Présentation

Cette séquence de cours est intitulée « intervention ciblée d'un professeur de philosophie en classe de seconde, en liaison avec un cours de mathématique ».

Intervention ciblée, cela veut dire que le volume horaire est réduit. Pas plus de douze heures. Entre six et douze, le total des heures devant être modifié, bien sûr, si l'on désire approfondir un point particulier.

Le premier cours a eu lieu durant la semaine des mathématiques du Rectorat de La Réunion.
Cette semaine est une sorte de tradition qui nous vient du monde anglo-saxon... aux alentours du 14 mars. Le 3.14 de chaque année !
L'idée qui la sous-tend est qu'il est important de valoriser les mathématiques. Cette matière est d'une certaine façon une matière scolaire comme les autres, permettant d'obtenir une formation, mais dans notre système elle est devenue une matière de sélection des élèves. Ce que déplorent la plupart des mathématiciens. Pour eux, c'est en effet rendre un mauvais service aux mathématiques d'en faire une discipline sévère qui ne sert qu'à classer les élèves, comme si elle n'avait pas d'autre raison d'être ! L'arithmétique et la géométrie sont des pans essentiels de la pensée scientifique ; le calcul sous toutes ses formes est le socle de la culture générale scientifique qui semble indispensable à l'honnête homme du XXIe siècle !
Le plaisir de faire des mathématiques, comme on s'affronte à des casse-tête, devant faire preuve de rigueur mais aussi d'imagination, devrait être traduit dans les faits. En cours, dans l'idéal, les mathématiques apprennent à chaque élève qu'il peut compter sur sa raison, sur sa capacité personnelle à raisonner, pour construire des objets ou bien poser et résoudre des problèmes.

Pourquoi cette intervention ? De la part d'un professeur de philosophie, qui plus est ? Parce que les deux matières, philosophie et mathématiques, ont une profonde affinité.
Depuis l'antiquité, l'origine des mathématiques et de la philosophie, avec des auteurs passés à la postérité comme Thalès, Euclide, Pythagore, Archimède, mais aussi Platon ou Aristote, cette affinité a été une sorte d'évidence.
En témoigne le slogan du portail de l'Académie de Platon : « *Que nul n'entre ici* [pour apprendre à philosopher] *s'il n'est géomètre.* » Il faudrait, dit-on depuis lors, avoir acquis l'essentiel de la méthode des mathématiques avant de se lancer dans la lecture des grands textes de philosophie et de se confronter soi-même aux grandes questions philosophiques.
Car le mathématicien est pour la pensée européenne celui qui a compris deux choses essentielles :

- la nécessité de l'argumentation rigoureuse et pas seulement persuasive (la rhétorique, art de la persuasion, est un discours habile mais pas vraiment démonstratif)
- l'impératif de revenir au sens des mots qu'on emploie, de faire l'effort de définir ce dont on parle pour éviter les malentendus ou querelles stériles !

Certes ils ne sont pas les seuls à avoir ainsi développer la science en s'appuyant sur la raison. Mais ils sont remarquables par leur succès précoces, à une époque où bien des sciences demeuraient incertaines. Comme par exemple la médecine. Tôt dans l'histoire des sciences, les mathématiciens ont construit un édifice majestueux de connaissances. Ils ont systématisé la logique et inventé des méthodes de raisonnement remarquables (démonstration par l'absurde, algorithmes, raisonnement par récurrence...). Ils ont aussi donné l'exemple dans la construction de belles et utiles définitions !

C'est ce dernier point qui va retenir notre attention dans l'immédiat. En nous interrogeant sur ce qu'est une définition, à partir d'exemples variés, nous mettrons en évidence le progrès qui a pu s'effectuer dans l'ordre même de l'art de la définition qui a été rendu possible par l'esprit logique du mathématicien-philosophe.
Un de nos buts, peut-être le plus important, montrer que les mathématiques sont solidaires d'un art de la définition et de la démonstration.

Première partie. Les définitions, une certaine idée de la clarté et de la distinction

Le grand nom de la philosophie moderne, René Descartes a retenu dans son Discours de la méthode (1656) deux termes pour identifier la vérité d'un discours : la clarté et la distinction, par opposition à l'obscurité et à la confusion.

Dans cette première leçon quelques explications sont proposées, avec beaucoup d'exemples pour préciser ce qui est en jeu quand d'aventure on parle de « définition ». Tenter de faire de la clarté. Et découvrir (retrouver parfois, préciser aussi) le vocabulaire approprié pour dire la définition, ce qu'elle est et ce qu'elle n'est pas, ce qu'elle peut être. Éviter la confusion.
Définir la définition elle-même ? Quelle drôle d'idée ou quelle bonne idée ! En nous référant à divers objets, du quotidien d'abord, à des types de discours aussi, savants ou non, nous allons peu à peu préciser ce qu'est une définition, ce qu'elle doit être pour être convaincante, éclairante, et, plus encore, adéquate à son objet. À la fois claire et distincte.

Premier moment, à partir d'exemples simples de définitions

Chaise : « *Siège à dossier et ordinairement sans bras.* » Extrait du dictionnaire Littré.

Une définition est **une proposition** qui dit **ce qu'est une chose**...

À noter que dans notre définition de la chaise rien n'est dit du nombre de pieds... et de fait, il y a des chaises à 4, 3, 2, 1 et 0 pieds (comme la chaise à porteur) ! Toutes les informations ne sont pas également pertinentes quand il s'agit de produire une définition claire, précise, suffisante.

Licorne : « *Quadrupède qu'on représente avec le corps d'un cheval et la tête d'un cerf, mais avec une seule corne, et qui n'a pas d'existence réelle* » Extrait du dictionnaire Littré.

Une définition est une proposition qui dit ce qu'est une chose... ou qui dit **ce que signifie un mot**. Dans le premier cas il s'agit d'une **définition réelle** (*res* = chose). Et dans le second d'une **définition nominale**.
Attention aussi à la définition du mot « définition » qui pose problème comme on vient de le voir. Et encore ce qui vient d'être indiqué sur l'existence de plusieurs types de définitions est le moindre des problèmes. Ce n'est qu'un problème de **plurivocité**. Ce qui arrive quand un même mot peut avoir plusieurs usages, plusieurs significations.

Chaise [percée]: « *Siège garni d'un vase pour les besoins naturels.* » Extrait du dictionnaire Littré.
On dit ou disait « aller à la chaise » en faisant jouer une métonymie... comme on peut dire aussi « mouler un bronze » en faisant jouer une analogie ou « déposer une sentinelle » en produisant une comparaison ou « satisfaire ses besoins » avec un euphémisme à la clé. Toutes ces **figures de style** ne sont bien sûr aucune définition de chier mais permettent de se faire comprendre.

Revenons à quelque chose plus sérieux. Dans tous les cas, définition réelle ou nominale, complète ou incomplète, restreinte ou étendue, élégante ou argotique, la définition fonctionne de la même manière : un terme à définir ou **signifiant** est mis en relation avec un sens ou **signifié**.
Le discours permettant de définir est ordinairement prédicatif. Le verbe « être » (copule) est utilisé pour réaliser une prédication, c'est-à-dire lier un nom et un prédicat.
Les autres liaisons ne permettent pas de produire une définition. Par exemple l'utilisation de verbes ou d'expressions qui réalisent des jugements de valeur.

Chaise : « *Siège moins confortable qu'un fauteuil mais plus confortable qu'un tabouret.* »

Toutes les prédications sont au moins partiellement des définitions ou peuvent entrer dans des définitions, même si elles ne sont pas suffisantes pour être une définition, loin de là.

Guépard : « *Le guépard est le plus rapide des animaux terrestres* ». « *Le guépard est un félin de la savane.* »

Joseph Kosuth « *One and three Chairs* » (Musée Georges Pompidou)

Reposant sur des comparaisons (animaux plus ou moins rapides), n'attirant pas forcément l'attention sur l'essentiel (il y a des guépards dans des zoos) ces deux définitions manquent de rigueur. Chacun peut le sentir même s'il est plus difficile de voir vraiment ce que recouvre ce manque de rigueur.
Il existe des définitions qui s'efforcent d'être rigoureuses. Soit parce que la prédication est contrôlée, fixée dans le cadre d'une technique de définition par inclusion et exclusion. Une méthode. Par exemple il est possible de définir avec Aristote en donnant pour une chose quelconque toujours son **genre** et **une différence spécifique**.

Homme : « *Animal doté de raison* ». ou « *Animal doté du langage* ».

Ce qui peut être représenté avec des cercles concentriques (les individus, l'ensemble des individus possédant une même caractéristique spécifique ou l'espèce, l'ensemble des espèces ou le genre).

Guépard : « *Le guépard est le plus rapide des félins* ».

Nombre premier : « *Un nombre entier naturel est dit premier s'il est différent de 1 et s'il n'admet comme diviseurs que 1 et lui-même*. »

Est-ce une définition qui reprend le principe aristotélicien ? Non. Mais presque. C'est en fait une **définition générique**. Non seulement elle permet de dire si un entier est un nombre premier, mais elle permet aussi d'en inventer, d'en produire à partir de ce qui est dit dans la définition et de cela seulement.

Carré : « *quadrilatère dont les côtés sont égaux et forment des angles droits* » ou pourquoi pas « *Quadrilatère dont les sommets sont les extrémités de deux segments de même longueur se coupant en leur milieu à angle droit* »

La définition géométrique, opératoire, est en quelque sorte **un programme de construction**. C'est bien une définition opératoire. Et il n'y en pas de meilleure. Nous sommes souvent plus habituées à certaines, mais

c'est contingent et finalement sans importance.
En mathématiques aussi, une définition est un discours qui permet de dire ce qu'est une chose ou ce que signifie un mot. L'utilisation de définitions a conduit le mathématicien à réfléchir à la question des fondements et à produire les **définitions élémentaires** à partir desquelles en droit il est possible de produire toutes les autres, ce sont les définitions premières qui avec les axiomes (les principes et les « demandes ») forment la base des axiomatiques.
Les choses ne sont pas si simples qu'il y paraît d'abord, tant pour les définitions mathématiques que pour toutes les autres... de **quelle liberté** jouissons-nous pour produire des définitions qui aient du sens ?

Est-ce que cela a du sens, par exemple, de produire la définition suivante :
X (signifié quelconque) : « *un trilatère dont la somme des angles est supérieure à 180°* » (signifiant) ?
Trilatère, c'est ce qu'on appelle « triangle », comme hexaèdre est ce que nous avons l'habitude d'appeler « cube ». Est-ce une chimère comme « licorne » tout à l'heure ?
Pour trouver un signifié, quittons notre cadre habituel, le plan, et regardons ce qu'il en est de la géométrie sphérique...
« triangle de la géométrie sphérique » : « *un trilatère dont la somme des angles est supérieure à 180°* » !

Deuxième moment, à partir de bonnes ou de mauvaises définitions

Prenons un cas qui a souvent été présenté comme archétypal : le beau défini, bien ou mal. La beauté selon Hippias, relatif, *versus* le beau selon Platon, qui est la quintessence du beau, le principe nécessaire de l'ensemble des belles choses.

Lecture. Un affrontement sur la chose (le beau pour soi, en soi) et un conflit sur la nécessité de penser en partant ou non de définitions rigoureuses.

Socrate

Il est évident que tu en sais davantage que moi. Cependant fais attention, mon cher. Il te demande, non pas ce qui est beau mais ce que c'est que le beau. [e]

Hippias

Je comprends, mon cher ami : je vais lui dire ce que c'est que le beau, et il n'aura rien à répliquer. Tu sauras donc, puis-qu'il faut te dire la vérité, que le beau, c'est une belle jeune fille.

Socrate

Par le chien, Hippias, voilà une belle et brillante réponse. Si je réponds ainsi, aurai-je répondu, et répondu juste à la question, et n'aura-t-on rien à répliquer ? [288a]

Hippias

Comment le ferait-on, Socrate, puisque tout le monde pense de même, et que ceux qui entendront ta réponse te rendront tous témoignage qu'elle est bonne ?

