4 | π

$\frac{2}{\pi}$ | $2+1$ | $2-5$ | $\frac{2,7}{0,5}$ | π^2 | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | $1,333...$

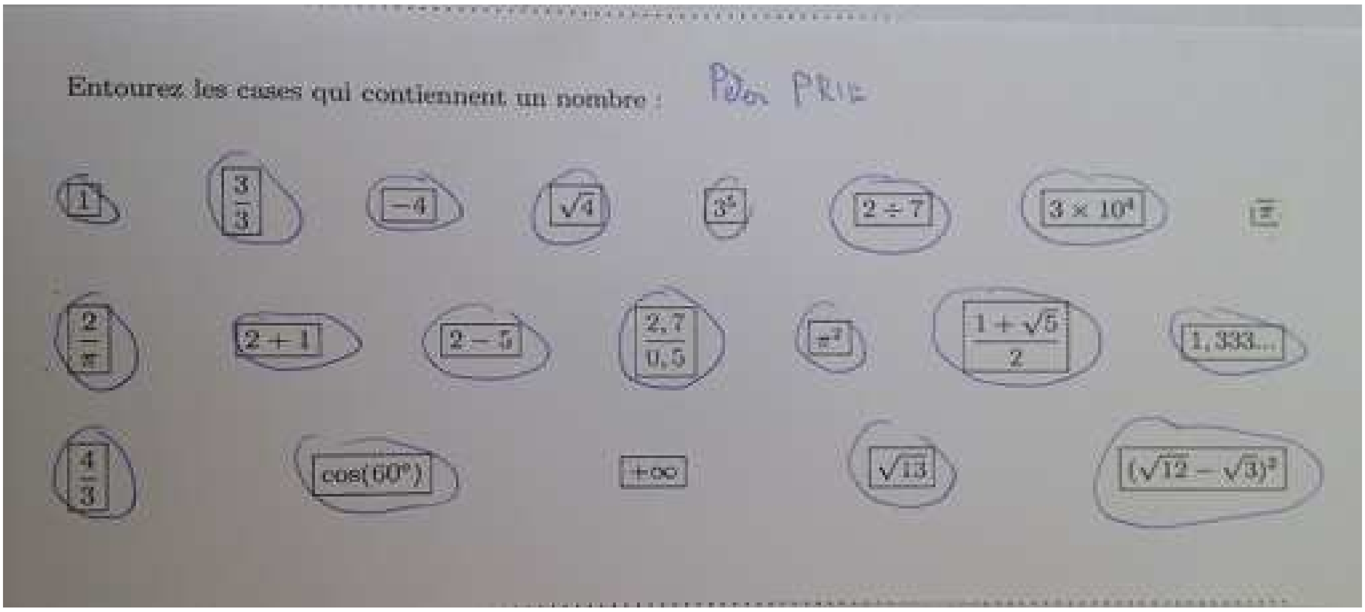
$\frac{4}{3}$ | $\cos(60°)$ | $+\infty$ | $\sqrt{13}$ | $(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$


Entourez les cases qui contiennent un nombre :

1 $\frac{3}{3}$ -4 $\sqrt{4}$ 3^5 $2\div 7$ 3×10^4 π

$\frac{2}{\pi}$ $2+1$ $2-5$ $\frac{2,7}{0,5}$ π^2 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $1,333...$

