Intervention Labomaths - Bellepierre

INTÉGRER DES ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES EN COURS...

Le constat… (un peu provoc')

- Les seuls matheux que les élèves connaissent sont Thalès et Pythagore… Euclide, Al Khwarizmi, Descartes et Pascal, peut-être… en cherchant bien… au passage, pas une femme dans le lot!
- Sur une frise chronologique, où se situent les grandes avancées mathématiques? À qui sont-elles dûes?
- On est pas spécialistes...
- On a déjà pas forçément le temps de boucler les progressions ni de digérer les nouveaux programmes...

Où est l'intérêt?

- Cela peut permettre d'intéresser les élèves un peu moins matheux
- Inscrire les notions abordées dans un contexte autre que purement scolaire (problématiques réelles à une époque donnée, personnification…)
- Par petites touches, c'est pas forçément très chronophage
- On peut même y prendre goût...
- Comprendre l'émergence et la portée de l'introduction de nouveaux concepts (épistémologie!) permet souvent d'avoir une approche pédagogique plus pertinente.

  Les concepts les plus novateurs et les plus usités (preuve, nombres réels, équation, limites, vecteurs, fonctions, probabilité…) sont ceux qui ont mis souvent le plus de temps à émerger et à se stabiliser sous leur forme actuelle...

Ce que disent les programmes… un exemple:

Enseignement général Seconde (paragraphe Probabilités):

L’histoire des probabilités fournit un cadre pour dégager les éléments de la mathématisation du hasard.

Un exemple est le problème des partis, dit aussi du chevalier de Méré, l’échange de lettres entre Pascal et Fermat sur ce point puis les travaux de Pascal, Fermat et Huygens qui en découlent. Le problème du duc de Toscane ou les travaux de Leibniz sur le jeu de dé peuvent aussi être évoqués.

Ce que disent les programmes… un exemple:

Enseignement spécialité Première (paragraphe Probabilités):

Les probabilités conditionnelles peuvent être l'objet d'un travail historique en anglais; elles apparaissent en effet dans des travaux de Bayes et de Moivre, écrits en anglais au XVIIIe siècle, même si c'est Laplace qui en a élaboré la notion.

Les questions traitées par ces auteurs peuvent parfois surprendre (exemple: quelle est la probabilité que le soleil se lève demain, sachant qu'il s'est levé depuis le commencement du monde?); néanmoins, les probabilités conditionnelles sont omniprésentes dans la vie courante et leur utilisation inappropriée mène facilement à de fausses affirmations. L'histoire des probabilités contribue à la réflexion sur la codification d'une théorie scientifique.

On peut considérer que les origines du «calcul des probabilités» remontent au XVIIe siècle. Pascal, Huygens, Moivre, Bernoulli, Euler, d'Alembert appliquent les notions de variable aléatoire et d'espérance à des problèmes issus de questions liées aux jeux, aux assurances et à l'astronomie. Ce n'est que vers 1930 que la description actuelle, en termes d'univers, s'est imposée. Elle permet une formalisation souple dans laquelle l'univers joue le rôle de «source d'aléas».

La notion de variable aléatoire, présente sans définition précise depuis l'origine de la discipline, apparaît alors comme une fonction définie sur l'univers.

Ce que disent les programmes… un exemple:

Enseignement spécialité Terminale (paragraphe Probabilités):

La parution de l'*Ars Conjectandi* de J. Bernoulli (1713), reprenant notamment d'anciens travaux de Huygens, marque une rupture dans l'histoire des probabilités. On y trouve la première étude de la distribution binomiale, introduite dans le cadre d'un tirage sans remise pour un modèle d'urne. Un résultat majeur de cet ouvrage est son « théorème d'or », la loi des grands nombres, qui relie fréquences et probabilité, valide le principe de l'échantillonnage et est le premier exemple de « théorème limite » en théorie des probabilités.

Le mathématicien français Bienaymé (en 1853, publication en 1867) et le mathématicien russe Tchebychev (en 1867) démontrent l'inégalité qui porte leur nom, en parlant de fréquences d'échantillons plutôt que de variables aléatoires. Ils fournissent ainsi la possibilité d'une démonstration plus simple de la loi des grands nombres. Au début du XIX e siècle, la modélisation des erreurs de mesure va devenir centrale pour faire de la statistique une science à part entière. Lagrange et Laplace développent une approche probabiliste de la théorie des erreurs. Gauss (1809, 1821), après Legendre (1805), imagine une méthode des moindres carrés qu'il applique avec succès à la prédiction de la position d'un astéroïde. Il y propose de comprendre l'écart-type comme une « erreur moyenne à craindre ».

L'introduction de méthodes statistiques en sociologie est l'œuvre du mathématicien et astronome belge Quételet dans les années 1830. Il réfléchit à la distribution de données autour de la moyenne, ce qui sera approfondi notamment par l'Anglais Galton.

Ce que disent les programmes...

- Un résumé d'histoire des probabilités.
- Les noms clés.
- Quelques exercices/problématiques phares mentionnés…

… mais pas beaucoup plus.

Des pistes, en pratique...

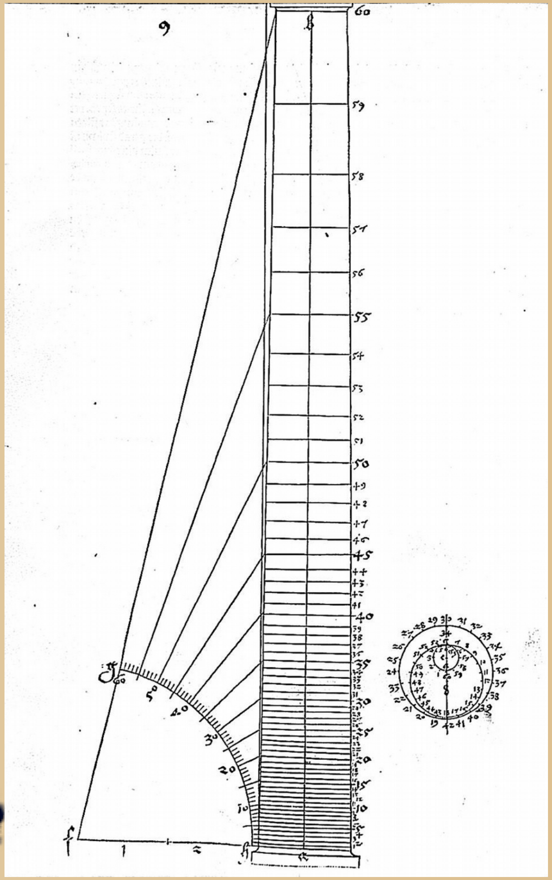
2 remarques:

- Cela ne nécessite pas de modifier entièrement son cours!
- Il n'y a pas forcément de séances dédiées à mettre en place

Des pistes, en pratique...

- **Élements historiques introductifs:**
  - Motivations à l'introduction de nouveaux concepts
  - Problèmes introductifs et exercices emblématiques
- **Remise dans le contexte historique:**
  - d'une notion
  - d'un exercice
- **Parenthèses historiques et géographiques:**
  - Les mathématiciens
  - Les notations
  - L'évolution des concepts / présentation des problèmes.
    Définition des proba conditionnelles par Bayes… Degrés Vs radians...
  - L'évolution des méthodes de résolutions & preuves anciennes…
    (approximations de pi, résolution par l'exemple → preuve analytique…)
  - Le contexte social et/ou scientifique du développement d'une notion.

Élements historiques introductifs



- Motivations à l'introduction de nouveaux concepts

- Problèmes introductifs et exercices emblématiques

Élements historiques introductifs

<u>Motivations historiques à l'émergence de concepts</u>

Quelques exemples:

- **Néper et les logarithmes**:

  Transformer les multiplications en addition pour faciliter les calculs sans calculatrice

  C'est l'occasion de montrer une table de logarithme, par exemple.

- **Cardan & Bombelli et les *nombres sophistiques***

  (du latin sophisticus = captieux : qui cherche à tromper)

  Résoudre les équations du 3nd degré → voir remise dans le contexte.

- **Moivre et Laplace et le théorème central limite**:

  Quantifier les erreurs dues aux mesures en astronomies, approcher la loi binomiale de grand ordre pour éviter de calculer des gros coefficients binomiaux…

Élements historiques introductifs

<u>Exercices emblématiques introductifs</u>

(à résoudre après introduction des nouvelles notions)

Des exemples en probabilités:

- Le problème du Duc de Toscane, par Galilée
- Le problème des partis, par Pascal et Fermat

  (dont on peut donner les exemples de résolutions antérieures: Pacioli, Cardan, Tartaglia & Forestani et les soumettre à la critique...)
- Le problème du chevalier de Méré, par Pascal

ce genre d'exercices peuvent donner lieu à des débats en amont...