Socrate

Admettons... Mais permets, Hippias, que je reprenne ce que tu viens de dire. Cet homme m'interrogera à peu près de cette manière : « Socrate, réponds-moi : toutes les choses que tu appelles belles ne sont-elles pas belles, parce qu'il y a quelque chose de beau par soi-même ? » Et moi, je lui répondrai que, si une jeune fille est belle, c'est qu'il existe quelque chose qui donne leur beauté aux belles choses.

Le **beau en soi**... la beauté selon Socrate ! Une aporie, une qualité commune d'êtres dissemblables, comme peuvent l'être une belle jeune fille et une belle marmite, voire une déesse ! Une qualité qui apparaît aux sens mais qui en elle-même reste occultée, comme en retrait des choses particulières... Une vérité intelligible, pas une marque sensible.

Télécharger l'Hippias majeur
http://www.ac-grenoble.fr/PhiloSophie/file/platon_hippias_majeur.pdf

Imaginons quelqu'un qui cherche à échapper au piège de Socrate et à sa manie de toujours faire le doute sur qui nous semblait évident l'instant d'avant. Ce quelqu'un, appelons-le Tauto et faisons en le partisan de la nécessité.

La beauté selon Tauto : « *La beauté est le caractère de ce qui est beau* ».

Il y a là une pure **tautologie**. Je ne dis rien de plus et rien de moins en disant « la beauté » (signifiant) et « le caractère de ce qui est beau » (signifié). Ce n'est pas une définition, parce qu'il n'y a précisément pas d'écart entre le signifiant et le signifiant... rien d'autre qu'un redoublement à peine masqué du signifiant dans une tournure syntaxiquement différente.

La tautologie n'est aucunement une définition qui nous permet de comprendre ce qui est en jeu. Il peut toutefois exister des définitions tautologiques, qui ne sont à vrai dire pas de pures tautologies mais des propositions qui s'en rapprochent fort. Prenons un exemple.

Sociologie : « *étude des sociétés humaines et des formes de sociabilité* »

On peut douter que quelqu'un qui ne saurait pas ce qu'est la sociologie puisse apprendre ce que c'est en lisant la définition, même s'il la comprend. Car il restera sans doute très mystérieux pour lui de savoir ce que c'est que l'étude de la société et des formes de sociabilité ! Si par exemple il pense que c'est l'étude du nombre de personnes constituant une société il se trompe car il s'agit de la démographie pas de la sociologie, même s'il y a ou peut avoir des liens entre la sociologie et la démographie.
Pour produire du sens plusieurs stratégies sont possibles. Indiquons-les très rapidement.

- celles de la définition populaire ou de la définition savante

Une définition qui se comprend aisément, qu'on peut donc dire presque intuitive. Par exemple définir en donnant à **penser une origine**, un commencement dans le temps (et pas une genèse).

Sociologie : « Science humaine inventée par Auguste Comte pour expliquer le comportements des humains en société »

Une définition plus délicate et plus rigoureuse, « scientifique » dirait Comte précédemment cité... Sociologie : « *Observation systématique de la société basée sur la loi des trois états (qui sont l'état théologique, l'état métaphysique et l'état positif)*. »
Par opposition à la première définition, un principe d'observation est dégagé. Toutes les observations sur la société nécessaires au discours sociologiques devraient se référer à la loi du développement de l'esprit humain qu'est la loi des trois états. Il y a là non seulement un commencement historique (inventé par Comte) mais un principe logique du raisonnement. On cerne mieux l'étonnement premier du sociologue (constat de l'existence de sociétés possédant divers degrés de développement politique, économique et même de représentation du monde) et sa manière d'envisager l'étude des sociétés humaines (montrer qu'il est possible d'ordonner la diversité de ces sociétés dans un système).

- celles de la définition **par extension** ou de la définition **en compréhension**

D'après Simmel, la sociologie est la science des actions réciproques ou des formes propres de la vie sociale, les conflits, les solidarités et les associations,
Il s'agit là d'une définition en extension, donnant tous les cas qui tombent sous la règle d'usage de la langue.
Pour Durkheim, la sociologie est la science qui étudie les faits sociaux, c'est à dire des manières de faire, de penser, de sentir, fixées ou non, qui exercent sur l'individu une contrainte extérieure.
Il s'agit d'une définition en compréhension. L'objet est cerné de manière plus abstraite, sans qu'un catalogue soit fourni de faits sociaux intéressant le sociologue.

Exercice :
Prenons l'exemple des sièges. Faisons en la revue. Une chaise est un siège. Un tabouret aussi, ou bien un fauteuil. Et encoure un banc, un canapé. Et d'autres sièges peut-être plus rares ou originaux mais qui en sont indéniablement : un pouf, un trône. Je peux alors produire par extension la définition de ce qu'est un siège quand je dis « Un siège c'est l'ensemble des chaises, tabourets, fauteuils, bancs, canapés, poufs et trônes divers ».
Produire une définition par extension consiste à regrouper dans un même ensemble, sous un même nom, toutes les choses dont c'est le cas. Montrons qu'il existe des définitions par extension de choses qui ne sont pas matérielles.
Passez en revue les choses qui sont évoquées quand on parle de liberté. Et faites-en une définition par

extension.
Remarques
a) Dans le cas du siège il est aisé de faire une définition par extension. Dans celui de la chaise il est déjà plus difficile de faire le tour... et de connaître les noms appropriés (il y a bien quelques désignations comme chaise de bistrot, chaise du Gol... ou dans des catalogues des modèles avec nom ou référence). Dans celui du tabouret, il n'est guère possible de faire autre chose que de pointer du doigt tel et tel objet. La définition par extension se heurte en fait au problème des mots pour dire les choses dans leur particularité. Ce à quoi ne se heurte pas la définition en compréhension qui d'emblée se soucie d'une forme générale, et fait abstraction du particulier.
b) Dans le cas de la liberté, si on ne répète pas un terme comme « capacité » ou une expression comme « pouvoir de... » il y a une sorte de cercle puisqu'on définit la liberté comme ensemble qui regroupe les libertés de parole, d'association, de réunion, de déplacement, etc. Voire la liberté de libre entreprise (pouvoir librement installer une entreprise ou la fermer). Cet usage qui répète l'adjectif ou le nom montre qu'il y a un impensé... le fond de la liberté n'est guère saisi quand on se contente de référer à des choses visibles, observables, phénoménales. Une définition en compréhension fait abstraction des expériences pour ne retenir que l'essentiel ; liberté : « pouvoir d'agir suivant sa raison ». L'idée commune de liberté « faire tout ce qu'il nous plaît à condition que cela n'empiète pas sur la liberté d'autrui » comporte également un effet de cercle définitionnel.

Troisième moment (facultatif). Une définition bien délicate pour évoquer la question du droit

Il est souvent très utile d'opposer le droit et le fait. Le droit renvoie à ce qui doit être. Le fait à ce qui est, tel qu'il est. Une définition en droit est claire. L'est-elle toujours en fait ? Une définition doit être comprise universellement... il y a fort à craindre qu'elle ne puisse l'être.

Il y a d'ailleurs un domaine où cet écart entre ce qui est de droit et ce qui est de fait pose systématiquement problème, et c'est le droit entendu comme domaine du juridique. Le droit peut être compris comme une (presque) science qui a un devoir de produire des définitions justes !
Or l'erreur est humaine. Le législateur a le pouvoir de dire la loi, c'est-à-dire de l'établir. Mais il n'a pas le pouvoir de ne jamais se tromper lorsqu'il le fait ! Voyons un exemple qui récemment a eu des conséquences sur la vie de milliers de citoyens français, de dizaines de milliers de personnes si on pense aux familles, la définition du crime de harcèlement sexuel dans un contexte juridique auquel il ne sera fait qu'allusion, l'harmonisation du droit dans la Communauté européenne.

Harcèlement sexuel : « *Harceler autrui dans le but d'obtenir de lui des faveurs de nature sexuelle*», loi du 2 novembre 1992 (suivant la formulation du 17 janvier 2002)

Parfait... sauf qu'un citoyen a saisi la plus haute institution juridique pour une QPC une « question prioritaire de constitutionnalité ». Et il a obtenu satisfaction. La loi a dû être abrogée, ce qui a rendu caduques, du jour au lendemain, toutes les affaires en cours de harcèlement sexuel dans les tribunaux français ! La décision du 4 mai 2012 du Conseil constitutionnel, a invalidé la loi au motif de son caractère tautologique ! Et du flou qui s'ensuit, flou qui de fait empêche les juges d'appliquer une justice qui ne soit pas fatalement subjective et différente pour chaque accusé.
Depuis, il y a eu une nouvelle rédaction, l'article 222-33 nouveau du code pénal dispose maintenant que :
"I. - *Le harcèlement sexuel est le fait d'imposer à une personne, de façon répétée, des propos ou comportements à connotation sexuelle qui soit portent atteinte à sa dignité en raison de leur caractère dégradant ou humiliant, soit créent à son encontre une situation intimidante, hostile ou offensante.*
II. - *Est assimilé au harcèlement sexuel le fait, même non répété, d'user de toute forme de pression grave dans le but réel ou apparent d'obtenir un acte de nature sexuelle, que celui-ci soit recherché au profit de l'auteur des faits ou au profit d'un tiers*."

Deuxième partie. Poursuite de l'enquête et passage à la question de la définition du nombre

Beaucoup de choses ont été vues dans la première leçon. Et peut-être trop pour tout assimiler définitivement, puisque, comme on le sait d'expérience ou bien à travers le dire des proverbes, « qui trop embrasse mal étreint ». Mais sans revenir sur ce qui a été montré, sans reprendre le vocabulaire ni compliquer davantage ce qui a pu déjà apparaître comme un champ problématique – un labyrinthe, avec une foule de directions possibles –), poursuivons l'enquête.
En nous concentrant peu à peu sur le nombre.

Quatrième moment. Du vol à la soustraction frauduleuse du bien d'autrui, la nécessaire qualification du réel dans des « cases » ou définitions objectives

Est-ce que seuls les philosophes ou les petits malins inventant des jeux de mots construisent des définitions retorses ? Il ne le semble pas.
Le droit a précédemment été évoqué pour la difficulté qu'il y a à rendre dans un discours une réalité aux multiples visages, qui n'est en rien stable et définitive, qui a toujours du noir et du blanc, se décline en milles teintes nuancées... On trouve dans les livres de lois de véritables prouesses pour définir des crimes ou des délits. **Trop précises** certains formulations pourraient exempter des cas aussi graves et répréhensibles que d'autres. **Trop vagues** elles pourraient conduire à la condamnation de coupables comme d'innocents.

A priori/a posteriori (avant toute expérience/après avoir fait l'expérience)

Qu'est-ce que le vol ? Voilà une question intéressante mais pour le moment posée *in abstracto*, d'un point de vue de Sirius. Le vol en général. Question posée indépendamment d'hommes et de femmes réels, de cas concrets. Dans un tribunal en revanche, il importe de savoir ce qu'est le vol pour traiter des cas concrets de cambriolage, de braquage, de bonneteau, de chaîne de Ponzy... Une arnaque, apparemment ce n'est pas du vol, et pourtant !
La question à laquelle le juge va être confrontée pour rendre la justice en toute équité, au nom de la société, est bien sûr non pas qu'est-ce que le vol mais quand y a-t-il vol ! Et qui l'a commis.
Au supermarché, une femme a « pris » des aliments pour nourrir ses enfants et a « oublié » de payer. Par compassion, le juge est poussé à dire que ce n'est vraiment du vol. mais il ne peut pas!Et ne doit pas le pouvoir ! Une autre femme, cette fois ce n'est pas elle qui a « pris sans payer » une tablette numérique... c'est son fils de 9 ans. Mais qui donc est responsable du vol ? Pas le « voleur » de 9 ans ! La loi doit dire qui est responsable et qui ne l'est pas.
De manière générale, pour pouvoir juger d'instruction ne doit partir d'abord d'aucune idée préconçue lors de son enquête. Il doit éviter de penser l'affaire qu'on lui soumet en la pré-jugeant. Il ne doit connaître qu'une chose, les lois.
Le juge, comme Socrate dans l'Hippias majeur, doit savoir *a priori* **ce qu'est** le vol mais pas **qui** est un voleur ! Il existe une définition juridique du vol. Ce qui est **a priori** établi. Une définition faite pour le tribunal, pour les juges, les accusés et les plaignants, l'article 311-1 du Code pénal : ***Le vol est la soustraction frauduleuse de la chose d'autrui***.
Or la définition, en compréhension, est opératoire. Il y a vol pour le juge, **a posteriori**, quand il constate a) la disparition d'un bien – autrement pas de **soustraction**, b) la nature frauduleuse de cette disparition – il faut que la soustraction soit **frauduleuse**, c) l'appartenance du bien soustrait à quelqu'un d'autre que celui qui l'a soustrait, la soustraction étant celle de **la chose d'autrui**. En réunissant les pièces du puzzle, a) + b) +c) , le juge peut dire « c'est un vol commis par X au détriment de Y ».
Car « *soustraction frauduleuse de la chose d'autrui* », c'est juridiquement le vol d'un bien (de X) commis par fraude (de Y) ! C'est le vol reconnu par la loi, avec une victime et un coupable. Le vol distingué de cas qui y ressemblent : l'emprunt, la découverte d'une information ou d'une chose abandonnée – pas perdue depuis peu mais chose bel et bien abandonnée – ou encore l'appropriation d'un bien commun, la récupération d'une chose jetée, la découverte d'un trésor... des cas de non-vols ! Toujours sous certaines conditions.