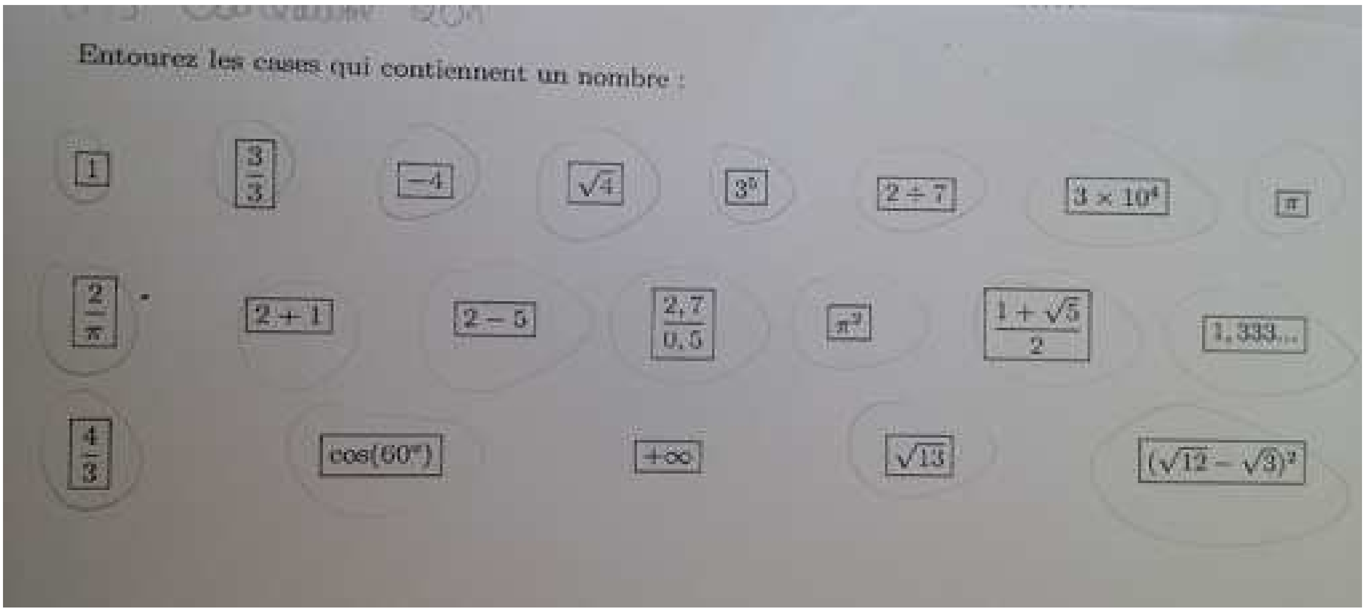
$\frac{4}{3}$ $\cos(60°)$ $+\infty$ $\sqrt{13}$ $(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$


Entourez les cases qui contiennent un nombre :

1 $\frac{3}{3}$ -4 $\sqrt{4}$ 3^5 $2\div 7$ 3×10^4 π

$\frac{2}{\pi}$ $2+1$ $2-5$ $\frac{2,7}{0,5}$ π^2 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $1,333...$

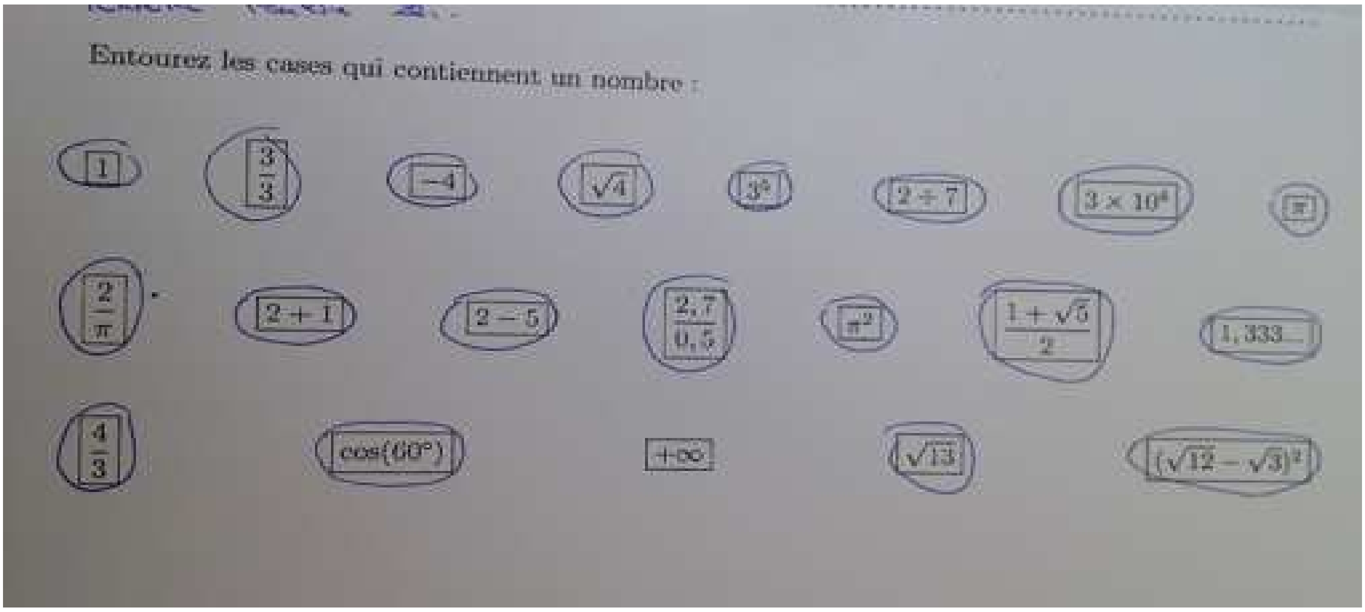
$\frac{4}{3}$ $\cos(60°)$ $+\infty$ $\sqrt{13}$ $(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$