Le problème du Duc de Toscane

GALILÉE (1564-1642) : *Sulla scoperta dei dadi*, écrit vers 1620, publié en 1656!

On lance 3 dés et on parie sur la somme obtenue:

« Bien que le 9 et le 12 se composent en autant de façon que le 10 et le 11,…»

$$9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3$$

$$10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+4+1 = 5+3+2 = 4+4+2 = 4+3+3$$

«… si bien qu'ils devraient être considérés comme ayant la même chance, on voit néanmoins que la longue observation a fait que les joueurs estiment plus avantageux le 10 et le 11 plutôt que le 9 et le 12… »

Le problème des partis

Habillage de problèmes juridiques de partage ou d’indemnisation

Le problème posé par Pacioli (1494):

Une brigade joue à la paume :

- L'enjeu est de 10 ducats.
- il faut 60 pour gagner, chaque coup vaut 10.

Un incident survient qui force les soldats à interrompre la partie commencée, alors que le premier camp a gagné 50 et le second 20.

On demande quelle part de l'enjeu revient à chaque camp...

Le problème des partis

1494 Solution de Pacioli:

Répartir l'enjeu selon les points déjà gagnés

Ils ont marqué 70 pts au total. On repartit les 10 ducats selon les proportions marquées:

- *50/70 soit 5 septièmes pour le premier,*
- *20/70 soit 2 septièmes pour le second*

Le premier recoit donc 7,14 ducats et le second 2,86.

Remarque de Tartaglia: *«Sa règle ne me paraît ni bonne, ni belle, parce que s'il arrive qu'un parti ait 10 et l'autre rien, et qu'on procédât selon sa règle, le premier devrait tirer tout et le second rien; ce serait tout à fait déraisonnable que pour 10, il doive tirer tout.»*

Le problème des partis

1539 Solution de Cardan:

Repartir l'enjeu selon les points qu'il reste à marquer

- *Il reste 1 jeu au premier pour gagner*
- *Il reste 4 jeux à marquer au second pour gagner*
- *Il fait intervenir les „progressions“ associées*

  1+2+3+4 = 10   et   1 =1

  donne 10/11ieme au premier, 1/11ieme au second

Le premier reçoit donc 9,1 ducats et le second 0,9.

Le problème des partis

1556 Solution de Tartaglia:

Tenir compte de l'écart de points: L'écart de gain est proportionnel à l'écart de points.

- *On calcule l’écart entre les 2 équipes:*
  50-20 = 30 pts
- *On rapporte ce résultat au total de 60 à atteindre : 30/60= ½*
  Cet écart représente ½ du total des points nécessaires pour gagner.
- *L’écart de gain entre les 2 joueurs est égal à ½ des 10 ducats mis en jeu soit 5 ducats.*

Le premier reçoit donc 7,5 ducats et le second 2,5.

Le problème des partis

1603 Solution de Forestani:

Tenir compte de la durée maximale du jeu

- *Un jeu dure au plus 11 coups.*
- *5 en on été gagné par le premier, 2 par le 2ieme*
- *Les 4 = 11 – (5+2) jeux restants ne sont pas tranchés*
- *On donne donc (5+ 2)/11ièmes de la mise au premier*

  et (2+2)/11ièmes de la mise au second

Le premier reçoit donc 6,36 ducats et le second 3,64.

Le problème des partis

1654 Solution de Pascal et Fermat

Un des problèmes proposés à Pascal par le chevalier de Méré

Deux joueurs misent chacun 32 pistoles.

*Ils jouent une série de parties d'un jeu de **hasard équitable.***

Le premier qui gagne trois parties emporte les 64 pistoles.

Mais le jeu est interrompu alors que le premier joueur a gagné deux parties et l'autre une...

Comment les 64 pistoles doivent-elles être réparties ?

Pascal et Fermat discutent de ce problème dans leur correspondance et partagent leurs solutions respectives*. Ils ont la même approche (utilisant les éléments qui seront formalisés chez Huyghens peu de temps après) mais des présentations différentes…

Ils imaginent la suite du jeu...

La solution de Pascal

$$\begin{array}{ccc} & \underline{2\text{-}1} & \\ \swarrow^{1/2} & & \searrow^{1/2} \\ \color{red}{3\text{-}1} & & \color{blue}{2\text{-}2} \end{array}$$

Si au coup suivant on a 3-1 → le premier gagne la totalité: 64 pistoles

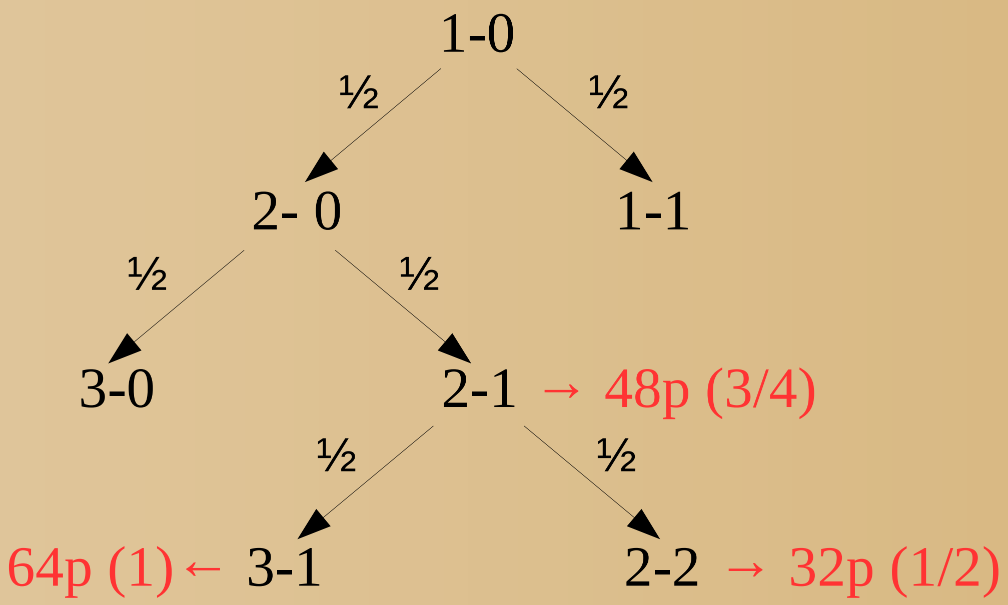
Si au coup suivant on a 2-2 → les 2 partagent, le premier gagne 32 pistoles

On calcule la moyenne des gains possibles: (64+32)/2=48

Le premier reçoit 48 pistoles et le second 16.

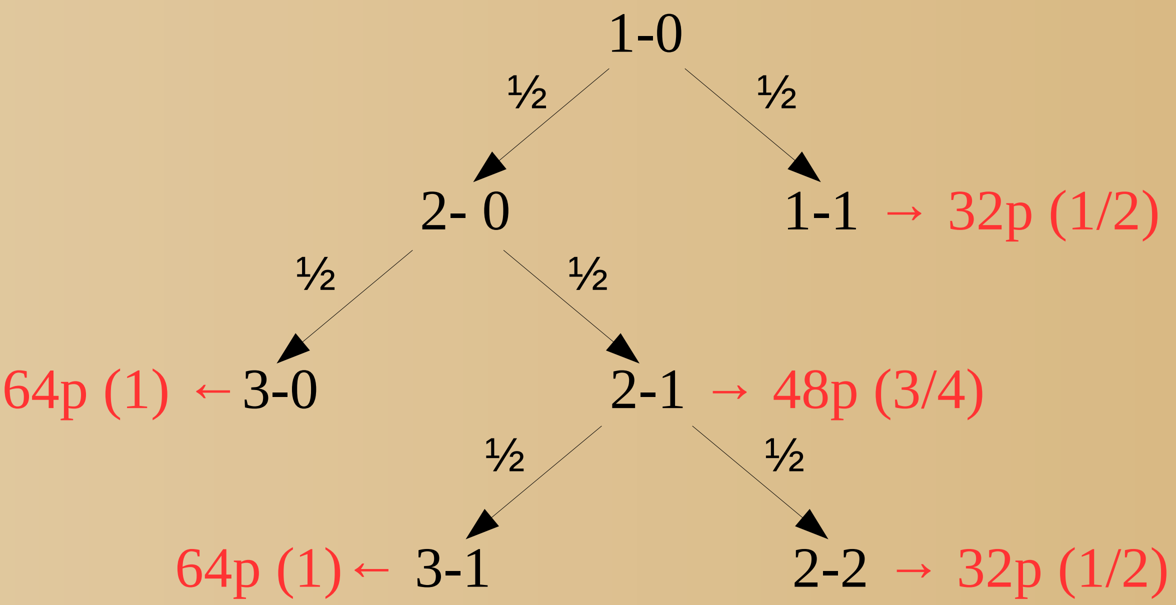
La solution de Pascal

Et si une seule partie a été jouée?