Les faux-amis

L'emprunt, par exemple, ne remplit pas une des trois conditions de l'article 311. Laquelle ? b) sans aucun doute. De même que la découverte d'une chose perdue ? Là c'est un non-vol pour une autre raison. Il faut voir que pour la loi s'approprier une chose vraiment perdue n'est pas quelque chose de frauduleux ! Le fait de

prendre une chose perdue ne remplit pas la condition c), même s'il s'agit d'un billet de 100 euros ! Comme chose perdue, une chose quelconque est « commune », appartenant aussi bien à tout le monde.
Est-ce que seule la condition a) pourrait ne pas être remplie ? Oui ! Pensons au cas d'une voiture qui disparaît. Ce matin elle était garée ici ; elle n'est plus là, cet après-midi ! Oui, c'est que la fourrière l'a enlevée, puisqu'elle était sur une place de livraison. Il n'y a pas vol ni de procès possible, car le bien n'est pas vraiment disparu. Il a seulement été déplacé. Il serait absurde que le propriétaire de l'automobiliste porte plainte contre la municipalité ayant procédé à la mise en fourrière du véhicule !
Les choses sont souvent simples, si on a du bon sens. Mais même avec du bon sens, elles ne sont donc pas si simples, parfois. Car après avoir défini le vol, on n'a fait qu'une partie du chemin. Afin de disposer toujours d'une définition opératoire, il faut pouvoir concrètement distinguer le vol des cas similaires. Ainsi il est utile voire nécessaire de définir l'emprunt, l'abandon, la perte, etc. sans quoi les litiges vont abonder. Et il en faut jamais perdre de vue des principes. Que penser d'une femme qui viendrait au commissariat porter plainte pour vol de bébé ? Il est impensable de parler d'un kidnapping comme d'un vol... car on ne peut voler une personne, pas même un bébé, qui n'est pas une **chose** !
(laissons de côté le scénario du voleur de voiture sur le parking d'un supermarché qui ignorait qu'il y avait un bébé dormant dans son couffin à l'arrière du véhicule).

Une affaire de cohérence

Peut-on se passer de définition dans la vie courante ? Dans la cour de récréation, Jean s'écrie « Paul m'a volé mes billes »... l'accusation n'a vraiment que faire de la définition du vol. C'est parce que Jean le dit que c'est vrai (pour lui et ceux qui le croient). La désignation d'un coupable, d'un voleur, en l'occurrence, Paul, crée le vol pourrait-on dire. Mais ce vol n'est créé que **subjectivement**, pas **objectivement**.
Le petit livre Voleuse ! de Franck Prévot prend l'exemple d'un « vol » de stylo dans une classe et montre ce mécanisme, cette logique de l'identification première du coupable pas de l'identification première du délit ! Contre notre volonté de trouver un coupable il faut rappeler la nécessité de « trouver » d'abord un délit ou un crime. C'est le temps essentiel de la qualification du délit ou du crime.

Le vol fait indéniablement le voleur, soit. Mais le voleur ne fait pas (nécessairement) le vol !
« *personne qui a commis un vol* », c'est un voleur ! Et cela est vrai que le voleur en question soit moi ou un inconnu, quelqu'un que j'aime ou que je déteste, une grand-mère en fauteuil roulant ou un Roumain ! « *acte commis par un voleur* »... ce n'est pas nécessairement un vol, l'acte pouvant être d'éternuer ou de se moucher... Dans un cas on a une définition adéquate, pas dans l'autre !
C'est un fumeur qui a pu commettre le vol... car on a retrouvé dans la salle du coffre-fort des mégots... mais un fumeur ne fait pas que fumer, comme un voleur ne fait pas que voler... Attention à l'implication !
Un vol est commis dans une bijouterie et on apprend par un caméra de surveillance qu'un des clients était une personne fichée, déjà condamné pour vol ? Bref un voleur... l'affaire sera rondement menée. Quoique...

Revenons à la définition juridique et à sa dimension opératoire. Comment donc ont été identifiés a), b) et c) pour constituer la « bonne » définition du vol que nous avons précédemment exposée ? Par la raison sans doute... car une définition repose d'abord sur la capacité à mettre de l'ordre dans ses idées.
Mais la réponse peut être complétée. Car la raison dans l'absolu et le bon sens au quotidien sont deux choses différentes. Les juges sont raisonnables comme tout un chacun. Qu'est-ce donc qui stimule leur raison et les pousse à plus de rigueur ?C'est la pratique même du jugement qui le fait. La nécessité de clarifier et de distinguer s'est imposée chaque fois que des juges saisis de diverses affaires ont été confrontés à des cas particuliers qui n'avaient peut-être pas encore été prévus. Les juges ont néanmoins dû rendre un jugement juste. Comment ont-ils faits ? Ils ont dû s'appuyer non sur **la lettre** mais sur **l'esprit des lois** ! Il s'agit de la pratique de la **jurisprudence :** Un jugement rendu pour la première fois sur un cas qui n'avait pas encore été jugé dévoile l'esprit des lois et acquiert force de loi. Pensons demain à un tribunal saisi pour un vol de cheveu (au singulier)... hier impensable, mais pas aujourd'hui... car il est possible de faire un test ADN à partir d'un cheveu !

Complément
Une explication de la définition juridique du vol, en remontant la jurisprudence :
« Selon l'article 331-1 du Code pénal, « *le vol est la soustraction frauduleuse de la chose d'autrui*».

Selon la jurisprudence, « *la loi punit la soustraction d'une chose, quelle qu'elle soit, si elle appartient à* *autrui* » (Crim. 14 mai 1957). La chose objet du vol peut donc être corporelle ou incorporelle (dans ce cas, elle doit être attachée à un support matériel, par exemple une information sur une disquette ne peut être considérée comme volée seulement si la disquette elle-même est volée, la jurisprudence refuse autrement de reconnaître le simple vol d'une information) ; ou mobilière.

La chose doit appartenir à autrui, « *elle ne doit pas être la propriété de l'auteur de la soustraction* » (T. Corr. Auxerre, 14 janvier 1964). Ainsi, les choses n'ayant pas de propriétaire ou étant abandonnées ne peuvent faire l'objet d'un vol. Par ailleurs, « *il importe de distinguer la chose abandonnée de la chose simplement perdue : seule la chose abandonnée* » appartient « *à celui qui met la main sur elle, sans qu'il y ait soustraction punissable* » (T. Corr. Montélimar, 30 janv. 1945).

Il convient de préciser que la soustraction frauduleuse, « *nécessaire pour constituer le vol, ne se rencontre pas dans le cas où la chose est remise volontairement* » (Crim. 31 août 1899). Le vol ne peut donc pas être constitué si la personne qui remet la chose le fait de son plein gré.
En outre, l'infraction n'est réalisée que si « *le voleur a eu l'intention bien arrêtée de s'approprier l'objet dérobé* » (T. Corr. Epinal, 17 octobre 1957) ; peu importe « *le mobile qui a inspiré son auteur, dès lors que la soustraction frauduleuse de la chose d'autrui est constatée* » (Crim. 8 février 1977). »
http://avocat-gc.com/penal/definition-vol/

Cinquième moment, En opérant un renversement du signifié et du signifiant

Il est difficile de définir une chose quelconque. Mais il serait hâtif de dire qu'il est impossible de produire de bonnes définitions... même s'il peut sembler douteux qu'une définition puisse être absolument claire et distincte, bonne ou adéquate à tout point de vue. Il y a donc un art de la définition, qui tient compte des limites de la langue et de la variabilité des choses à appréhender.
Et c'est un art délicat à maîtriser. Or, intellectuellement il semble parfois plus compliqué de remonter du signifié au signifiant que d'approprier un signifié à un signifiant, donner une définition juste d'une chose.

1) Pensons à un « *rapport nécessaire qui dérive de la nature des choses* » ! De quoi s'agit-il ? De la loi, selon Montesquieu, dans De l'Esprit des lois.

2) Considérons maintenant l'« *écoulement* [effluves venant] *de figures, correspondant à la vue et sensible* » ? Quel est le signifiant de ce signifié ? La couleur selon Socrate dans le Ménon !

3) Recherchons un art. Mais pas n'importe lequel. Suivons les indices au fur et à mesure que la définition se précise par la méthode de la dichotomie (de la division). Nous cherchons en fait :

- un art d'acquisition. Puisqu'il faut tenir compte du fait que tous les arts se ramènent à deux espèces, les arts de production et les arts d'acquisition.
- Un art d'acquisition par capture... les arts d'acquisition se divisant en deux espèces : l'échange de gré à gré et la capture ou acquisition violente.
- Un art d'acquisition par la chasse. Car la capture se fait sur des êtres immobiles ou sur des êtres mobiles, les animaux.
- Un art d'acquisition par la chasse d'animaux nageurs. Les animaux sont ou marcheurs ou nageurs (ou volant, mais alors ils marchent ou volent quelques fois)
- Un art d'acquisition par la chasse d'animaux nageurs et vivant dans l'eau. Parmi les nageurs, il faut en effet distinguer les volatiles et les poissons.
- Un art d'acquisition par la pêche de jour. Car certaines pêches sont de jour et d'autres de nuit.
- Un art d'acquisition par la pêche de jour et avec des hameçons. Car certains pêchent de jour avec des filets, des harpons ou des hameçons.
- C'est la pêche à la ligne !

L'art créole des **sirandanes** joue de cette difficulté de décoder un message aussi dense et concis que la plupart des définitions, en prenant un malin plaisir à proposer le signifié qui évoque au mieux la chose sans la faire voir pour autant !
Trois petits Noirs regardent brûler le ventre de leur maman ? – Les pieds de la marmite.
Quatre pattes sur quatre pattes. Quatre pattes s'en vont, quatre pattes restent ? – Un chien sur une chaise.
Le tapis de mon grand-père est plein de punaises ? – Les étoiles.

Sur l'art des sirandanes de l'île Maurice, voir le petit ouvrage de J.M.G. et J. Le Clézio, Sirandanes suivies d'un petit lexique de la langue créole et des oiseaux (Seghers)
Je suis debout, il est allongé; je suis allongé, il est debout ? - Le pied
Je marche, elle marche, je m'arrête, elle s'arrête ? - Mon ombre
Je marche, elle marche, je m'arrête, elle marche encore ? - La montre

Une énigme tirée de l'*Essai sur les données immédiates de la conscience* d'Henri Bergson

Ce que nous venons de voir avec quelques définitions délicates nous permet maintenant de nous creuser davantage la tête. ...« *fait de se creuser la tête* », pas la trépanation, mais le jeu des énigmes, les casse-tête logiques !
Voici donc une énigme comme dans « Questions pour un champion »... De quoi peut-il bien s'agir ?

X est « *la synthèse de l'un et du multiple* ». Qu'est-ce donc que X qualifie ?
Quelques autres indices sont sans doute nécessaires. Voyons des définitions plus développées.

X est « *une collection d'unités ou, pour parler avec plus de précision, la synthèse de l'un et du multiple.* » Est-ce plus évident ?