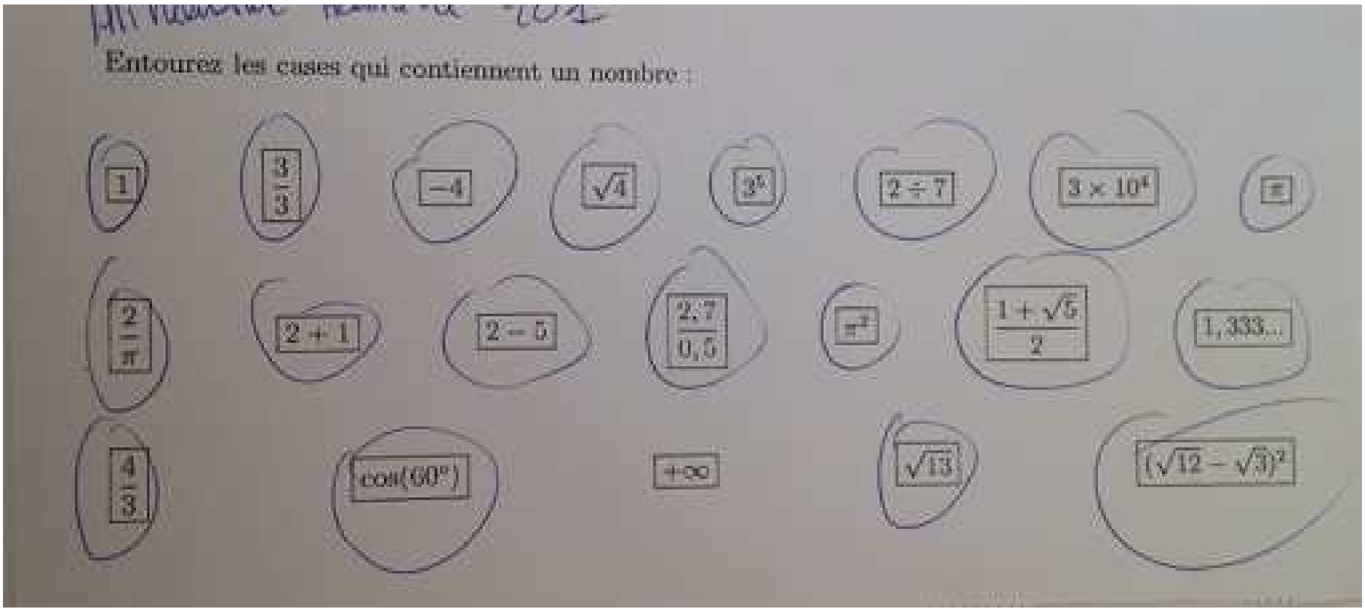

Entourez les cases qui contiennent un nombre :