La solution de Pascal

Et si une seule partie a été jouée?



La solution de Pascal

Et si une seule partie a été jouée?

1-0 → 44p (11/16)

½ ½

56p (7/8) ← 2- 0 1-1 → 32p (1/2)

½ ½

64p (1) ← 3-0 2-1 → 48p (3/4)

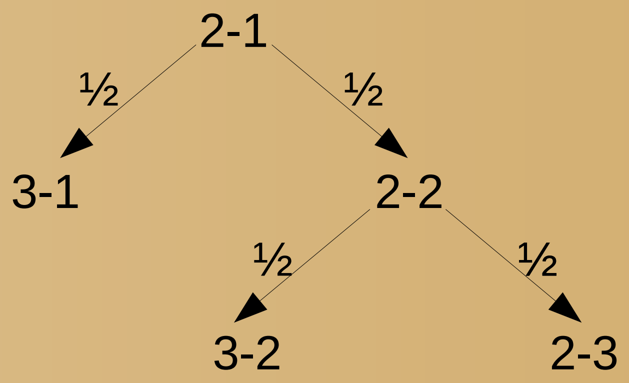
½ ½

64p (1) ← 3-1 2-2 → 32p (1/2)

La solution de Fermat

On résume les futurs scores possibles dans un tableau jusqu'à ce que tous les parties soient gagnées...

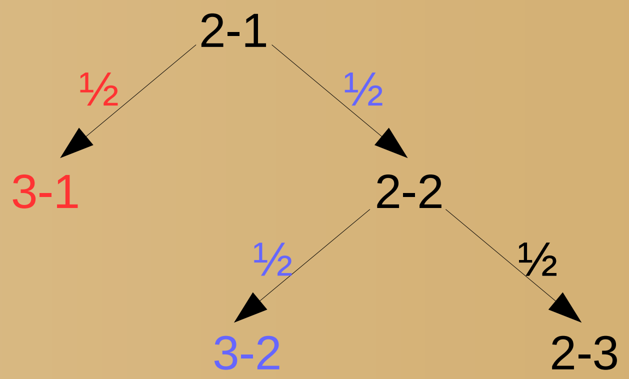
2-1	3-1	3-2
		4-1
	2-2	3-2
		2-3



La solution de Fermat

On résume les futurs scores possibles dans un tableau jusqu'à ce que tous les parties soient gagnées...

2-1	3-1	3-2	½
		4-1	
	2-2	3-2	¼
		2-3	



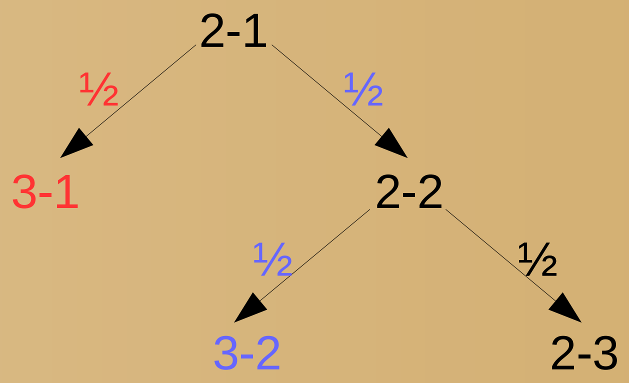
Le premier joueur gagne

- Au premier coup avec une chance sur 2 (2 chance sur 4): score 3-1: ½
- Au coup suivant avec une chance sur 4: score 3-2: ¼ = ½ × ½

La solution de Fermat

On résume les futurs scores possibles dans un tableau jusqu'à ce que tous les parties soient gagnées...

2-1	3-1	3-2	½
		4-1	
	2-2	3-2	¼
		2-3	



Il a donc 3 chances sur 4 de gagner $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$…

Le premier joueur recoit ¾ de la mise: $\frac{3}{4} \times 64 = 48$ Pistoles

La solution de Fermat

Et si une seule partie avait été jouée?

1/4 +1/4+ 3/16

= 11/16

Le premier gagne les 11/16 iemes des 64 pistoles: 44 pistoles!

<table>
<tr><td rowspan="16">1 - 0</td><td rowspan="8">1 - 1</td><td rowspan="4">1 - 2</td><td rowspan="2">1 - 3</td><td>1 - 4</td><td></td></tr>
<tr><td>2 - 3</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2 - 2</td><td>2 - 3</td><td></td></tr>
<tr><td>3 - 2</td><td>1/16</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2 - 1</td><td rowspan="2">2 - 2</td><td>2 - 3</td><td></td></tr>
<tr><td>3 - 2</td><td>1/16</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3 - 1</td><td>3 - 2</td><td rowspan="2">2 x 1/16</td></tr>
<tr><td>4 - 1</td></tr>
<tr><td rowspan="8">2 - 0</td><td rowspan="4">2 - 1</td><td rowspan="2">2 - 2</td><td>2 - 3</td><td></td></tr>
<tr><td>3 - 2</td><td>1/16</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3 - 1</td><td>3 - 2</td><td rowspan="2">2 x 1/16</td></tr>
<tr><td>4 - 1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3 - 0</td><td rowspan="2">3 - 1</td><td>3 - 2</td><td rowspan="4">4 x 1/16</td></tr>
<tr><td>4 - 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4 - 0</td><td>4 - 1</td></tr>
<tr><td>5 - 0</td></tr>
</table>

Le problème des partis

Expérience en classe de TS, 1996, N. Vogel.

Travail autour du problème des partis

Cadre: 6h combinatoire + 2h proba élémentaires en classe

Seuls 13 sur 34 élèves ont eu un enseignement de proba avant.

Devoir maison:

Jeu équitable en 8 points. Mise totale 84€. Quelle répartition des gains selon les scores où la partie est intérromptu:

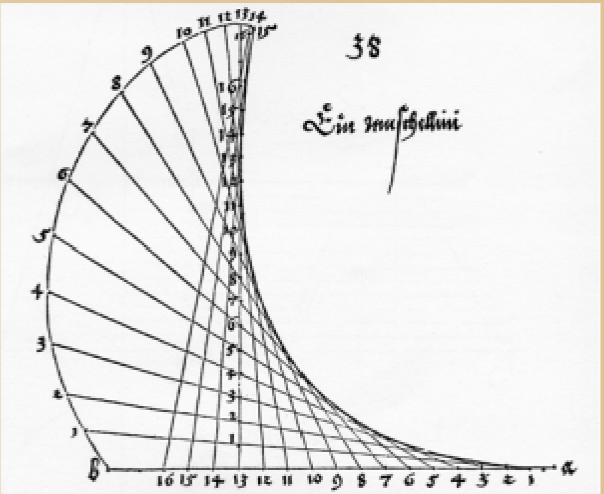
a) 7-5 b) 1-0 c) 7-0

Le problème des partis

- 8 font le partage de Pascal & Fermat, avec l'approche de Pascal.
- 18 font le partage de Pacioli proportionnel aux points
- 1 fait le partage de Tartaglia en tenant compte des écarts
- Aucun ne fait le partage de Cardan ou Forestani
- 3 envisagent une répartition 42-42 dans les 3 cas dont un qui pense que la chance pourrait tourner...
- 4 n'ont pas répondu

- Chez ceux qui ont fait des probabilités avant, 46% proposent la repartition proportionnelle aux probabilités
- Chez les autres, seulement 10%.

Remise dans le contexte



- Les mathématiques ne sont pas le fruit d'une génération spontanée.

- Les mathématiques et le monde réel.