X est « *unité* […] *d'une somme ;* [qui] *embrasse une multiplicité de parties qu'on peut considérer isolément* (…) *une collection d'unités ; il faut ajouter que ces unités sont identiques entre elles, ou du moins qu'on les suppose identiques* »

ou encore X est « *intuition simple d'une multiplicité de parties ou d'unités, absolument semblables les unes aux autres* »

X est « *une collection d'unités* [...] *et d'autre part* [...] *une unité lui-même, en tant que synthèse des unités qui le composent.* »

X est le résultat du « *processus indivisible par lequel* [l'esprit] *fixe son attention successivement sur les diverses parties d'un espace donné ; mais les parties ainsi isolées se conservent pour s'ajouter à d'autres, et une fois additionnées entre elles se prêtent à une décomposition quelconque*. »

X est le nombre. Bien sûr... ? Cela saute aux yeux... quand on nous le dit ! En revanche l'idée n'est pas si évidente tant qu'on cherche la solution... car on n'aurait soi-même sans doute pas défini le nombre de cette manière.
Livrés à eux-mêmes, d'ailleurs, beaucoup d'entre nous auraient sans doute eu de la peine à définir le nombre d'une manière satisfaisante, qui résisterait à la critique.
Bergson lui-même définit le nombre dans une œuvre qui n'a pas pour objet les mathématiques mais le temps. Dans une œuvre qui n'est pas destinée aux mathématiciens et ne reprend volontairement pas leurs termes. Il le fait parce qu'il est gêné par une définition classique du temps comme « *nombre du mouvement* », celle d'Aristote dans son traité de Physique. Et parce qu'il désire venir à bout de la question plus générale de la mesure du temps. Est-ce bien le temps qu'on mesure quand on dit, par exemple, que quatre minutes se sont coulées depuis tel signal ?

Compléments
Pour dissiper notre prévention, voyons plus précisément ce que dit Bergson au sujet du nombre. Reprenons la dernière formulation de l'Essai. Le nombre issu du « *processus* (…) *par lequel* [l'esprit] *fixe son attention successivement sur les diverses parties d'un espace donné* [et les conservent pour les additionner] » c'est le nombre qui peut être nombre de plein de choses autour de nous. C'est le nombre qui parfois est **nombre de** moutons dans un champ. Parfois pas. C'est aussi bien le nombre de pas faits dans la rue, le nombre de médailles d'or obtenues aux Jeux Olympiques, ou bien encore le nombre d'émotions éprouvées durant l'écoute d'un morceau de musique. Le nombre de tout et de rien, de toute chose qui offre prise à la

quantification.
La quantification est nécessaire car si nous savons qu'il y a des objets autour de nous en quantité et des choses en nous qui peuvent également être quantifiées, la quantité n'est que dans le regard de celui qui se saisit de ces objets, qui pense ces choses. Il y a là la source d'une difficulté que relève Bergson.
Le nombre semble au sens commun non un être indépendant de nous mais un être qui dépend de nous. Car c'est le résultat d'une opération de comptage, celle-ci ne pouvant se faire que **dans le temps**, apparemment, alors qu'il s'agit d'un comptage **dans l'espace**, en réalité. Pour évoquer des quantités on compte en juxtaposant des images dans un espace idéal. Certes toujours on compte des unités. Et lorsqu'on compte, le nombre semble grossir peu à peu, s'enfler de l'intérieur en incluant à nouveau, encore et encore, des unités. Ces unités s'additionnent et forment un enchaînement de nombres de plus en plus grands. Ainsi, pour le sens commun, le nombre semble une collection d'unités (de 1 ou de réalités ponctuelles) ou le résultat d'une addition. 3 = 1+1+1.
Bergson partage globalement cette idée. Mais il désire ne pas tomber dans ce qu'elle a de naïf. Il tient à nous dire qu'il ne s'agit pas d'une addition de « 1 » incréés par l'esprit, sortes de principes éternels du nombre, mais d'une addition de parties indécomposables, d'unités unifiées par l'esprit, résultats d'une objectivation en elle-même toujours discutable et réversible. Le nombre comme collection est réunion de parties arbitrairement considérées **comme** des unités, mais qui demeurent elles-mêmes indéfiniment divisibles... on peut additionner des fractions comprises non comme des fractions mais comme des « unités » au sens commun du terme... on peut compter comme ceci : 1, 2, 3, 4, 5 ... supposant l'enchaînement 1, 1+1, 1+1+1 … ou bien comme cela ½, 2/2, 3/2, 4/2, 5/2 avec ½ comme unité de comptage ou encore comme cela 1/3, 2/3, 3/3, 4/3, 5/3 en envisageant l'enchaînement 1/3, 1/3+1/3, 1/3 +1/3 +1/3 ...

Pour Bergson, attentif à la manière dont nous pouvons recueillir des données, concevoir des choses (matérielles, immatérielles) à partir de nos sens, il est indéniable que le nombre est « *la synthèse de l'un et du multiple* ». Mais l'appui sur le sens commun pose problème, même si le philosophe prend des précautions !
Car il reste une chose importante à discuter... On dit « le » beau, « le » vol, « le » nombre. Et on ne prête pas attention à l'article défini. Mais s'il est vrai qu'un nombre, par exemple 3, est une « *synthèse de l'un et du multiple* », est-il vrai que tout nombre soit toujours cela, « *la synthèse de l'un et du multiple* ». En y réfléchissant, on découvre que Bergson a eu un point de vue, une perspective, orientée sur **les** nombres auquel nous pensons tous par habitude. Il définit alors un nombre, le 3 par exemple. Et il fait comprendre qu'il peut en définir bien d'autres, le 4, le 5 etc. Mais alors il pense exclusivement au nombre entier et positif.
« nombre entier et positif » ? De quoi s'agit-il ? Du nombre naturel !
Et s'il pense à certains entiers, pense-t-il même à tous les nombres naturels ? Quels sont-ils ? Pour le mathématicien : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, … Est-ce que 0 est bien aussi « *la synthèse de l'un et du multiple* » ? Difficile à dire... car là on est dépourvu d'appui si on pense à partir du sens commun.
Il est possible d'ajouter que le mathématicien, contrairement à Bergson, ne parle pas du nombre sans préciser de quel type de nombre il peut s'agir. Quand il compte le nombre de concurrents d'une épreuve comme le slalom de Sotchi, il s'intéresse au cardinal de l'ensemble. Lorsqu'il reprend le classement, la médaille d'or étant la récompense du premier, la médaille d'argent celle du second, etc... il ne pense plus aux nombres précédents, les cardinaux, mais à des ordinaux.
Bergson pensant le nombre comme représentation dans l'espace et pas dans la durée privilégie le nombre cardinal sur le nombre ordinal... à moins qu'il ne simplifie volontairement, faisant comme si tout nombre sans autre précision devait être un cardinal pas un ordinal...
Certes un « nombre de » n'est pas vraiment un nombre. Car le nombre est une abstraction. Mais un nombre ordinal,en quoi n'est-ce pas un nombre ? J'emploie bien les mêmes mots de nombre quand comptant le sixième mouton qui rentre dans l'enclos si je dis 6 et que j'inscris sur une feuille un bâton supplémentaire dans la perspective de faire un nouveau groupe de 5 bâtons.
Le nombre est « *la synthèse de l'un et du multiple* »... mais est-ce valable aussi du nombre négatif ? Du nombre factionnaire, du nombre réel, du nombre complexe ? D'autres encore, comme le nombre transfini posent problème du seul fait qu'ils échappent au bon sens, ne correspondent pas au sens commun !

Est-ce que la définition bergsonienne est adéquate ? Pour le savoir il faut lire le texte attentivement et dans son intégralité. Et il convient de le replacer dans l'histoire des idées.

Seconde partie. Vers une définition philosophique du nombre

Cette seconde partie sera subdivisée en trois moments.
D'abord un détour par la notion de comptage ou de dénombrement (attention à l'emploi des termes), avec une réflexion logique, sémantique, portant sur le sens du verbe « compter ». Car il est nécessaire de penser le nombre comme le résultat d'une opération de l'esprit. Donc de s'intéresser d'abord à l'activité de compter. Qu'elle est-elle ?
Ensuite, en guise de tour d'horizon des réponses qui peuvent être apportées à la question « qu'est-ce qu'un nombre ? » quelques repères, puis la lecture d'un texte majeur de la philosophie, le Système de logique de John Stuart Mill. La leçon de Mill sur le nombre au XIXe siècle a pour nous un double intérêt. D'abord, c'est un auteur qui fait de la philosophie « classique » (on est avant les réflexions d'un Wittgenstein par exemple), qui fait le tour des positions lorsqu'il propose la sienne et la défend contre les deux autres également « classiques ». Ensuite, c'est un penseur qui se confronte à la question de la valeur de vérité des mathématiques sans dogmatisme (il la reconnaît sans arrière-pensée, et postule toujours la certitude derrière la stricte nécessité de la logique) ce qui nous permet de lui emboîter le pas, en suivant avec lui comme seule règle « absolue » de ne pas défendre par principe une position ! On peut donc amender sa position de manière à la faire se rapprocher des importants développements de la science mathématique dans la voie de l'axiomatisation.
Enfin, pour terminer cette seconde partie, une sorte de dialogue entre le professeur de philosophie et le professeur de mathématiques peut s'engager.

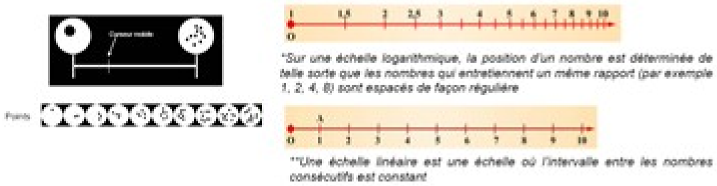
A. Qu'est-ce que compter ?

Compter, ce n'est pas se contenter de voir ou saisir une quantité.... c'est dénombrer.
Combien de corbeaux peut-on voir dans l'arbre ? Il ne suffit pas de les voir, chacun à son tour puis tous à la fois. Certes il faut les voir néanmoins pour les compter, mais il faut encore autre chose. Quoi donc ?
Les corbeaux sont parmi les animaux une espèce qui manifeste un vrai don pour ce que nous appelons le calcul (les perroquets gris sont aussi très doués). Par des observations attentives, des biologistes sont arrivés à la conclusion que ces volatiles distinguent des quantités avec précision. Lorsqu'on leur donne à manger, ils distinguent sans se tromper des groupes de 5, 6 ou 7 éléments. Mais peut-on dire à juste titre qu'ils savent compter ?
Le nombre a-t-il une réalité pour eux ?
Se poser cette question est capital. Bien des très jeunes enfants peuvent avoir du mal à estimer le nombre de billes dans un tas de 6 ou 7 billes, mais ces enfants contrairement aux corbeaux ont déjà commencé à se rapporter à des nombres lorsqu'on leur présente des ensembles. Ils ont déjà accès à cet ordre de réalité même si c'est imparfaitement.