1 $\frac{3}{3}$ -4 $\sqrt{4}$ 3^5 $2\div 7$ 3×10^4 π

$\frac{2}{\pi}$ $2+1$ $2-5$ $\frac{2,7}{0,5}$ π^2 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $1,333...$

$\frac{4}{3}$ $\cos(60°)$ $+\infty$ $\sqrt{13}$ $(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$





La réponse attendue était : toutes les cases entourées sauf celle qui contient «$+\infty$»
(En seconde, ∞ n'étant pas dans l'ensemble des nombres réels, donc n'est pas un nombre...).
La plupart des élèves ont entouré quelques cases, le plus souvent celles qui contenaient des «nombres» (1, -4, π, $1,33333\ldots$) ou celles qui contenaient des «calculs» faisant intervenir un minimum de symbole, ($\frac{3}{3}$, $\sqrt{4}$, $2+1\ldots$).
On peut noter quelques contradictions qui confortent l'objectif de l'atelier, à savoir : certains élèves entourent 1 et $\dfrac{4}{3}$ mais pas $\dfrac{3}{3}$ et $1,3333333\ldots$.
Beaucoup d'élèves n'ont pas intégré que $\dfrac{1}{3}$ et $\sqrt{2}$ sont des nombres....
La majorité des élèves n'ont pas assimilé qu'un calcul n'est autre chose qu'un représentant de son résultat et conçoivent donc difficilement les opérations qui les utilisent, sources de nombreuses erreurs.
$3 \times \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est pour eux un enchainement de calculs et rarement $3 \times \phi$ (ϕ : le nombre d'or).

Il faut noter que les ensembles de nombres ne sont plus explicitement au programme de la classe de seconde ! Aussi, les activités qui vont suivre ont permis aux éléves d'avoir une représentation concrète de certains des nombres rencontrés dans le cours de mathématiques.

I] Nombres entiers naturels

Définition 1.

Un nombre entier naturel est un nombre premier s'il admet exactement deux diviseurs distincts positifs qui sont 1 et le nombre lui même.

Exemple 1.

2 possède deux diviseurs positifs distincts, 1 et 2 donc 2 est un nombre premier.
1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur positif qui est 1.
0 n'est pas un nombre premier car il est divisible par tous les entiers naturels non nuls.
Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 100 :
$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89$ et 97.

Remarque
Pour déterminer la liste des nombres premiers inférieurs à un entier N (ici 100) on peut utiliser le crible d'Ératosthène.

Méthode du crible d'Ératosthène.
Comme 1 n'est pas premier, on commence par rayer 1, puis 2 est un nombre premier, on entoure 2 et on raye tous les multiples de 2 i.e. 4, 6, ...
3 est un nombre premier, on entoure 3 puis on raye tous les multiples de 3.
On continue ainsi jusqu'à 7. (car $7 \leqslant \sqrt{100} = 10$, cf propriété ci-après).
Les nombres restant sont les nombres premiers inférieurs à 100.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Propriété 1.

Soit N un entier naturel supérieur où égal à 2 non premier.
Soit d le plus petit diviseur positif de N différent de 1.
Alors $d \leqslant \sqrt{N}$.

Démonstration

Raisonnement par l'absurde.
Supposons $d > \sqrt{N}$.
Comme d divise N alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N = d \times k$.
Supposons $k \geqslant d$, alors $k > \sqrt{N}$ d'où $N = d \times k > \sqrt{N} \times \sqrt{N} = N$. Contradiction.
Donc $k < d$. Ce qui est contradictoire avec d le plus petit diviseur positif de N différent de 1.
Donc $d \leqslant \sqrt{N}$. ■

Remarque
Ceci nous indique que pour prouver qu'un nombre n'est pas premier, il suffit de trouver un diviseur de ce nombre parmi les entiers compris entre 2 et $\sqrt{N}$.
Sinon il est premier. D'où l'algorithme suivant.