- Les mathématiques aident au calcul

Remise dans le contexte

- **Rome ne s'est pas faite en un jour… les maths non plus.**

  Certains se sont trompés et des grands noms ont aussi été un peu réac!
  - Nombres complexes (… et nombres négatifs)
  - D'Alembert et le jeu du croix ou pile
  - Le chevalier de Méré joue au dés...
- **La mathématique est-elle un outil décisionnel?**
  - Espérance mathématique: Le paradoxe de Saint Petersbourg, par D. Bernoulli
- **En l'absence d'outils tels que la calculatrice, comment faisait-on?**
  - Étude de fonctions: Abaques et nomogrammes basés sur des fonctions paraboliques ou utilisant les propriétés du log…
  - Étude de suites: Méthode de Héron pour approcher une racine carrée
  - Moivre-Lapalce: Quantifier les erreurs sans calculer de gros coefs binomiaux...
- **Preuves anciennes / preuves alternatives**

Historique des nombres complexes

- **≈ - IIe siècle, Héron** et **Diophante** rejètent les équations dont la résolution n nécessite de prendre la racine d'un nombre négatif
- **IXe siècle Mahavira**,

  «Comme dans la nature un négatif n'est pas un carré, il n'a donc pas de racine carrée.»
- **1494 Pacioli**, $X^2+aX+b=0$

  «La solution est possible si le terme constant est inférieur ou égal au carré de la moitié du coefficent du terme du premier degré.»
- **1540 Tartaglia,** *résolution de certaines équations du troisième degré*

Historique des nombres complexes

1545 Cardan, *Ars Magna*.

- *«Diviser 10 en deux parties telles que le produit des parties soit 30 ou 40.»*

Il dit tout de suite que c'est manifestement impossible. Pourquoi, d'ailleurs?

« … sic tamen operabimur… » (Néamoins nous opérerons).

Il obtient les quantités $5+\sqrt{-15}$ et $5-\sqrt{-15}$ (avec un produit des parties valant 40).

Il appelle ces quantités «réellement *sophistiques*» et juge que leur étude serait «*aussi subtile qu'inutile*»

- Résolution des équations cubiques du type $X^3+pX=q$ avec p et q positifs.

Il pose $u-v=q$ et $uv=(p/3)^3$ et obtient $X=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$ avec

$$u = \sqrt{(q^2/4 + p^3/27)} + q/2 \text{ et } v = \sqrt{(q^2/4 + p^3/27)} - q/2$$

Si le polynôme a 3 racines réelles distinctes, , alors u et v sont *sophistiques*… un nombre réel peut donc être la différence entre deux nombres sophistiques... ce qui est un peu ennuyeux…

(ce cas sera résolu par Euler, 1732)

Historique des nombres complexes

- **1572 Bombelli,** Utilisation de $\sqrt{-1}$ dans l'*Algebra.*

  Enoncé des règles de multiplication $(\pm\sqrt{-1})\times(\pm\sqrt{-1})$
- **1637 Descartes,** Définition des nombres imaginaires
- **1777 Euler,** Apparition de la notation i pour $\sqrt{-1}$
- **1797 Wessel,** Correspondance entre nombres imaginaires et points du plan
- **1806 Argand**, **1815 Cauchy,** Définition du plan complexe
- **1831 Gauss,** Définition d'un nombre complexe sous la forme $a+ib$ avec a et b réels
- **1850 Hamilton,** Définition d'un nombre complexe comme couples de réels pour lesquels on définit une somme et un produit.

Le statut des nombres négatifs… une histoire déjà complexe!

Les mathématiciens utilisent les nombres négatifs et leurs racines dans les calculs mais ils ne sont pas acceptables comme solutions…

… et cela ne changera vraiment qu'au XIXe siècle!

1831 De Morgan, à propos des solutions négatives d'un problème :

« L'expression imaginaire $\sqrt{-a}$ et l'expression négative $-b$ se ressemblent en cela que chacune d'elles, lorsqu'elle apparaît comme solution d'un problème, indique qu'il y a là quelque inconsistance ou absurdité. Pour ce qui concerne la réalité de leur signification, toutes deux sont également imaginaires puisque $0 - a$ est tout aussi inconcevable que $\sqrt{-a}$. »

Le statut des nombres négatifs...

- **-IIe → Ie** *Jiǔzhāng Suànshù (Neuf chapitres sur l'art mathématique),*

  compilation de textes anonymes, commentée en **263** par **Liu Hui.**

  Sur les abaques, les positifs = baguettes rouges, les négatifs = baguettes noires

- **628, Brahmagupta,** *Brahmasphutasiddhanta*

  Enoncé des règles d'addition avec les nombres négatifs.

  « Une dette retranchée du néant devient un bien, un bien retranché du néant devient une dette. »

- **IXe, Al Khwarizmi,** *Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala*
  (Abrégé du calcul par la reduction et la comparaison)

On s'en sert dans les calculs, mais on s'en débarasse dès qu'on peut:

L'opération *Al-jabr (reduction)* consiste à supprimer les soustractions dans les équation du 2nd degré.

Seules des solutions positives (appelées *racines*) **sont acceptables**.

Le statut des nombres négatifs...

- **1494 Pacioli** parle de *racines feintes*
- **1545 Cardan** parle de *quantités défaillantes* en opposition avec les *quantités abondantes*
- **1637 Descartes** *« En chaque équation autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines : mais souvent il arrive que ces racines soient fausses ou moindres que rien. »*

… le problème, avec ces quantités, c'est leur réalité physique et leur comportement lors d'opérations…

- **1662 Pascal**

« Trop de vérité nous étonne ; j'en sais qui ne peuvent comprendre que, qui de zéro ôte 4, reste zéro.»

- **1803 Carnot** *« Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée? »*

Une règle des signes difficile à avaler!

- **1695 Wallis**: *«a étant un nombre positif, le quotient „a/0" est infini ; comme a/(−1) est plus grand, le dénominateur étant plus petit, il est plus grand que l'infini tout en étant inférieur à zéro, car le résultat est négatif. »*
- **1748 Mac Laurin:** (en avance!) donne une justification cohérente de la règle des signes:

  «+a−a=0, ainsi par quelque quantité qu'on multiplie +a−a, le produit doit être 0 : si je le multiplie par n, j'aurai pour le premier terme +na, donc j'aurai pour le second −na, puisqu'il faut que les deux termes se détruisent. Donc les signes différents donnent − au produit ? Si je multiplie +a−a par −n, par le cas précédent, j'aurai −na pour le premier terme ; doncj'aurai +na pour le second, puisqu'il faut toujours que les deux termes se détruisent : donc − multiplié par − donne + au produit.»

  Euler tentera une autre preuve de la règles des signes en 1774, pas convainquante.
- **1759 Maseres**: *« Elles* (les quantités négatives) *servent seulement pour autant que je sois capable d'en juger, à obscurcir la doctrine tout entière des équations et à rendre ténébreuses des choses qui sont dans leur nature excessivement évidentes et simples. Il eût été souhaitable en conséquence que les racines négatives n'aient jamais été admises dans l'algèbre ou qu'elles en aient été écartées.»*

Un petit pas de coté vers la physique...

Températures en dessous de 0 ou températures négatives?

- **1665, Hooke** Thermomètre à alcool, degré zéro = point de fusion de la glace. Les degrés correspondent à des millièmes du volume initial.
- **1700, Newton** Première échelle de température qualitative: une 20aine de points de référence allant de « l'air froid en hiver » jusqu'aux « charbons ardents du feu de cuisine ». Pas très scientifique.
  → degré zéro = neige fondante et 33 degrés = eau bouillante.

  Il peut donc faire des températures négatives… c'est pas très *grand public*…
- **1724, Fahrenheit** s'arrange pour que les températures négatives soient évitées: degré zéro = Température de fusion d'un mélange de chlorure d'ammonium et d'eau (température la plus basse mesurée durant l'hiver de 1708 à 1709 dans sa ville natale de Dantzig). 100 degrés = température d'un homme en bonne santé...
- **1730, Réaumur** Premier thermomètre scientifique à alcool. Zéro degré= congélation de l'eau, 80 degrés = point d'ébullition de l'«esprit-de-vin».
- **1742 Celsius** (comme Delisle en **1732**) Thermomètres basés sur la contraction du Mercure. degré zéro = ébullition de l'eau. 100 degré = congélation de l'eau (pour éviter les nombres négatifs?)

  Christin (1743) et **von Linné** (1744) inversent l'échelle peu de temps après.

  L'idée d'un zéro absolu fait progressivement son chemin: **Amontons** (1702), **Sadi Carnot** (1824) puis Lord **Kelvin (1848).** A cette température, théorique et inaccessible, les particules qui composent la matière (atomes, molécules) sont toutes dans le même état d'énergie minimale. Pouf pouf… plus besoin de nombres négatifs pour les températures!

Le statut des nombres négatifs...

- **1821 Cauchy** La règle des signes opère sur les symboles + et −, pas sur les nombres.
- **1867 Hankel** Définition et justification des comportements des signes avec les opérations usuelles via la notion d'opposé pour l'addition.

$$a + opp(a) = 0 \qquad opp(a) + opp(b) = opp(a+b)$$

$$opp(a) \times b = a \times opp(b) = opp(a \times b)$$

$$opp(a) \times opp(b) = a \times b$$

Ils reprennent les idées de Mac Laurin, mais à une époque où **les mathématiciens et les autres scientifiques acceptent que les mathématiques s'affranchissent des réalités physiques**…

Le statut des nombres négatifs

… et hors de toute réalité physique ou économique, c'est cohérent!