Compter, c'est réaliser l'opération de comptage (ou d'énumération ou de dénombrement... les différents termes peuvent être d'abord considérés comme synonymes, même si le mathématicien ou le didacticien leur donnent un sens particulier). Mais qu'est-ce que logiquement que compter ? Qu'est-ce qu'une énumération ? C'est dire ou produire un nombre suivant un certain nombre de règles et non par hasard... Qu'est-ce que dénombrer ? C'est arriver à savoir combien par une opération mentale. C'est comprendre et savoir répondre à la question, « combien y a-t-il exactement de X ? »
La première chose qui semble poser problème, si l'on pose un écart avec la perception mais sans encore clairement identifier la nature de l'opération du comptage, c'est la différence – que tout le monde peut bien reconnaître, donc forte – qu'il y a encore compter avec exactitude et estimer, dans le règne de l'à peu près. « Combien » dans la langue ordinaire renvoie aux deux, mais peut-être plus à l'un qu'à l'autre.
Combien ? Qu'est-ce que cela signifie ? Reprenons la méthode de la variation.
Cela signifie plusieurs choses dans différentes situations. Prenons des exemples. Ou, au lieu de les donner, faisons-en chercher par les élèves pendant 2 ou 3 minutes. On peut aboutir à des réponses du type :

– Pour un adulte ayant été scolarisé et ayant reçu les bases du savoir mathématique enseigné à l'école, compter c'est effectuer une opération faisant intervenir des « chiffres ». C'est recourir à un procédé, à une procédure symbolique.
– Pour un traiteur venant d'apercevoir la foule se ruant vers le buffet, c'est estimer sans se tromper s'il y aura assez, trop ou juste ce qu'il faut de canapés, de boissons...
– Pour un enfant en apprentissage, ce peut être compter sur ses doigts. Compter, en faisant défiler à haute voix la suite des nombres qu'il connaît, la chaîne des nombres. Et s'arrêter sur le bon numéro !
– Pour un Indien amazonien, compter c'est en apparence très simple. Il s'agit pour lui comme pour nous de déterminer une quantité. Mais voici comment il s'y prend d'après le récit des anthropologues qui ont vécu avec eux. Considérons le résultat d'une pêche dans le fleuve. L'Indien regarde les poissons dans la nasse (s'il y en a, autrement il dit qu'il n'y a pas de poisson) et dit dans sa langue quelque chose qu'on peut traduire par « il y a un poisson » ou bien « il y a deux poissons » ou encore « il y a trois poissons » ou enfin « il y a beaucoup de poissons ».
« *1, 2, 3, 4, beaucoup* » : c'est un bonne façon de compter. Pour se faire comprendre... mais l'exactitude cesse rapidement d'être au rendez-vous.

Sur les Mundurucus, cf. les travaux du CNRS, équipe de Stanislas Dehaene :
http://www2.cnrs.fr/presse/communique/1354.htmhttp:/www.cnrs.fr/740.htm?debut=480&theme1=7



Un mémoire de master en didactique des mathématiques, de Laëtitia Rousson
http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire/master-rousson

Les problématiques Pirahãs qui ne connaîtraient que le un et le deux...
http://www.futura-sciences.com/magazines/sciences/infos/actu/d/recherche-pays-on-ne-sait-pas-compter-jusqua-trois-4229/

Pour le moment, on voit que compter dans la vie prend des aspects différents en fonction de l'âge de celui qui compte, de son éducation, de sa culture. Pour compter, il faut néanmoins toujours organiser des nombres dans l'espace suivant une échelle. Pour calculer, il faut en plus le sens de la mesure. Et apprendre à passer d'une représentation logarithmique des quantités à une représentation linéaire.
Plusieurs exemples sont encore nécessaires pour préciser ce que c'est que compter. Car compter ce n'est pas quelque chose de clairement délimité dans la société humaine. Ce n'est pas un comportement uniforme. C'est une foule de comportements. Et on peut même se demander si ce n'est pas autre chose qu'un ensemble de comportements très différents les uns des autres. Il ne faudrait leur attribuer qu'un « air de famille », pour reprendre une expression de Wittgenstein... Il y le résultat *a priori* indépendant des individus (tel nombre correspondant à tel tas, groupe ou ensemble) et la manière de compter propre aux individus, propre à chacun d'entre eux. Manière si variable, changeante qu'il semble possible de parler de styles. Il y a aussi ce qu'on compte, qui peut concerner de très nombreuses choses. Et il y a enfin le sens qu'on donne au fait de compter, calculer, déterminer précisément, estimer, évaluer... l'idée de pouvoir vérifier et transmettre le résultat du comptage par exemple.

- Compter des personnes dans un avion
 Utiliser un petit appareil, qui fait avancer d'un cran par clic une roue dentée. Un compte-tour.
- Compter les jours qui restent avant une libération
 Cocher chaque matin, au réveil, les jours qui restent avant la libération. Voir les mois se noircir de croix...

- Compter l'argent que possède une association

Utiliser un tableau à deux colonnes, les entrées et les sorties du livre de compte

- « compter » avec une calculatrice, un ordinateur (devenant synonyme de calculer)

Appuyer sur des touches, un écran tactile... et se demander si le résultat est plausible (car il y a pu y avoir une erreur de frappe)

Est-ce que je compte, quand je suis au volant et perçois le nombre de kilomètres parcourus sur le compteur kilométrique ou bien un écran comme dans les modèles récents d'automobiles ? Est-ce que je compte ou je lis ?
Deux camps peuvent s'opposer, le oui /le non. A travailler, en faisant jouer les paradoxes qui apparaissent bientôt. Est-ce que je compte quand je me contente de voir s'afficher des chiffres sur un écran ? Est-ce que je compte quand j'aperçois une vitesse sur l'écran : 87, 55 ? De même pour le calcul. Seuls mes doigts appuient sur des touches de la calculatrice... Est-ce que c'est moi qui compte ou la machine ? Une machine peut-elle compter ? Si non que fait-elle ? Moi, quand j'utilise une table de multiplication (physique ou en mémoire) est-ce que je fais différemment ?

Se poser ce genre de questions permet de comprendre que derrière les automatismes qui rendent la fréquentation des nombres normale, tout à fait habituelle, dans notre monde, pour la plupart d'entre nous, il y a en réalité une logique sous-jacente, un ensemble de règles nécessaires pour passer de la simple saisie intuitive d'une quantité à la production logique d'un résultat chiffré.
De manière très générale, le nombre n'est pas une entité intuitionnée, saisie immédiatement et directement par l'esprit, mais une réalité produite conformément à un comptage, à des principes logiques produits dans un discours chargé de contrôler ou d'encadrer le respect des règles nécessaires.

B. Qu'est-ce qu'un nombre pour les philosophes ?

Quiconque a lu et étudié un peu de philosophie sait à quel point les philosophes divergent d'opinion sur ce genre de questions ayant trait à l'essence des choses. Dans le champ clos de la métaphysique, tout les oppose et les dresse les uns contre les autres en clans irréductibles... quoique tous pensent devoir soutenir leurs thèses comme étant seules justes et détentrices d'une vérité indubitable.
Mais il arrive que l'opposition soit de façade, les avis divergent alors pour la simple raison que les penseurs ne parlent pas de la même chose ou en ayant pas la même perspective. L'un va parler de la vérité d'une chose en essayant de cerner une origine et en faisant lumière sur ce qu'il advient au commencement, l'autre en questionnant un état final, en l'analysant et le décrivant la même chose comme pleinement achevée.
C'est un peu toujours le problème avec la question du nombre. L'un se demande ce qu'est l'idée primitive de nombre et cherche une origine, bien souvent psychologique. L'autre s'interroge sur l'idée de nombre résultant des recherches les plus récentes sur les principes logiques et les assises conceptuelles des
Le nombre que rencontre un mathématicien aujourd'hui au cours de ses années de formation n'a pas grand chose à voir avec le nombre qu'apprend à domestiquer un savant de l'antiquité ou de la Renaissance.
L'un, le plus récent, est en quelque sorte beaucoup plus vieux que l'autre. Et l'autre, le plus jeune, quoique toujours pensable par nous, nous apparaît très exotique : il correspond à un usage de la langue vraiment curieux et il a des particularité curieuses, puisque on lui adjoint une foule d'idées adventices dont nous ne faisons plus cas. Le plus étrange, pour nous, étant souvent les réflexions théologiques dont s'entoure la réflexion, comme chez Pythagore qui a en quelque sorte divinisé le nombre en le supposant à la base de tout ce qui existe, comme une sorte de brique ou principe de toute réalité.

<u>Une opposition de perspectives</u>

Sans en faire un drame voyons comment s'opposent deux pensées philosophiques du nombre, l'une étant plus psychologique et métaphysique tandis que l'autre est volontairement dénuée d'hypothèses invérifiables ou d'arrière-plan métaphysique.

Nous avons rapidement exposé la définition du nombre de l'Essai sur les données immédiates de la conscience d'Henri Bergson. Le nombre est « *la synthèse de l'unité et du multiple* ». C'est une très belle définition, pour un philosophe.
...À condition de préciser ce que veut dire « *synthèse* », qui n'est pas un terme si simple à comprendre. La synthèse d'une réunion n'est pas la synthèse d'un composé chimique... Et en quel sens particulier le nombre serait-il une synthèse ? Le nombre serait une totalité résultant d'une totalisation qui pourrait se défaire. Car si la synthèse crée un nombre (par exemple 3 qui est 1+1+1), l'analyse aussi est créatrice. Opération inverse de la synthèse, elle crée de nouveaux nombres à partir d'un nombre donné. Le nombre 1/3 par exemple. Et quantité d'autres...
Et à condition de souscrire à la perspective adoptée par notre philosophe. Car il a adopté une perspective possible parmi d'autres. La sienne est, comme le titre de son œuvre l'indique, de rechercher les « *données immédiates* » de la conscience. Il s'agit de passer de la conscience directe des choses à la réflexion, de l'esprit à la philosophie... bref de faire de la psychologie.
Un autre philosophe peut préférer les principes de la logique aux pures données de la conscience, la simple logique à la psycho-logique. C'est le cas d'un auteur les plus importants de la même époque, qui est logicien autant que philosophe, Bertrand Russell, auteur d'une magistrale *Introduction à la philosophie mathématique*.

Rendons l'opposition dans un tableau.

Bergson	**Russell**
« synthèse de l'un et du multiple » Définition produite dans la lignée des Eléments d'Euclide.	« *le nombre d'une classe est la classe des classes qui lui sont équivalentes* » Dans la foulée de Dedekind Was sind und was sollen die Zahlen (1888)
Le nombre est la valeur d'une quantité	Le nombre est une propriété d'un ensemble
L'opération principielle est l'addition. On opère sur des collections comprises comme totalités ou réunions de parties.	L'opération principielle est la bijection. On opère sur des collections comprises comme ensembles.
Le nombre est le résultat d'une intuition, à l'instar des premiers nombres découverts par les hommes. Les entiers naturels.	Le nombre est le résultat d'une construction logique. Aucune prééminence d'un type de nombre. Il peut être question de nombres infinis !
Le problème est celui de la nature spatiale ou temporelle de la représentation du nombre.	Le problème est celui du dégagement de ce qui est logiquement premier. Antériorité de la relation avoir le même nombre d'éléments pour deux ensembles sur la relation être le nombre de tel ensemble isolé.

Comment comprendre cet écart ? À la fin du XIX^{e} siècle les sciences mathématiques connaissent un bouleversement. Il s'opère non seulement un développement très important des connaissances, mais aussi une remise en cause de vieilles certitudes avec le mouvement de l'axiomatisation, le programme logiciste de réduction des connaissances mathématiques à la logique. C'est dans ce contexte de progression et de refondation que Russell choisit une autre perspective que celle de Bergson. Pour deux raisons. Car il ne veut pas d'une appréhension du nombre par le biais d'une intuition, l'intuition d'une pluralité, et parce qu'il dénonce la tendance répandue qui consiste à confondre le nombre et la collection dont elle est le nombre. Certes dans les deux cas il s'agit d'une pensée qui opère une quantification, mais la saisie du nombre est purement abstraite. L'idée de nombre et l'instance de tel nombre. Pour Russell, un nombre n'est surtout pas une collection mais la caractéristique d'une collection !

Et pour appréhender cet être qui n'est qu'une pure construction logique, il n'est d'aucune utilité de se demander ce qui se passe dans les faits, dans le fonctionnement du cerveau par exemple. Ou bien ce qui existe ou non de manière naturelle.

Les trois représentations traditionnelles du nombre dans l'histoire de la philosophie

Revenons à une époque épistémologiquement moins troublée. En passant à l'étude de la pensée de John Stuart Mill. Les sciences mathématiques auxquelles ce nouveau penseur a accès, qu'il comprend et auxquelles il se réfère sont celles d'un Descartes ou d'un Leibniz, d'un Euler ou d'un Gauss. On pourrait tout aussi bien alléguer le patronage des grands anciens, mathématiciens grecs ou arabes.

Mill distingue trois grandes écoles qui pensent le nombre différemment, le définissent même d'une manière radicalement différente. Les idéalistes, les nominalistes et les empiristes (derniers venus, dont il fait partie).
Pour chaque école, il existe de nombreux représentants pas toujours d'accord. Certains idéalistes sont platoniciens, d'autres cartésiens ou malebranchistes... Mais inutile de rentrer dans le détail. L'important est de dégager ce que chaque école a comme perspective fondamentale sur le nombre.