Algorithme pour tester si un nombre est premier ou non.

Début
    Saisir "Nombre entier impair supérieur à 2 :", N
Traitement
    R **prend la valeur** $\sqrt{N}$
    I **prend la valeur** 3
    Tant_que $I \leqslant R$ **et partie_décimale**$(N \div I) \neq 0$ **faire** :
        I **prend la valeur** $I + 2$
    Fin_Tant_que
Sortie
    Si $I > R$ **alors** :
        Afficher N, «est un nombre premier»
    Sinon :
        Afficher N, «est divisible par :», I
    Fin_si
Fin

II] Construction de nombres à la règle et au compas

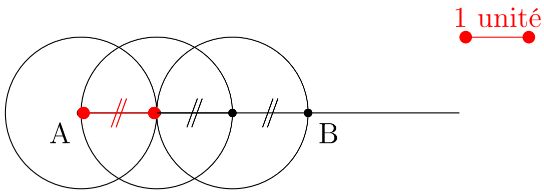
Définition 2.

Un nombre constructible à la règle et au compas est la mesure d'une longueur associée à deux points constructibles à la règle (non graduée) et au compas.

(Source : Wikipédia)

Remarque
À la règle et au compas, on peut construire des cercles, des droites, des droites parallèles, des droites perpendiculaires, le milieux d'un segument.

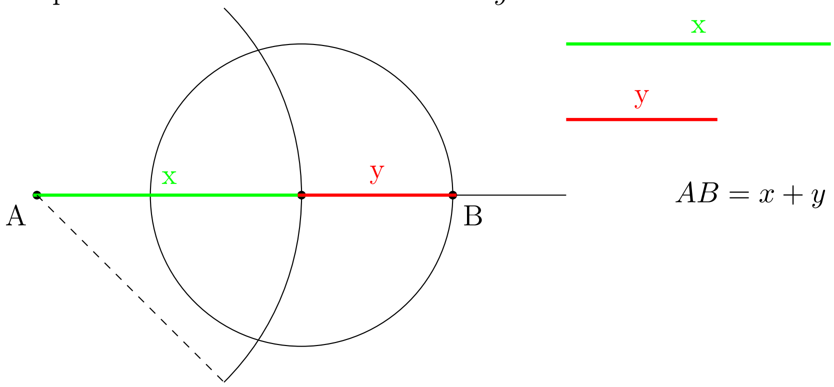
a). Les nombres entiers naturels sont constructibles à la règle et au compas. Une unité étant choisie. Il suffit de reporter autant d'unités que l'on souhaite sur une droite à partir d'un point, en traçant des arcs de cercles.



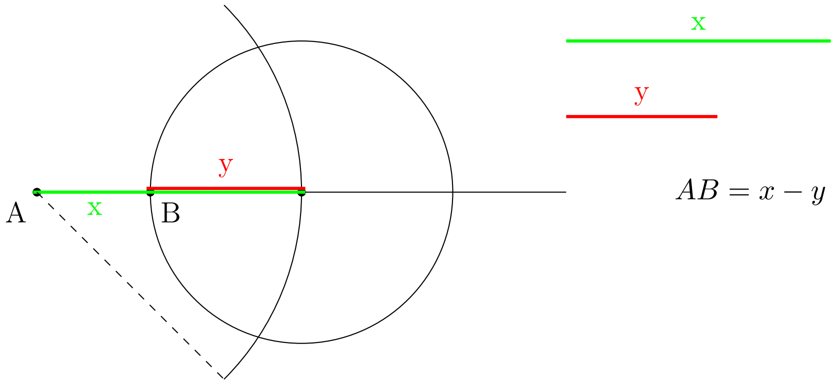
$AB = 3$ unités

b). On suppose que deux nombres x et y strictement positifs sont construits.