Cela donne accès au statut de nombre pour les nombres négatifs puis pour les nombres imaginaires et les nombres complexes!

Note: Les nombres complexes sont aujourd'hui utilisés largement en physique, en électricité notamment, et en économie pour traiter les cycles de croissance et de prix… joli pied-de-nez!

Remise dans le contexte: Radians ou Degrés?

- **Pourquoi utiliser les degrés plutôt que les radians?**
  - Il est utilisé depuis les babyloniens en astronomie!

    (La première apparition du mot radian est 1873, par le sud-africain Thomas **Muire**...)
  - Beaucoup de ratio de 360 sont entiers (c'est un nombre superabondant!), etça, qand on a pas de calculatrice, c'est plutôt bien!
- **Pourquoi utiliser les radians plutôt que les degrés?**
  - Il relie directement l'angle à la longueur de l'arc.

    Hipparque de Nicée (-190; -120) n'en était déjà pas loin avec ses les premières tables trigonométriques qui font correspondre l’angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.
  - Lorsqu'on utilise les fonctions trigo, il est agréable de bosser en radians: dérivation facile, identification du sinus d'un petit angle à la valeur de l'angle lui même...

Remise dans le contexte d'un exercice

D'Alembert et le CROIX ou PILE

On jete une pièce: une face porte une C*roix*, l'autre une P*ile* (marque de sa fabrication faite par le marteau lors de la frappe…)

Quelle est la probabilité d'obtenir une C*roix* en 2 essais? 3 essais?

Résolution à la manière de Fermat pour les 2 essais:

X	X-X	½
	X-P	
P	P-X	¼
	P-P	

½ + ¼ = ¾ → 3 chances sur 4.

Remise dans le contexte d'un exercice

Article de D'Alembert, Tome IV de l'Encyclopédie, 1754

«CROIX OU PILE, (analyse des hasards) Ce jeu qui est très-connu, & qui n'a pas besoin de définition, nous fournira les réflexions suivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amenera croix en jouant deux coups consécutifs. La réponse qu'on trouvera dans tous les auteurs, & suivant les principes ordinaires, est celle-ci. Il y a quatre combinaisons,

De ces quatre combinaisons une seule fait perdre & trois font gagner ; il y a donc ***3 contre 1 à parier*** *en faveur du joüeur qui jette la piece. S'il parioit en trois coups, on trouveroit huit combinaisons dont une seule fait perdre, & sept font gagner ; ainsi il y auroit 7 contre 1 à parier. Voyez COMBINAISON & AVANTAGE. Cependant cela est-il bien exact ? Car pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent croix au premier coup ? Car dès qu'une fois croix est venu, le jeu est fini, & le second coup est compté pour rien. Ainsi il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles :*

- *Croix, premier coup.*
- *Pile, Croix, premier & second coup.*
- *Pile, pile, premier & second coup.*

Donc ***il n'y a que 2 contre 1 à parier.*** *[…] Ceci est digne, il me semble, de l'attention des calculateurs & iroit jusqu'à reformer bien des règles unanimement reçues sur les jeux de hasard. [...]»*

Remise dans le contexte d'un exercice

- D'alembert poussé à l'extrème:

  Il y a une chance sur deux de gagner au loto…

- Insister sur la notion d'univers.
- Avoir un regard critique sur l'expression *«nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles»* et sur l'hypothèse d'équidistribution sous-jacente.

Remise dans le contexte d'un exercice

Le chevalier de Méré joue au dés...

1. On jette un dé non pipé n fois.
   a) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un 6.
   b) A partir de quelle valeur de n cette probabilité est-elle plus grande que ½ ?
2. On jette simultanément deux dés n fois.
   a) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un double 6.
   b) A partir de quelle valeur de n cette probabilité est-elle plus grande que ½ ?

Remise dans le contexte d'un exercice

Lettre de Pascal à Fermat, 29 juillet 1654:

«Monsieur,

Je n'ai pas eu le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré, car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre (c'est, comme vous savez, un grand défaut) et même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et je n'ai jamais pu l'en tirer. Si vous pouviez le faire, on le rendrait parfait.

Il me disait donc qu'il avait trouvé fausseté dans les nombres par cette raison: Si on entreprend de faire un six avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625. Si on entreprend de faire Sonnez *avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24. Et néanmoins 24 est à 36 (qui est le nombre des faces de deux dés) comme 4 à 6 (qui est le nombre des faces d'un dé).*

Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait: mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes.»

Remise dans le contexte d'un exercice

Daniel Bernoulli et le paradoxe de Saint-Petersbourg

(*Specimen theoriae novae de mensura sortis*, 1738)

Le joueur parie une mise initiale encaissée par la banque.

On lance une pièce de monnaie à pile ou face N fois. Si le premier Face apparaît au k-ième lancé, le joueur encaisse 2^{k-1} euros. Si Face n'apparait pas, alors le joueur encaisse 2^N euros.

1. Calculer la probabilité que le joueur gagne 2n euros, pour n=0,.. ,N.
2. Calculer l'espérance de gain du joueur en fonction de N.
3. Calculer la limite de cette espérance lorsque N tend vers l'infini.
4. On modifie le jeu de manière comme si N était infini: cela revient à supposer qu'on lance la pièce, tant que Pile apparaît.

   La mise initiale est de 20 euros. Êtes-vous prêts à jouer? Pourquoi?

Remise dans le contexte d'un exercice

Si le jeu est infini, alors l'espérance de gain est infinie, elle est donc supérieure à n'importe quelle mise initiale… Il y a donc *avantage à jouer*... alors pourquoi ne veut-on pas jouer?

- par incapacité à se représenter le calcul correct et son résultat ;
- parce que la valeur accordée à une somme d'argent n'est pas une fonction simplement linéaire : on accorde à chaque euro supplémentaire une utilité différente.
- aversion au risque: le risque est un coût, et qu'une chance sur deux de gagner 2 euros ou zéro, ça ne vaut pas 1 euro…

<u>Cela a remis en question la notion d'espérance mathématique, comme outil décisionnel</u>, et donné lieu à des tentatives de définition d'une *espérance morale* et de *fonctions d'utilité* qui palieraient à cet défaut → théorie du risque

Remise dans le contexte d'un exercice

Un nomogramme de Clarke

On considère la fonction f, définie sur R par $f(x)=x^2/10$.

Soient a et b deux nombres positifs.

On place sur la courbe de f les deux points A $(-a,f(-a))$ et B $(b,f(b))$.