Pour répondre à la question « qu'est-ce qu'un nombre ? » et ne pas passer à côté du nombre du mathématicien il faudrait faire intervenir une opposition fondamentale entre les relations d'idées conçues dans l'esprit et les faits positifs, vérifiables dans la nature.
Certaines choses sont nécessaires. Soit parce qu'elles sont. Et possèdent une raison d'être suffisante. Et ce sont des faits. Il est nécessaire qu'il y ait ici un arbre, qui respecte toutes les lois de la nature...Tel tirage du loto est également nécessaire. Telle victoire de telle armée sur telle autre. Etc.
Soit parce qu'elles ne peuvent pas ne pas être. Et possèdent une absolue nécessité, dans ce monde et dans tous les mondes possibles. Et ce sont des relations. Non pas tel triangle rectangle qui en lui-même n'est jamais nécessaire, mais le théorème de Pythagore ou toute autre vérité absolue ! Non pas tel calcul effectué par X au cours du contrôle de maths mais l'idée que « trois fois cinq soit égal à la moitié de trente ».
Dans le cadre de notre propos oublions pour simplifier les vérités de la géométrie ou toute autre relation que celle de la science des nombres, l'arithmétique. Les mathématiques sont nécessaires, absolument. Les relations entre les nombres sont invincibles... « trois fois cinq soit égal à la moitié de trente » : il n'y a pas là un fait contingent sur lesquels les avis pourraient diverger mais une relation d'idées. Est-ce pour autant que les nombres dont il question ne sont pas des faits ? Et les relations d'idées dérivent-elles de la constatation de faits ou non ?

Certains répondent non aux deux questions. Catégoriquement. Pour eux, il ne s'agit pas du tout de faits empiriques, constatables, car dans le cas contraire les relations d'idées nécessaires ne pourraient dériver de l'expérience. Or elles sont absolument nécessaires. Elles sont une production de l'esprit (une découverte spirituelle) quand celui-ci parvient à se détourner des faits et des objets sensibles pour saisir des vérités éternelles, immatérielles, intangibles, des objets intelligibles. Dans l'ordre pur de la pensée.
Le nombre est donc pour eux un objet intelligible : c'est la position de l'idéalisme.
Il existe éternellement, indépendamment de l'esprit qui le conçoit. Comme Idée.

D'autres répondent oui à la première question, mais conservent le non pour la seconde. Certes les nombres sont des faits, mais d'une nature spéciale, car ce sont des faits de langage. Des conventions forgées une fois dans l'histoire et depuis retenues par l'ensemble des hommes. Des faits ou réalités collectivement, socialement construites. Et historiquement explicables. Mais les relations entre ces faits langagiers sont quant à elles des relations logiques purement abstraites qui ne dépendent d'aucun homme, d'aucune société historique, d'aucune expérience particulière.
Le nombre est alors un nom doté de sens dans certains énoncés : position du nominalisme.

Il n'existe pas en dehors de l'esprit qui le conçoit... comme il n'existe vraiment indépendamment de nous, de la pensée et de sa faculté d'abstraction, que des faits singuliers : tel arbre, tel énoncé sur le nombre, tel inventeur d'un « nouveau » théorème...

Quelques uns veulent encore répondre oui au deux questions précédemment formulées. Certes le nombre fait l'objet de l'unanimité. 10, c'est 10 pour tout le monde... Certes les relations entre les nombres valent universellement. Et comment nier que 3x5 = 30/2 ? Mais les nombres sont des faits et les relations d'idées dérivent elles-même nécessairement de l'expérience. Comme toute idée dans l'esprit qui est comme une *tabula rasa*, une tablette vierge où peuvent s'inscrire des choses. Autrement, sans cette origine dans l'expérience, ils 'les nombres) ne seraient pas et elles (les relations) ne seraient pas. Pour être dans mon esprit, pour être dans mon langage il faut venir de quelque part... pas de nulle part. Du monde, bien sûr ! Un être qui ne sentirait rien, ne percevrait rien ne pourrait concevoir de nombres. Ni bien sûr calculer, ni poser arbitrairement que tel nom « trois » vaut pour dire qu'il y a exactement 3 objets et pas un de plus, pas un de moins.
Le nombre est donc une abstraction tirée de l'expérience : position de l'empirisme
On passe du réel à l'idéel par l'abstraction, comme les nominalistes l'ont vu. Mais l'abstraction est limitée, elle demeure hypothétique car basée sur une expérience sensible ou tirée de l'expérience au sens du donné expérimental.
Le nombre est comme tout fait une réalité hypothétique et pas absolue.

Retour à la philosophie contemporaine, peut-on passer outre l'opposition Bergson-Russell ? Comment interpréter la multiplicité des philosophies

Cette multiplicité signale un profond désaccord.

Les trois perspectives classiques correspondent à ce qu'on appelle des oppositions métaphysiques. L'une accepte des vérités éternelles, les deux autres le nient. La troisième nie la vérité nécessaire ou la nécessité absolue comme impossible à l'entendement humain. Pour lui, l'empiriste, la vérité du nombre n'est ni éternelle ni absolue. 3 = 2+1 en vertu de l'expérience pas de la Raison ni de la simple logique déductive.
On peut aussi dire les choses autrement. La première et la seconde s'affrontent au sujet de savoir si le nombre a en plus d'une définition de nom une définition réelle. Le nominaliste le nie. Le nombre n'est pour lui qu'un artefact né du langage. L'idéaliste se tromperait quant il lui accorde une essence indépendante par définition de l'esprit qui le conçoit. Mais l'empiriste se tromperait aussi quand il croit que c'est une abstraction née d'axiomes et d'idées élémentaires tirées de l'expérience. Idée de l'unité et de la pluralité, « 1 = 1 » voici un axiome qui conditionne toutes les vérités générales de l'arithmétique. Les axiomes et idées élémentaires sont arbitraires, des êtres de langage et des conventions nécessaires, pas des idées correspondant au réel tel qu'il nous serait donné par l'expérience répetée des mêmes phénomènes. C'est parce que « 1 = 1 » que cette pièce de un euro vaut cette autre pièce de un euro. Et pas parce que deux pièces se valent, ou deux assiettes ou deux couchers de soleil, qu'il est possible d'affirmer la vérité de la proposition « 1 = 1 ». L'idéaliste est « réaliste » (au sens du réalisme des universaux), l'empiriste est réaliste (au sens plus commun du terme) ; le nominaliste fuit le réalisme comme une illusion épistémologique des plus graves et lourdes de conséquences.

Mais il y a un accord sur l'essentiel

Les trois perspectives se retrouvent dans toutes les discussions critiques sur la nature du nombre.
Le plus facile à remarquer est le refus de penser les nombres comme une sorte de don provenant des dieux. On peut rattacher à cette critique la tendance qui s'est affirmée au cours des âges à penser le nombre comme une invention due au génie humain plutôt que comme une simple découverte, faite miraculeusement ou bien par hasard. Le nombre serait simplement un « *général abstrait* » témoignant du progressif développement de la culture humaine, pour reprendre la formulation d'Auguste Comte.

La première posture, l'idéalisme, a certes été historiquement proche des spéculations faisant du nombre un être divin. La pensée de Platon en témoigne. Mais, avec Descartes, elle s'est depuis longtemps affranchie des superstitions sur le nombre d'un Pythagore.
Le nombre d'or n'est pour les mathématiciens qu'un nombre parmi d'autres, au destin curieux, mais ce n'est pas un nombre ayant en lui-même une puissance ou une force magique. Ce n'est la clé mystérieuse de la Beauté que pour les rêveurs...

Lecture d'un texte d'Alain, Abrégés pour les aveugles (1942) : chapitre 22, “Auguste Comte” :
« *Il est clair que les premières sciences ont rompu depuis déjà longtemps avec les préjugés et les superstitions ; toutefois, au temps de Pythagore et de Platon, les mathématiciens n'avaient pas entièrement rejeté la tradition des nombres sacrés ; et nous voyons qu'au temps d'Aristote les propriétés des astres et la constance de leurs retours étaient encore expliquées par la nature incorruptible et divine qu'on leur supposait. Bien plus tard, dans les recherches physiques, la simplicité des lois fut considérée comme la marque du vrai, d'après l'idée d'un créateur infiniment sage. Plus récemment, la biologie usait d'idées directrices du même genre, soit qu'elle invoquât la sagesse de l'architecte, soit qu'elle rapportât à l'âme ou au principe vital comme cause les phénomènes caractéristiques de la vie. Pour la Sociologie ou Politique, il est visible qu'elle n'est pas encore délivrée, sinon de l'idée d'une Providence organisatrice qui justifie les pouvoirs, du moins de l'empire des idées abstraites comme Liberté, Égalité, Justice, toujours en conflit avec les conditions réelles, plutôt subies que connues. Toute science doit donc passer par une longue enfance. Et le progrès en chacune, si on le considère équitablement, vient de ce que l'expérience rectifie peu à peu des sentiments forts ou des idées abstraites absolument posées*. »

Après Descartes, les kantiens, néo-kantiens (Cassirer), adeptes de la philosophie transcendantale ont adapté l'idée fondamentale de l'idéalisme qui est celle de l'existence de vérités éternelles, absolues ou nécessaires, en affirmant que cette nécessité logique correspond à la nature même de notre esprit (aux cadres ou formes *a priori* de notre entendement).

Ainsi, par la vertu de l'explication de l'origine ou de la compréhension de la nature, la pensée philosophique fait redescendre le nombre du ciel sur la terre. Le nombre n'est véritablement qu'un signe dans un système de signes, une langue artificielle création de la culture sur des millénaires, la langue algébrique.

De la multiplicité des définitions du nombre à la multiplicité des nombres

Lecture de Benoît Rittaud, Qu'est-ce qu'un nombre ? Coll. « Les Pommes du savoir »

"Bienvenue en arithmétique !"
Qu'est-ce qu'un nombre? L'opinion commune est que, une fois que l'on a appris à compter et à effectuer les «quatre opérations», la notion est définitivement élucidée. En réalité, tel est bien loin d'être le cas. Entre les numéros, les grandeurs, les cardinaux, les ordinaux et autres numéros d'ordre, notre monde nous plonge dans une véritable jungle de concepts numériques dont nous n'avons le plus souvent pas même idée. Cela va des données quotidiennement fournies par les organismes de sondage ou de statistiques aux multiples numéros qui nous identifient, en passant par ces mystérieux 0 et 1 qui sont devenus depuis quelques années le symbole d'une civilisation toujours plus utilisatrice de l'outil informatique. Vous êtes tenté de regrouper toutes ces données sous la dénomination de «chiffres» ? Alors imaginez un instant quelqu'un qui, devant la tour Eiffel, le tunnel sous la Manche, un chalet de montagne et une cabane de jardin, déciderait de les appeler collectivement des «maisons» au motif que l'on peut s'y abriter, et vous aurez une idée du problème… En réalité la variété des «espèces» à découvrir a de quoi surprendre… et ravir votre curiosité! Bienvenue en arithmétique!
Mathématicien, Benoît Rittaud est maître de conférences à l'université Paris-13.

Analyse des définitions du nombre, d'Euclide à Hilbert, en passant par Avicenne, Kant, Dedekind. Et sans oublier le *Larousse* ! Ou les psychologues.

Étude plus poussée de la définition de l'<u>Encyclopédie</u> et son « zoo » de nombres.