- On peut construire la somme $x + y$ de ces deux nombres.
  Si $x > y$ alors on peut construire leur différence $x - y$.

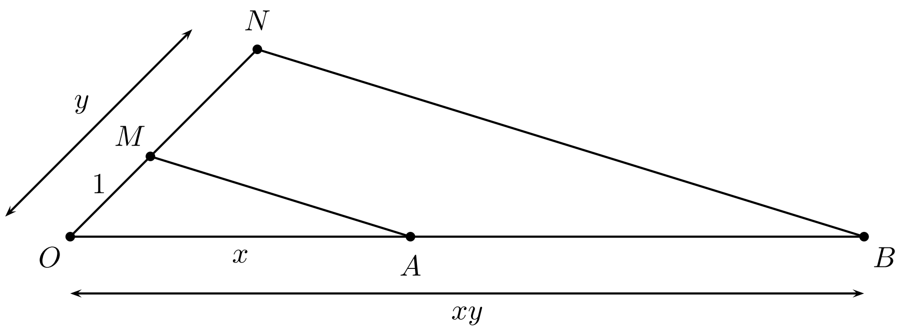


$AB = x + y$ unités



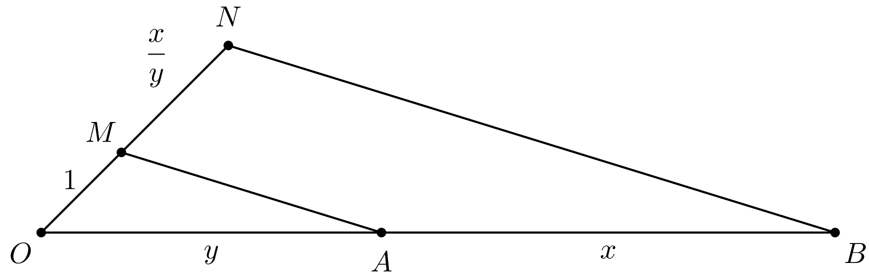
$AB = x - y$ unités

- on peut construire le produit de deux nombres réels.

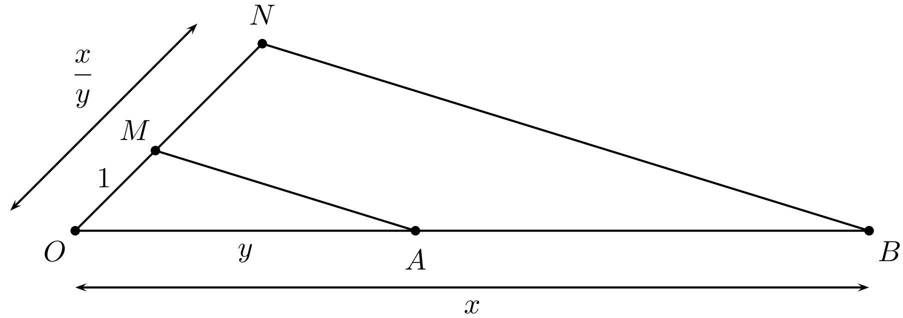


Une unité étant choisie. (OM) et (OA) sont deux droites sécantes en O, telles que $OA = x$ et $OM = 1$.
$N \in [OM]$ tel que $ON = y$.
La parallèle à (AM) passant par N coupe (OA) en B. On a alors $OB = xy$.

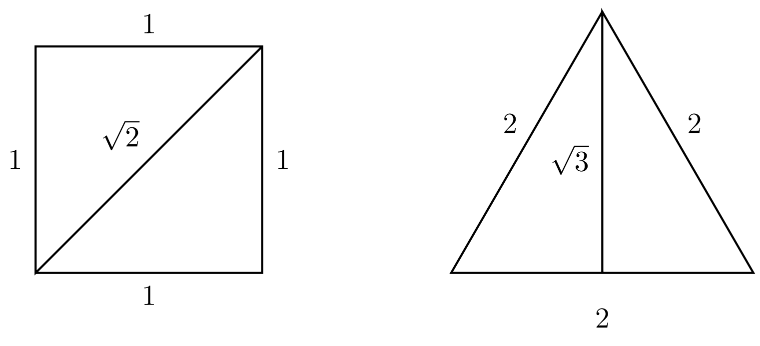
- On peut contruire le quotient de x par y.