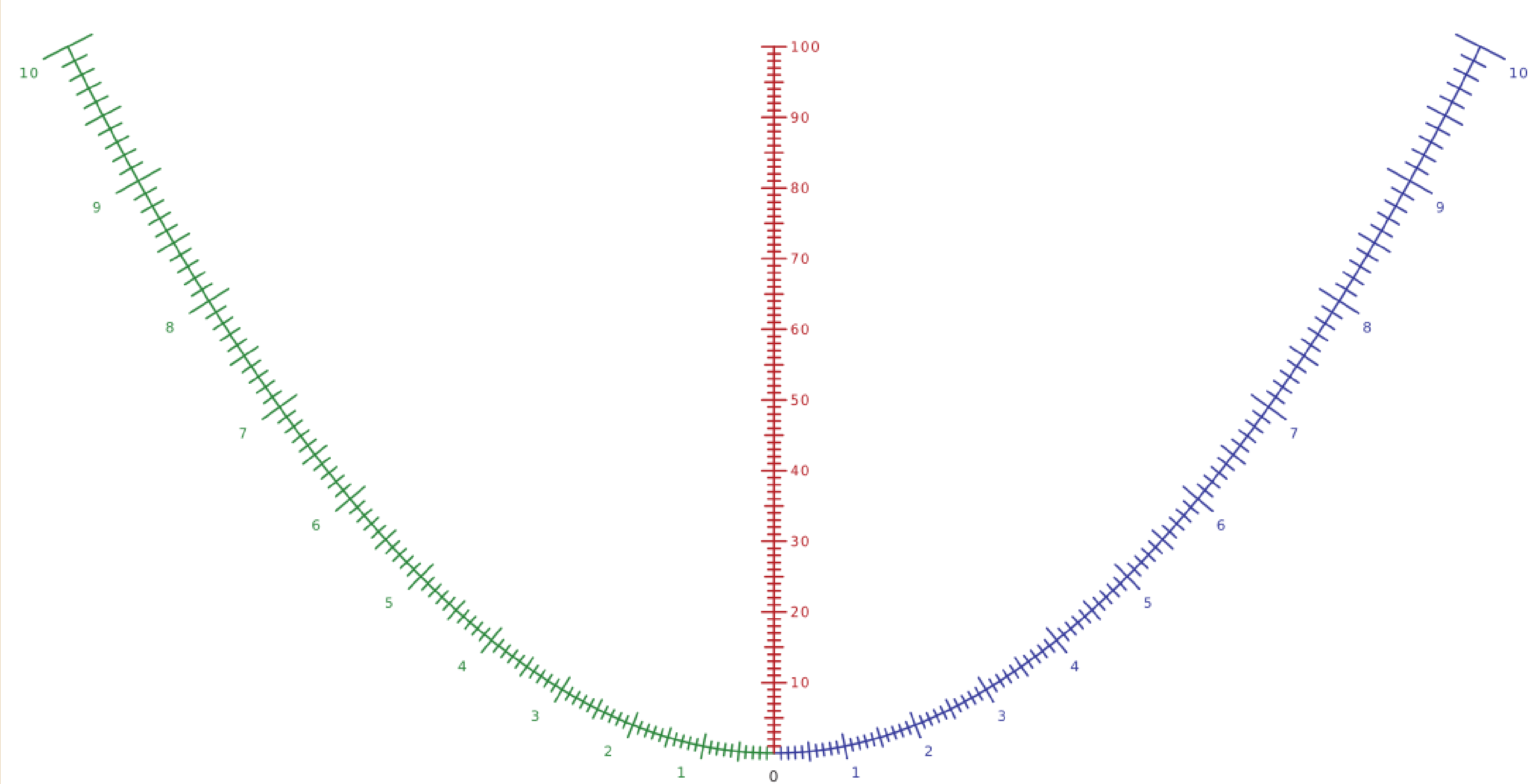
En quel point la droite AB coupe-t-elle l'axe (Oy)?

L'équation de la droite AB est $y=(b-a)x+ab$, donc la droite AB coupe l'axe au point $(0,ab/10)$.

Cela n'a l'air de rien, mais on peut baser un nomogramme (Clarke, 1905) qui effectue la multiplication de 2 nombres grâce a ce petit résultat!

Remise dans le contexte d'un exercice

A l'aide d'une corde, on joint *a* en vert à *b* en bleu, pour trouver *ab* en rouge



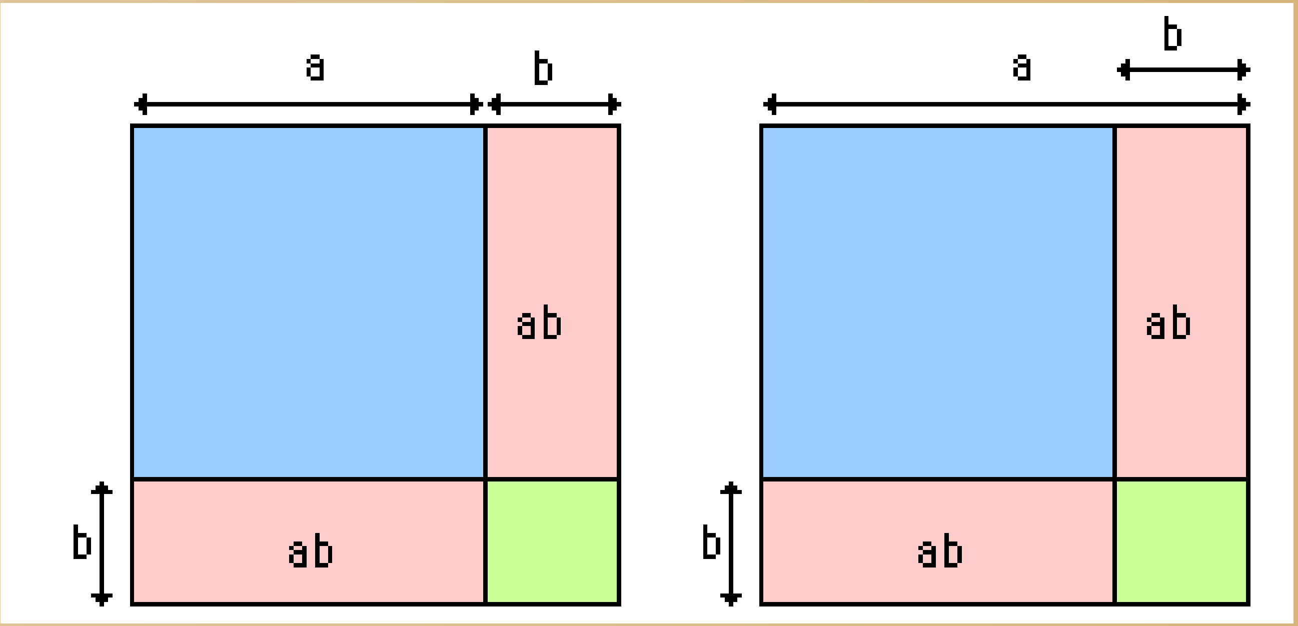
Remise dans le contexte d'un exercice

- Même si ce n'est pas forçément très précis, c'est mieux que rien quand on a pas de calculatrice…
- Voir http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article788 pour d'autres abaques et nomogrammes de multiplication

certains nomogrammes utilisent les propriétés des logarithmes. Cela peut être l'occasion de parler de la règle à calcul.

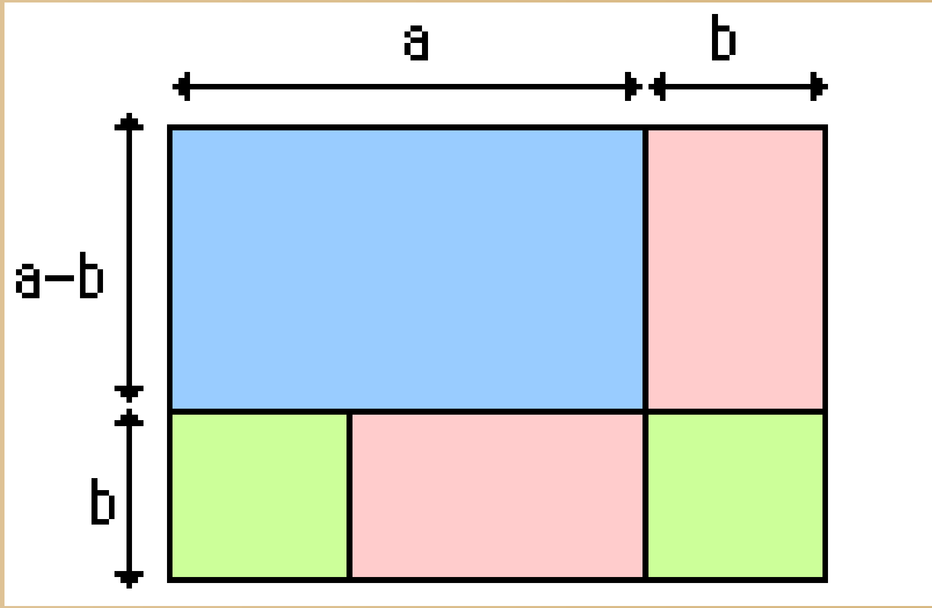
Preuves anciennes/preuves alternatives

- Identités remarquables et géométrie: développement de $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$

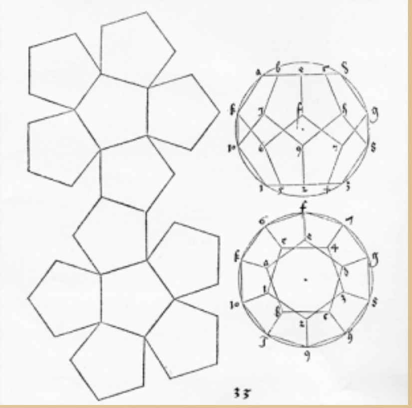


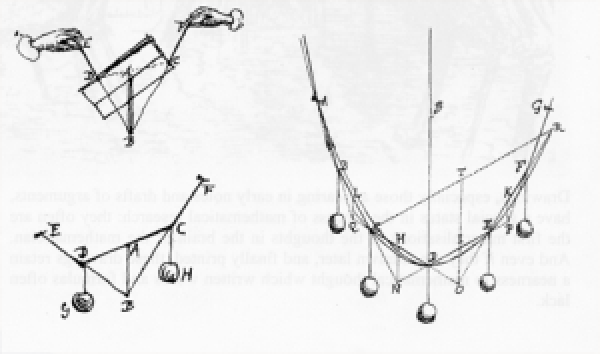
Preuves anciennes/preuves alternatives

- Identités remarquables et géométrie: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$



Parenthèses géographiques et historiques





- Anecdotes sur les mathématiciens

  → C'est aussi de la remise dans le contexte historique!