<u>Présentation plus détaillée de la pensée défendue par Mill, l'empirisme (pour une leçon dans un cours de Terminale)</u>

Le <u>Système de logique</u> de Mill est en quelque sorte un ouvrage dédié à une cause, la défense de la démarche inductive et de la vérité expérimentale. Le philosophe anglais produit une réflexion sur l'ensemble des sciences. Les sciences de la nature, physique, chimie, etc., inductives par nature, ne sont rien sans un appui sur les données de l'expérience. Et les sciences déductives, démonstratives, reposent elles-mêmes également sur l'expérience ! Les disciplines mathématiques sont des sciences exactes, mais hypothétiques, recherches conduites par des hommes dont les théorèmes, propositions par eux démontrées, sont des conclusions qui « *sont vraies seulement sous certaines suppositions* », des formules approximatives de la vérité « *qui sont rarement, si elles le sont jamais, exactement vraies* » ! Mill reconnaît l'audace de son affirmation, la souligne même en disant de l'arithmétique et de l'algèbre qu' « *il est plus difficile que pour aucune autre* [science] *d'admettre que leurs propositions ne sont pas des vérités* a priori*, mais des vérités expérimentales, ou que la certitude particulière de ces propositions tient à ce qu'elles sont des vérités, non pas absolues, mais seulement conditionnelles* ». Livre 2, chapitre VI §1

Au Livre 2 chapitre V, intitulé « De la démonstration et des vérités nécessaires », Mill revient sur la question du fondement des sciences, en particulier déductives, les mathématiques. Il envisage diverses justifications au caractère propre de la vérité mathématique qui est d'être absolument nécessaire.

Première idée. Les mathématiques seraient dépositaires de vérités nécessaires car leurs objets seraient définis rigoureusement et leurs propositions seraient de pures déductions, des vérités par conséquent démontrées sans recours à l'expérience.
Dans ce domaine spécial des mathématiques, d'une part, les propositions « *se rapportent à des objets et à des propriétés d'objets purement imaginaires* » par voie de déduction ; et d'autre part, les définitions sont des « *descriptions rigoureusement exactes des objets dont s'occupe cette science* », car ces descriptions s'appliqueraient moins à des objets réels (tel angle dessiné, tel nombre de moutons perçues dans le pré) qu'à des objets possibles (un angle droit imaginé mais pas tracé, un nombre idéal ou dans l'idéal qui n'est nombre de rien en particulier et de tout en général) !
On peut appeler « idéalisme » cette conception des mathématiques. Et ajouter que c'est une conception très répandue chez les mathématiciens (et sans doute leurs élèves).
« *Pour* (…) *sauver en même temps le crédit de l'hypothèse des vérités nécessaires, on a coutume de dire que les points, lignes, cercles et carrés de la géométrie existent seulement dans nos conceptions et font partie de notre esprit, lequel esprit, travaillant sur ses propres matériaux, construit une science* a priori *dont l'évidence est purement mentale et n'a rien à faire du tout avec l'expérience externe.* »

Mill doute de cette conception idéaliste des mathématiques. Parce qu'elle fait intervenir une sorte d'intuition intellectuelle (donnant accès à une « *évidence purement mentale* ») et ne correspond pas à ce que nous vivons quand nous pensons à des objets mathématiques et raisonnons sur eux.
« *Quelque considérables que soient les autorités en faveur de cette doctrine, elle me semble psychologiquement inexacte. Les points, les lignes, les cercles que chacun a dans l'esprit sont, il me semble, de simples copies des points, lignes, cercles et carrés qu'il a connus par expérience. Notre idée d'un point est simplement l'idée du* minimum visible*, la plus petite portion de surface que nous puissions voir. Une ligne, telle que la définissent les géomètres, est tout à fait inconcevable. Nous pouvons parler d'une ligne comme si elle n'avait pas de largeur, parce que nous avons une faculté, fondement du contrôle que nous pouvons exercer sur les opérations de notre esprit, par laquelle, lorsqu'une perception est présente à nos sens ou une idée à notre entendement, nous pouvons faire attention à une partie seulement de l'idée ou de la perception. Mais il nous est impossible de concevoir une ligne sans largeur, de nous faire mentalement une image d'une*

telle ligne. Toutes les lignes représentées dans notre esprit sont des lignes ayant de la largeur. Si quelqu'un en doute, nous le renvoyons à sa propre expérience. »
Cette faculté qui permet de se concentrer sur quelque chose en oubliant ce qui est également perceptible, c'est l'abstraction. Nul ne doute que la mathématicien opère par abstraction lorsqu'il pense à un point, une droite, etc... mais nul ne peut faire de l'abstraction une faculté créant des lignes sans largeur. En faisant abstraction de la largeur on ne l'abolit pas !
L'inconcevabilité est alléguée traditionnellement en faveur de l'existence d'une intuition intellectuelle qui nous pousserait à affirmer certaines choses et à nier d'autres choses. L'idée d'inconcevabilité permettrait de renforcer l'idée commune d'une invincible nécessité de certaines propositions. Il est inconcevable que 2+3 ne fasse pas 5. Il est inconcevable qu'un espace soit délimité par deux droites... Or il suffit de penser à ce qui a été considéré par les uns ou les autres comme inconcevable pour voir que l'universalité n'est que de façade.
Certains trouvent inconcevable qu'un métal puisse flotter. D'autres qu'un cygne soit noir. Pourquoi pas affirmer l'existence des licornes pendant qu'on y est !
Ce refus de certaines idées est dû d'après Mill non pas à une hypothétique intuition ou Raison universelle mais seulement à nos habitudes intellectuelles venant de l'expérience commune. C'est d'elle seule qu'on tire des preuves sur ce qui est réel ou non, possible ou non, concevable ou inconcevable !

Livre 2, chapitre VII, paragraphe 2
« (…) *l'uniformité de l'expérience est probante à des degrés très différents ; dans quelques cas elle est très forte, dans d'autres faible, dans d'autres elle mérite à peine le titre de preuve. Une expérience invariable, depuis le berceau de la race humaine jusqu'à la découverte du Potassium par Humphry Davy, dans ce siècle, avait démontré que tous les Métaux tombent au fond de l'eau. Une expérience uniforme jusqu'à la découverte de l'Australie attestait que tous les cygnes étaient blancs. Dans les cas où l'uniformité de l'expérience atteint le plus haut degré possible de force probante, comme dans ces propositions : « Deux lignes droites ne peuvent enfermer un espace » ; « Tout ce qui arrive a une cause », ce n'est pas parce que les négatives de ces propositions sont inconcevables, car il n'en est pas toujours ainsi ; c'est parce que cette expérience, uniforme comme elle est embrasse la nature entière.* »
Une discussion critique de cette thèse « positiviste » par un thomiste, D. Mercier, en 1899
http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/phlou_0776-5541_1899_num_6_21_1640

C. Échanges
En guise de conclusion, le cours se termine par un échange de point de vue entre le professeur de mathématiques et le professeur de philosophie.
L'un et l'autre fournissent trois questions.. Et une discussion peut s'engager par la suite.

Les trois questions du professeur de philosophie

- Est-ce que 0 est un nombre ? Est-ce que ∞ est un nombre ?
- Pourquoi certains mathématiciens affirment-ils aujourd'hui que le nombre (ou parfois certains nombres seulement comme les nombres naturels) a une réalité indépendante, une essence ?
- A-t-on besoin de définir ce que c'est qu'un nombre en général, une fois qu'on a défini diverses espèces de nombres (le nombre naturel, le nombre réel, le nombre complexe,....)

Les trois question du professeur de mathématiques

- Est-ce que les philosophes jouent avec les mots lorsqu'ils définissent le nombre, à l'instar de Bergson ?
- Est-ce qu'il y a toujours un philosophe qui s'intéresse aux nombres ? Ou bien est-ce que tout a été dit à propos des nombres ?
- Est-ce que la réflexion philosophique sur le nombre a fait avancer la recherche mathématique ?

Beaucoup d'autres questions étaient possibles. Les nombres existent-ils ? Est-ce que « deuxième » est un nombre ? Le choix a porté sur des questions permettant peut-être plus d'échange,mais aussi de confrontation des points de vue. Et d'évoquer des nombres particuliers, le nombre d'or, le nombre d'Euler, les nombres de Fermat, de Mersenne...

Dans un pays comme la France, où l'on oppose si souvent maths et littérature, on pourrait presque en oublier qu'il n'y a pas de mathématiques sans langage. Mais jusqu'où nos mots conditionnent-ils notre capacité à manier les chiffres, à compter, à hiérarchiser des valeurs ? D'après les résultats d'une nouvelle étude menée au Nicaragua, les mots sont indispensables pour se représenter les grands nombres et compter.
Cette question fondamentale a déjà été étudiée à moult reprises. Plusieurs équipes se sont tournées vers des peuples d'Amazonie n'ayant pas de langage arithmétique complet pour mieux comprendre le rôle des mots sur la capacité de compter (lire Arithmétique en Amazonie). Cependant ces Indiens vivent dans une société où les grands nombres et les valeurs exactes ne sont pas nécessaires. Pour éviter cet écueil, Elizabet Spaepen (Université de Chicago, E-U) et ses collègues ont mené leur étude au Nicaragua auprès de personnes sourdes et muettes.

Une communication gestuelle personnelle

Les chercheurs ont fait passer des tests à quatre sourds-muets qui n'ont pas appris la langue des signes mais qui ont développé leur propre gestuelle pour communiquer avec leur entourage. Ils travaillent, gagnent leur vie, participent à une économie basée sur la valeur exacte des choses, non sur des approximations, soulignent Spaepen et ses collègues. Ils ont comparés leurs performances avec celles de deux sourds-muets connaissant la langue des signes (qui ont donc appris la suite numérique). Ils ont aussi réalisé les mêmes tests avec quatre Nicaraguayens illettrés, sachant que les quatre sourds-muets ont peu fréquenté les bancs de l'école.

Les sourds-muets ayant appris la langue des signes et les illettrés ont obtenu de meilleurs résultats que les sourds-muets autodidactes, constatent les chercheurs. Ces derniers ont une compréhension incomplète de la valeur numérique parce qu'on ne leur a jamais appris la suite numérique (un, deux, trois, quatre etc), conclut l'équipe d'Elizabet Spaepen.

Difficultés au-delà de 3

Lorsque ces sourds-muets manipulent la monnaie de leur pays, ils sont capables de dire qu'un billet de 20 est plus grand qu'un billet de 10 ou que 9 billets de 10 font moins qu'un billet de 100. Cependant cet apprentissage serait en grande partie basé sur les couleurs et les formes différentes des billets. En effet, lorsque ces mêmes personnes doivent manier des nombres sans le support de la monnaie, ils éprouvent des difficultés au-delà du trois. Il leur est par exemple demandé de mettre sur la table le nombre de jetons correspondant au nombre de fois où l'expérimentateur touche le dos de leur main. Ils sortent trois jetons pour quatre coups, quatre jetons pour six coups.
Mieux comprendre la place des mots dans l'arithmétique devrait aider les pédagogues à enseigner les mathématiques aux enfants. C'est tout le sens du travail mené en France par la chercheuse Stella Baruck, qui veut redonner du sens au mathématiques dès le CP.

Arithmétique en Amazonie

L'équipe de Peter Gordon (Université de Columbia, E-U) avait observé que les Pirahã, qui n'ont pas de mots au-delà de 2 si ce n'est pour dire « beaucoup », avaient du mal à manier des quantités supérieures à 3. Il en concluait que le langage conditionne les capacités cognitives, au moins en arithmétique.
D'un autre côté, l'équipe de Stanislas Dehaene (Inserm) et Pierre Pica (CNRS) a fait passer des tests aux Indiens Mundurucus, qui ont des mots jusqu'à cinq. Aux tests d'approximation, ces Amazoniens obtiennent des résultats comparables à des Français. En revanche, ils ne peuvent pas faire de calcul avec une valeur exacte au-delà de cinq. Dehaene et ses collègues concluaient cependant qu'il existe une capacité arithmétique indépendante du langage.

Cécile Dumas. *Sciences et Avenir.fr* 08/02/11
http://www.sciencesetavenir.fr/fondamental/20110208.OBS7708/que-sont-les-nombres-sans-les-mots.html

BERGSON, Essai sur les données immédiates de la conscience

Chapitre II. De la multiplicité des états de conscience. L'idée de durée

L'un et le multiple

On définit généralement le nombre une collection d'unités ou, pour parler avec plus de précision, la synthèse de l'un et du multiple. Tout nombre est un, en effet, puisqu'on se le représente par une intuition simple de l'esprit et qu'on lui donne un nom ; mais cette unité est celle d'une somme ; elle embrasse une multiplicité de parties qu'on peut considérer isolément.