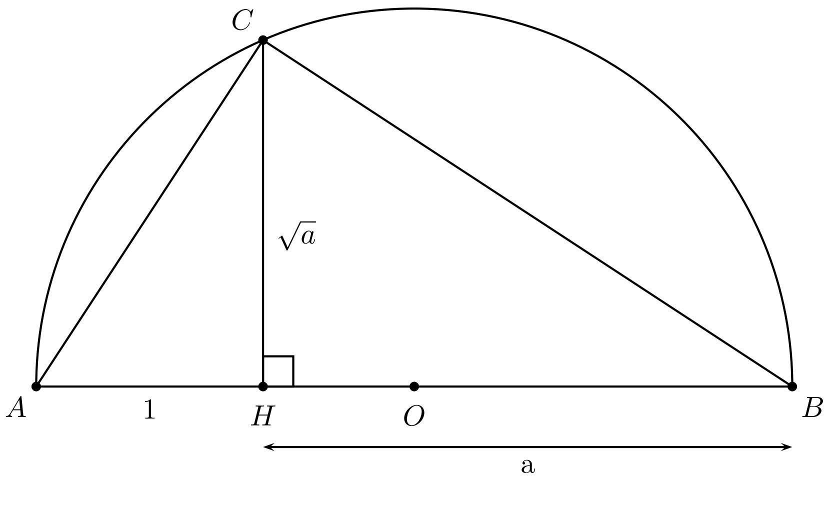
Une unité étant choisie. Soient O, A et B trois points alignés dans cet ordre tel que $OA = y$, $AB = x$.
Soit M un point du cercle de centre O, de rayon 1 et n'appartenant pas à (OA).
La parallèle à la droite (AM) passant par B coupe la droite OM en N.
On a alors : $MN = \dfrac{x}{y}$.
Autre possibilité.



c). On peut construire certains nombres irrationnels.
La diagonale d'un carré de côté 1, mesure $\sqrt{2}$.
La hauteur d'un triangle équilatéral de côté 2, mesure $\sqrt{3}$.



Construction du nombre $\sqrt{a}$ pour a strictement positif.



Soient trois points A, H et B alignés dans cet ordre, tels que $AH = 1$ et $HB = a$.

Le demi-cercle de diamètre $[AB]$ et la perpendiculaire à (AB) en H se coupent en C.

On a alors $AC = \sqrt{a}$.

Démonstration

Posons $HC = h$.
Dans le triangle AHC rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore on a :
$AH^2 + HC^2 = AC^2$ i.e. $1^2 + h^2 = AC^2$.
De même dans le triangle BHC rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore on a :
$HB^2 + HC^2 = BC^2$ i.e. $a^2 + h^2 = BC^2$
En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient : $1 + a^2 + 2h^2 = AC^2 + BC^2$.
Or le triangle ABC est inscrit dans un demi-cercle et l'un de ses côtés $[AB]$ est diamètre de ce demi-cercle, donc ABC est rectangle en C.
D'où d'aprés le théorème de Pythagore on a : $AC^2 + BC^2 = AB^2$ i.e. $AC^2 + BC^2 = (1 + a)^2$.
Donc $1+a^2+h^2 = (1+a)^2$ i.e. $1+a^2+h^2 = 1+2a+a^2$ ou encore $h^2 = a$. Comme $h \geqslant 0$ alors $h = \sqrt{a}$. ■

III] Nombres rationnels

Théoreme 1 (Admis).

- Tout nombre rationnel possède une écriture décimale illimitée périodique à partir d'un certain rang.
- Si l'écriture décimale illimitée d'un nombre réel est périodique à partir d'un certain rang alors ce nombre réel est un nombre rationnel.