- Géographie de l'émergence des concepts

  → en finir avec l'européano-centriste…

- Frises chronologiques des concepts
- Evolution des notations
- Définitions / Preuves anciennes

Anecdotes sur les mathématiciens

- **Citations et fun facts** (en préambule des cours ou en fin de devoirs)

  Voir par exemple https://mathix.org/linux/le-saviez-vous

  "Les mathématiciens sont comme les français : quoique vous leur dites, ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent." Goethe (1749 −1832)

- **Eléments de vie** (mythe ou réalité?… à nuancer, des fois...)
  - Gauss et la somme des pemiers entiers à 10 ans,
  - La démonstration dans la marge de Fermat,
  - Turing, cyanure et Apple.
  - Cole et le nombre de Mersenne 2^{67}-1,

Anecdotes sur les mathématiciens

Frank Nelson Cole (1861-1926).

congrès de l'American Mathematical Society, 1903, Cole fait un exposé d'une heure, entièrement muet, où il établit les égalités

$$2^{67}-1=147.573.952.589.676.412.927=193.707.721\times761.838.257.287.$$

Cela lui vaut une ovation debout…

Marin Mersenne (1588-1648), moine et mathématicien français, propose de de chercher des nombres premiers parmi les 2^p-1 avec p premier.

→ Encore d'actualité aujourd'hui pour trouver des records. Dont le dernier en date: $2^{82\,589\,933}-1$

(décembre 2018, 24 862 048 chiffres en base 10...)

En 1903, on savait déjà que $2^{67}-1$ était décomposable (Lucas,1876), mais sans connaître ses diviseurs premiers.

C'est Cole qui les a enfin dévoilés, à l'issue de calculs ayant occupé tous ses dimanches pendant trois ans.

Anecdotes sur les mathématiciens

- **En finir avec l'européanocentrisme...**
  - Le *triangle de* ***Pascal*** *est* connu chez les chinois depuis au moins le IIIe siècle sous l'appelation *triangle de* ***Yang Hui*****.**

    En Italie, on l'appelle *triangle de* ***Tartaglia***.

    Khayaâm l'utilisait déjà au XIe siècle.

    « Les astres à ma présence ici-bas n'ont rien gagné,

    Leur gloire à ma déchéance ne sera pas augmentée;

    Et, témoin mes deux oreilles, nul n'a jamais pu me dire

    Pourquoi l'On m'a fait venir et l'On me fait m'en aller.»
  - **Pythogore**, d'accord, mais **Al Kashi**, c'est bien aussi!
  - **Al Kwarizmi**, père de l'algèbre et de l'algorithmique...

Anecdotes sur les mathématiciens

- **En finir avec l'européanocentrisme...**
  - Entendu à la cafétéria: *«C'est les arabes qui ont inventé les maths»*

    Les élements d'Euclide:

    - L'ouvrage fut traduit en arabe après avoir été donné aux Arabes par l'Empire byzantin.
    - Il a été „redécouvert“ par les européens au XIIe, traduit en latin d'après les textes arabes.
    - Cette redécouverte a été rendue possible par les échanges commerciaux de la route de la soie… ce qui explique la richesse de l'école mathématique perse, puis de l'école mathématique italienne à la renaissance…
- **Evolution de la langues commune des matheux:** du grec à l'arabe, puis de l'arabe au latin, puis du latin aux langues européennes (français, allemand, anglais, russe), puis des langues européennes à l'anglais au XIXe...

Anecdotes sur les mathématiciens

- **Comment travaillaient les matheux?**
  - **Le contexte social:** Les probabilités, Cardan, Galilée et l'église…
  - **L'importance de la correspondance:** les défis à la renaissance, Pascal/Fermat (voir problème des partis et problème du chevalier de Méré), Leibniz/Bernoulli (où l'on voit la rareté de certains écrits...).
  - **Les guerres fratricides:** Leibniz/Newton et la paternité du calcul infinitésimal
  - **Selon la place laissée à la recherche fondamentale par la société civile**

    Maison de la sagesse à Bagbad au IXe, Création des universités au Moyen-age en Europe au XIIe-XIIIe...

Anecdotes sur les mathématiciens

- **Mathématiciens et société civile**
  - **Gerbert d'Aurillac,** futur **pape Sylvestre 2** fait la promotion des nombres indo-arabes.
  - **Leibniz diplomate:** Peu après son arrivée à Mayence, il publie un court traité où il cherche à régler par déduction la question de la succession au trône de Pologne

    En 1672, il est envoyé en mission diplomatique à Paris pour convaincre Louis XIV de porter ses conquêtes vers l'Égypte plutôt que l'Allemagne, selon le plan conçu par Leibniz lui-même.
  - **Monge**, spécialiste de géométrie et de transport optimal a participé à la révolution française: Il est **membre du comité exécutif provisoire** d'août 1792 et **ministre**. Il suivra Napoléon lors de la campagne d'Egypte, participera à la fondation de l'Ecole polytechnique et deviendra **président du Sénat conservateur.**
  - **Volterra** mathématicien et physicien italien, l'un des pères de l'analyse fonctionnelle est élu **sénateur du royaume d'Italie** en 1905.

    « Les empires meurent, mais les théorèmes d'Euclide gardent leur jeunesse pour toujours ».
  - En 1917, le **ministre de la guerre** était **Painlevé**, spécialiste des équations différentielles…
  - **Borel**, père de la théorie de la mesure et un de ses amis, a été **ministre de la marine** en 1925
  - Plus recemment, **Villani** a été élu **député de l'Essonne**.

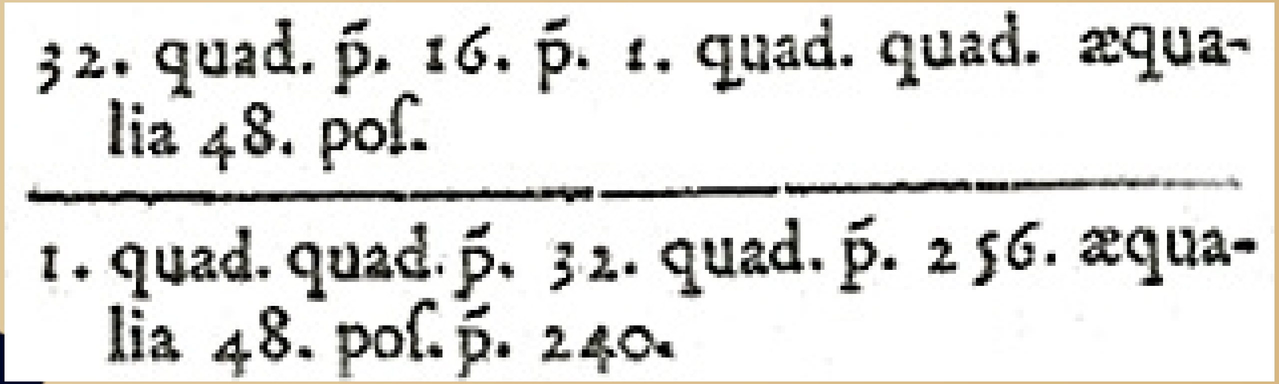
Evolution des notations

Un exemple sur la mise en équation

	Aujourd'hui	$4x^2 + 3x - 10 = 0$
René Descartes	*Vers 1640*	$4xx + 3x \propto 10$
François Viète	*Vers 1600*	*4 in A quad + 3 in A aequatur 10*
Simon Stevin	*Fin XVIe*	4 ② + 3 ① egales 10 ⓪
Tartaglia	*Début XVIe*	*4q p 3R equale 10N*
Nicolas Chuquet	*Fin XVe*	4^2 *p* 3^1 *egault* 10^0
Luca Pacioli	*Fin XVe*	*Quattro qdrat che gioto agli tre* n^0 *facia 10* (traduit par 4 carrés joints à 3 nombres font 10)
Diophante	*IIIe*	$\Delta^Y\delta \quad \zeta\gamma \quad \varepsilon\sigma\tau\iota \quad \iota$ (traduit par inconnue carré 4 et inconnue 3 est 10)
Babyloniens et Egyptiens	*IIe millénaire avant J.C.*	*Problèmes se ramenant à ce genre d'équation.*

Les équations chez Cardan

- L'inconnue *x*: il parle de chose ignorée qu'il appelle *positio* au sens latin de ce qui est à traiter et qu'il abrège en *pos.* ou *poſ*. Avec la forme ancienne du s long.
- *quad.* pour quadratique représente x^2
- Les *p.* et *m.* surmontés du tilda (~), signifient plus et moins (*minus*).
- *aequantur* ou *aequalia* signifie l'égalité.



32. quad. p̃. 16. p̃. 1. quad. quad. æqualia 48. poſ.

1. quad. quad. p̃. 32. quad. p̃. 256. æqualia 48. poſ. p̃. 240.

Extrait de l'*Ars Magna*

$32x^2+16+x^4=48x$

$x^4+32x^2+256=48x+240$

En évoquant Diophante...

Épitaphe de Diophante,
attribué à Métrodore (vers 500)

«Passant, sous ce tombeau repose Diophante,
Et quelques vers tracés par une main savante
Vont te faire connaître à quel âge il est mort :
Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
Le sixième marqua le temps de son enfance ;
Le douzième fut pris par son adolescence.
Des sept parts de sa vie, une encore s'écoula,
Puis, s'étant marié, sa femme lui donna
Cinq ans après un fils qui, du destin sévère
Reçut de jours, hélas ! deux fois moins que son père.
De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut :
Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut.»

Diophante qui a vécu entre le IIe et le Ve siècle est « redécouvert » en Europe occidentale par **Regiomontanus** en 1463 grâce à un manuscrit rapporté à Rome après la prise de Constantinople en 1453.

Les premières traductions de Diophante datent de la fin du XVIe siècle : **Bombelli** le traduit en italien en 1572 dans son Algebra, **Xylander** en latin en 1575, puis **Stevin** en français en 1585 .

Regiomontanus affirmait avoir vu 13 livres mais, jusqu'en 1971, seuls six livres subsistaient.

En 1971, quatre autres livres traduits en arabe sont découverts à Mechhed par **Rashed**

Evolution des définitions

Bayes et/ou Moivre et les probabilités conditionnelles

→ Etude des textes en anglais.

- Exemples chez Bayes

PROP. 3.

The probability that two ſubſequent events will both happen is a ratio compounded of the probability of the 1ſt, and the probability of the 2d on ſuppoſition the 1ſt happens.

PROP. 4.

If there be two ſubſequent events to be determined every day, and each day the probability of the 2d is $\frac{b}{N}$ and the probability of both $\frac{P}{N}$, and I am to receive N if both the events happen the 1ſt day on which the 2d does; I ſay, according to theſe conditions, the probability of my obtaining N is $\frac{P}{b}$. For

PROP. 5.

If there be two ſubſequent events, the probability of the 2d $\frac{b}{N}$ and the probability of both together $\frac{P}{N}$, and it being 1ſt diſcovered that the 2d event has happened, from hence I gueſs that the 1ſt event has alſo happened, the probability I am in the right is $\frac{P}{b}$[†].

PROP. 6.

The probability that ſeveral independent events ſhall all happen is a ratio compounded of the probabilities of each.

Evolution des définitions

Bayes et/ou Moivre et les probabilités conditionnelles

- Exemple d'une remarque de Moivre

What we have ſaid hitherto concerning two or more Events, relates only to thoſe which have no dependency on each other; as for thoſe that have a dependency, the manner of arguing about them will be a little alter'd: But to know in what the nature of this dependency conſiſts, I ſhall propoſe the two following eaſy Problems.

Suppoſe there is a heap of 13 Cards of one colour, and another heap of 13 Cards of another colour; what is the Probability, that taking one Card at a venture out of each heap, I ſhall take out the two Aces?

The Probability of taking the Ace out of the firſt heap is $\frac{1}{13}$, the Probability of taking the Ace out of the ſecond is alſo $\frac{1}{13}$; therefore the Probability of taking out both Aces is $\frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$, which being ſubtracted from 1, there will remain $\frac{168}{169}$, therefore the Odds againſt me are 168 to 1.

But ſuppoſe that out of one ſingle heap of 13 Cards of one colour, I ſhould undertake to take out, firſt the Ace, ſecondly the Two; tho' the Probability of taking out the Ace be $\frac{1}{13}$, and the Probability of taking out the Two be likewiſe $\frac{1}{13}$, yet the Ace being ſuppoſed as taken out already, there will remain only 12 Cards in the heap, which will make the Probability

of taking out the Two to be $\frac{1}{12}$, therefore the Probability of taking out the Ace, and then the Two, will be $\frac{1}{13} \times \frac{1}{12}$. And upon this way of reaſoning may the whole Doctrine of Combinations be grounded, as will be ſhewn in its place.

It is plain that in this laſt Queſtion, the two Events propoſed have on each other a dependency of Order, which dependency conſiſts in this, that one of the Events being ſuppoſed as having Happened, the Probability of the other's Happening is thereby alter'd; whereas in the firſt Queſtion, the taking of the Ace out of the firſt heap does not alter the Probability of taking the Ace out of the ſecond; therefore the Independency of Events conſiſts in this, that the Happening of one does not alter the degree of Probability of the other's Happening.

Evolution des notations
Newton Vs Leibniz

- **Newton**, philosophe, mathématicien et physicien, président de la Royal Society de Londres, et aussi alchimiste, astronome et économiste et bègue.
- **Leibniz**, philosophe, mathématicien et physicien, président de l'Académie des sciences de Berlin, et aussi juriste, linguiste, historien, géographe, diplomate, théologien et affublé d'une voix aigrelette.

Pendant 5 ans, ils vont se déchirer par lettres, communications scientifiques mémoires et écrits de leurs partisans afin de prouver qui, de l'un ou de l'autre, est le véritable inventeur du calcul intégral…

Evolution des notations
Newton Vs Leibniz

- Chez Newton, la théorie des fluxions est mise en forme dès 1665-1666 mais ne fait pas l'objet d'une publication. Il dira plus tard qu'il a mis du temps à l'écrire de peur des controverses que cela pourait entrainer...
- Chez Leibniz, le calcul différentiel présenté en 1684 puis développé en 1686 dans la revue *Acta Eruditorum*
- Newton publie 1687 son ouvrage le plus célèbre : les *Principia mathematica philosophiae naturalis* où il y présente le *calcul des fluxions.*
- Nicolas Fatio de Duillier, proche de Newton, en 1699 : *« Convaincu par l'évidence des faits, je reconnais que Newton fut le premier et de plusieurs années le plus ancien inventeur de ce calcul. »*
- John Keill, disciple de Newton, en rajoute une couche 1708. Il affirme dans un article que Newton avait, «*sans nul doute, inventé le premier l'arithmétique des fluxions*», mais que Leibniz «*avait publié ultérieurement, sous un nom différent, cette même arithmétique*».
- Le 4 mars 1711, Leibniz expédie à la Royal Society de Londres une protestation dans laquelle il dénonçait «*l'accusation impertinente de Keill*»

Evolution des notations
Newton Vs Leibniz

- Leibniz a omis de mentionner qu'il connaissait dès 1673, grâce à John Collins puis par une lettre de Newton lui-même, une partie des travaux de ce dernier...

  Mais l'Allemand reconnut seulement avoir eu vent d'une "méthode des tangentes" de Newton. Il dira qu'il y a dans les *Principa* des erreurs qui ne faisaient que révéler les défauts de la méthode de son concurrent.
- Newton s'est fait avoir par son culte du secret. Leibniz, lui, joue à fond la carte de la communication…
- Un comité de la Royal Society est nommé pour arbitrer la dispute. Il tranche en faveur de Newton (qui préside l'institution depuis 1703 et rédige lui-même le compte-rendu!). Ce compte-rendu est publié de façon anonyme en 1715:

  « Il faut [...] qu'il [Leinitz] renonce au droit qu'il prétend avoir à la méthode différentielle de M. Newton en tant que second inventeur : les seconds inventeurs n'ont pas de droit »
- La crise finit par prendre des accents nationalistes, s'élargit aux newtoniens s'opposant au leibniziens puis aux Britanniques contre les Continentaux… elle durera jusqu'à la mort de Leibniz et Newton continuera a ruminer jusqu'à la sienne...

Les notations des dérivées,
Newton Vs Leibniz… les physiciens n'ont pas tranché...

- Les fluentes de Newton sont les coordonnées x,y, z et leurs fluxions (vitesses) sont notées $\dot{x}$,$\dot{y}$, $\dot{z}$
- C'est Leibniz qui s'autorise en premier les notations dx/dt, dy/dt et dz/dt… ainsi que la notation de sommation infinie $\int dy = y$

On trouve plus tard la notation de Lagrange x', utilisée en mathématiques et celle d'Euler, plutôt fonctionnelle $D_t(x)$.