Remarque

$\dfrac{2}{9} = 0,2222222\ldots$ $\qquad$ $\dfrac{456}{999} = 0,456456456\ldots$ $\qquad$ $\dfrac{12345}{99999} = 0,1234512345\ldots$

De façon générale pour tout nombre rationnel de $[0\,;1[$ dont la période dans son écriture décimale est $a_1a_2a_3\ldots a_n$,

on a : $0,a_1a_2a_3\ldots a_na_1a_2a_3\ldots a_n\ldots = \dfrac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{10^n - 1}$

IV] $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Théoreme 2.

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Démonstration

- Soit $p \in \mathbb{N}$. Démontrons d'abord que si p^2 est pair alors p est pair.
  - Si p est pair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$. D'où $p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$ donc p^2 est pair.
  - Si p est impair alors $p - 1$ est pair d'où il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p - 1 = 2k$ i.e. $p = 2k + 1$.
  D'où $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$. Donc p^2 est impair.
  Donc la seule possibilité pour que p^2 soit pair est que p soit pair. i.e. p^2 pair implique p pair.
- Démontrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel par l'absurde.
  Supposons que $\sqrt{2}$ est nombre rationnel.
  Donc il existe p et q deux entiers naturels tel que $q \neq 0$ et $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec $\dfrac{p}{q}$ irréductible.
  On a alors $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\dfrac{p}{q}\right)^2$ d'où $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$ i.e. $p^2 = 2q^2$.
  Ce qui signifie que p^2 est pair et d'après le premier point que p est pair.
  D'où il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$.
  Ce qui fait que $(2k)^2 = 2q^2$ i.e. $4k^2 = 2q^2$ ou encore $q^2 = 2k^2$.
  Ce qui implique que q^2 est pair et toujours d'après le premier point, q est pair.
  Comme p et q sont pairs alors la fraction n'est pas irréductible. Ce qui est contradictoire.
  Donc il n'existe pas de nombres entiers naturels p et q, (avec $q \neq 0$) tel que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.
  $\sqrt{2}$ est donc irrationnel. ■

V] Nombre d'or :

Définition 3.

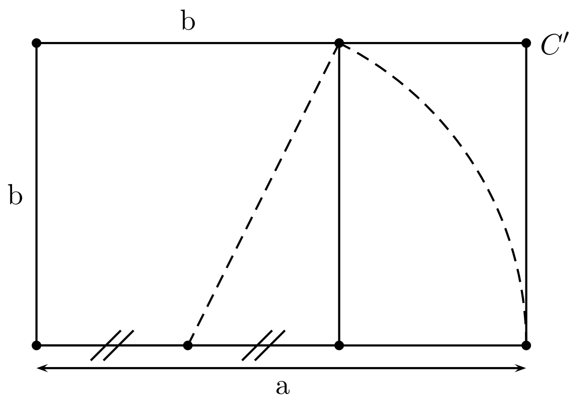
Le nombre d'or est une proportion, définie initialement en géométrie comme l'unique rapport $\frac{a}{b}$ entre deux longueurs a et b telles que le rapport de la somme des deux longueurs $(a+b)$ sur la plus grande (a) soit égal à celui de la plus grande (a) sur la plus petite (b) c'est-à-dire lorsque $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. Le découpage d'un segment en deux longueurs vérifiant cette propriété est appelé par Euclide découpage en « extrême et moyenne raison ». Le nombre d'or est maintenant souvent désigné par la lettre ϕ.

Source : wikipédia

Preuve de : $\phi^2 - \phi - 1 = 0$.

Résolution de l'équation en passant par la forme canonique du trinôme : $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Construction du rectangle d'or :



$\dfrac{a}{b} = \phi$

Fin des séances :
- Écriture des nombres dans différentes bases.
- Recherche internet sur d'autres nombres (nombres univers, nombres normaux)
- Mini exposés sur l'histoire des nombres et de leurs notations. (nombres et équations)