Le nombre comme somme, idée intuitive d'une multiplicité d'unités semblables

Il ne suffit pas de dire que le nombre est une collection d'unités ; il faut ajouter que ces unités sont identiques entre elles, ou du moins qu'on les suppose identiques dès qu'on les compte. Sans doute on comptera les moutons d'un troupeau et l'on dira qu'il y en a cinquante, bien qu'ils se distinguent les uns des autres et que le berger les reconnaisse sans peine ; mais c'est que l'on convient alors de négliger leurs différences individuelles pour ne tenir compte que de leur fonction commune. Au contraire, dès qu'on fixe son attention sur les traits particuliers des objets ou des individus, on peut bien en faire l'énumération, mais non plus la somme. C'est à ces deux points de vue bien différents qu'on se place quand on compte les soldats d'un bataillon, et quand on en fait l'appel. Nous dirons donc que l'idée de nombre implique l'intuition simple d'une multiplicité de parties ou d'unités, absolument semblables les unes aux autres.

Le nombre comme résultat d'une opération de comptage, juxtaposition d'images dans l'espace

Et pourtant il faut bien qu'elles se distinguent par quelque endroit, puisqu'elles ne se confondent pas en une seule. Supposons tous les moutons du troupeau identiques entre eux ; ils diffèrent au moins par la place qu'ils occupent dans l'espace ; sinon, ils ne formeraient point un troupeau. Mais laissons de côté les cinquante moutons eux-mêmes pour n'en retenir que l'idée. Ou nous les comprenons tous dans la même image, et il faut bien par conséquent que nous les juxtaposions dans un espace idéal ; ou nous répétons cinquante fois de suite l'image d'un seul d'entre eux, et il semble alors que la série prenne place dans la durée plutôt que dans l'espace. Il n'en est rien cependant. Car si je me figure tour à tour, et isolément, chacun des moutons du troupeau, je n'aurai jamais affaire qu'à un seul mouton. Pour que le nombre en aille croissant à mesure que j'avance, il faut bien que je retienne les images successives et que je les juxtapose à chacune des unités nouvelles dont j'évoque l'idée : or c'est dans l'espace qu'une pareille juxtaposition s'opère, et non dans la durée pure. On nous accordera d'ailleurs sans peine que toute opération par laquelle on compte des objets matériels implique la représentation simultanée de ces objets, et que, par là même, on les laisse dans l'espace. Mais cette intuition de l'espace accompagne-t-elle toute idée de nombre, même celle d'un nombre abstrait ?

Le nombre comme abstraction, conçue dans un espace symbolique

Pour répondre à cette question, il suffira à chacun de passer en revue les diverses formes que l'idée de nombre a prises pour lui depuis son enfance. On verra que nous avons commencé par imaginer une rangée de boules, par exemple, puis que ces boules sont devenues des points, puis enfin que cette image elle-même s'est évanouie pour ne plus laisser derrière elle, disons-nous, que le nombre abstrait. Mais à ce moment aussi le nombre a cessé d'être imaginé et même d'être pensé ; nous n'avons conservé de lui que le signe, nécessaire au calcul, par lequel on est convenu de l'exprimer. Car on peut fort bien affirmer que 12 est la moitié de 24 sans penser ni le nombre 12 ni le nombre 24 : même, pour la rapidité des opérations, on a tout intérêt à n'en rien faire.

Suite de l'argumentation. L'imagination comme condition du nombre

Mais, dès qu'on désire se représenter le nombre, et non plus seulement des chiffres ou des mots, force est bien de revenir à une image étendue. Ce qui fait illusion sur ce point, c'est l'habitude contractée de compter dans le temps, semble-t-il, plutôt que dans l'espace. Pour imaginer le nombre cinquante, par exemple, on répétera tous les nombres à partir de l'unité; et quand on sera arrivé au cinquantième, on croira bien avoir construit ce nombre dans la durée, et dans la durée seulement. Et il est incontestable qu'on aura compté ainsi des moments de la durée, plutôt que des points de l'espace ; mais la question est de savoir si ce n'est pas avec des points de l'espace qu'on aura compté les moments de la durée. Certes, il est possible d'apercevoir dans le temps, et dans le temps seulement, une succession pure et simple, mais non pas une addition, c'est-à-dire une succession qui aboutisse à une somme. Car si une somme s'obtient par la considération successive de différents termes, encore faut-il que chacun de ces termes demeure lorsqu'on passe au suivant, et attende, pour ainsi dire, qu'on l'ajoute aux autres : comment attendrait-il, s'il n'était qu'un instant de la durée ? et où attendrait-il, si nous ne le localisions dans l'espace ? Involontairement, nous fixons en un point de l'espace chacun des moments que nous comptons, et c'est à cette condition seulement que les unités abstraites forment une somme. Sans doute il est possible, comme nous le montrerons plus loin, de concevoir les moments successifs du temps indépendamment de l'espace ; mais lorsqu'on ajoute à l'instant actuel ceux qui le précédaient, comme il arrive quand on additionne des unités, ce n'est pas sur ces instants eux-mêmes qu'on opère, puisqu'ils sont à jamais évanouis, mais bien sur la trace durable qu'ils nous paraissent avoir laissée dans l'espace en le traversant. Il est vrai que nous nous dispensons le plus souvent de recourir à cette image, et qu'après en avoir usé pour les deux ou trois premiers nombres, il nous suffit de savoir qu'elle servirait aussi bien à la représentation des autres, si nous en avions besoin. Mais toute idée claire du nombre implique une vision dans l'espace ; et l'étude directe des unités qui entrent dans la composition d'une multiplicité distincte va nous conduire, sur ce point, à la même conclusion que l'examen du nombre lui-même.

Le nombre comme forme simple (unité en acte). Le paradoxe des unités arithmétiques (unités en puissance) décomposables à l'envi et à l'infini

Tout nombre est une collection d'unités, avons-nous dit, et d'autre part tout nombre est une unité lui-même, en tant que synthèse des unités qui le composent. Mais le mot unité est-il pris dans les deux cas avec le même sens ? Quand nous affirmons que le nombre est un, nous entendons par là que nous nous le représentons dans sa totalité par une intuition simple et indivisible de l'esprit : cette unité renferme donc une multiplicité, puisque c'est l'unité d'un tout. Mais lorsque nous parlons des unités qui composent le nombre, ces dernières unités ne sont plus des sommes, pensons-nous, mais bien des unités pures et simples, irréductibles, et destinées à donner la série des nombres en se composant indéfiniment entre elles. Il semble donc qu'il y ait deux espèces d'unités, l'une définitive, qui formera un nombre en s'ajoutant à elle-même, l'autre provisoire, celle de ce nombre qui, multiple en lui-même, emprunte son unité à l'acte simple par lequel l'intelligence l'aperçoit. Et il est incontestable que, lorsque nous nous figurons les unités composantes du nombre, nous croyons penser à des indivisibles : cette croyance entre pour une forte part dans l'idée qu'on pourrait concevoir le nombre indépendamment de l'espace. Toutefois, en y regardant de plus près, on verra que toute unité est celle d'un acte simple de l'esprit, et que, cet acte consistant à unir, il faut bien que quelque multiplicité lui serve de matière. Sans doute, au moment où je pense chacune de ces unités isolément, je la considère comme indivisible, puisqu'il est entendu que je ne pense qu'à elle. Mais dès que je la laisse de côté pour passer à la suivante, je l'objective, et par là même j'en fais une chose, c'est-à-dire une multiplicité. Il suffira, pour s'en convaincre, de remarquer que les unités avec lesquelles l'arithmétique forme des nombres sont des unités provisoires, susceptibles de se morceler indéfiniment, et que chacune d'elles constitue une somme de quantités fractionnaires, aussi petites et aussi nombreuses qu'on voudra l'imaginer. Comment diviserait-on l'unité, s'il s'agissait ici de cette unité définitive qui caractérise un acte simple de l'esprit ? Comment la fractionnerait-on tout en la déclarant une, si on ne la considérait implicitement comme un objet étendu, un dans l'intuition, multiple dans l'espace ? Vous ne tirerez jamais d'une idée par vous construite ce que vous n'y aurez point mis, et si l'unité avec laquelle vous composez votre nombre est l'unité d'un acte, et non d'un objet, aucun effort d'analyse n'en fera sortir autre chose, que l'unité pure ou simple. Sans doute, quand vous égalez le nombre 3 à la somme 1 + 1 + 1, rien ne vous empêche de tenir pour indivisibles les unités qui le composent : mais c'est que vous n'utilisez point la multiplicité dont chacune de ces unités est grosse. Il est d'ailleurs probable que le nombre 3 se présente d'abord sous cette forme simple à notre esprit, parce que nous songerons plutôt à la manière dont nous l'avons obtenu qu'à l'usage que nous en pourrions faire. Mais nous ne tardons pas à nous apercevoir que, si toute multiplication implique la possibilité de traiter un nombre quelconque comme une unité provisoire qui s'ajoutera à elle-même, inversement les unités à leur tour sont de véritables nombres, aussi grands qu'on voudra, mais que l'on considère comme provisoirement indécomposables pour les composer entre eux. Or, par cela même que l'on admet la possibilité de diviser l'unité en autant de parties que l'on voudra, on la tient pour étendue.

Le nombre composé ou décomposable, en voie de formation ou achevé, subjectif ou objectivé dans l'espace

Il ne faudrait pas se faire illusion, en effet, sur la discontinuité du nombre. On ne saurait contester que la formation ou construction d'un nombre implique la discontinuité. En d'autres termes, ainsi que nous le disions plus haut, chacune des unités avec lesquelles je forme le nombre trois paraît constituer un indivisible pendant que j'opère sur elle, et je passe sans transition de celle qui précède à celle qui suit. Que si maintenant je construis le même nombre avec des demis, des quarts, des unités quelconques, ces unités constitueront encore, en tant qu'elles serviront à former ce nombre, des éléments provisoirement indivisibles, et c'est toujours par saccades, par sauts brusques pour ainsi dire, que nous irons de l'une à l'autre. Et la raison en est que, pour obtenir un nombre, force est bien de fixer son attention, tour à tour, sur chacune des unités qui le composent. L'indivisibilité de l'acte par lequel on conçoit l'une quelconque d'entre elles se traduit alors sous forme d'un point mathématique, qu'un intervalle vide d'espace sépare du point suivant. Mais, si une série de points mathématiques échelonnés dans l'espace vide exprime assez bien le processus par lequel nous formons l'idée de nombre, ces points mathématiques ont une tendance à se développer en lignes à mesure que notre attention se détache d'eux, comme s'ils cherchaient à se rejoindre les uns les autres. Et quand nous considérons le nombre à l'état d'achèvement, cette jonction est un fait accompli : les points sont devenus des lignes, les divisions se sont effacées, l'ensemble présente tous les caractères de la continuité. C'est pourquoi le nombre, composé selon une loi déterminée, est décomposable selon une loi quelconque. En un mot, il faut distinguer entre l'unité à laquelle on pense et l'unité qu'on érige en chose après y avoir pensé, comme aussi entre le nombre en voie de formation et le nombre une fois formé. L'unité est irréductible pendant qu'on la pense, et le nombre est discontinu pendant qu'on le construit : mais dès que l'on considère le nombre à l'état d'achèvement, on l'objective : et c'est précisément pourquoi il apparaît alors indéfiniment divisible. Remarquons, en effet, que nous appelons subjectif ce qui paraît entièrement et adéquatement connu, objectif ce qui est connu de telle manière qu'une multitude toujours croissante d'impressions nouvelles pourrait être substituée à l'idée que nous en avons actuellement. Ainsi un sentiment complexe contiendra un assez grand nombre d'éléments plus simples ; mais, tant que ces éléments ne se dégageront pas avec une netteté parfaite, on ne pourra pas dire qu'ils étaient entièrement réalisés, et, dès que la conscience en aura la perception distincte, l'état psychique qui résulte de leur synthèse aura par là même changé. Mais rien ne change à l'aspect total d'un corps, de quelque manière que la pensée le décompose, parce que ces diverses décompositions, ainsi qu'une infinité d'autres, sont déjà visibles dans l'image, quoique non réalisées : cette aperception actuelle, et non pas seulement virtuelle, de subdivisions dans l'indivisé est précisément ce que nous appelons objectivité. Dès lors, il devient aisé de faire la part exacte du subjectif et de l'objectif dans l'idée de nombre. Ce qui appartient en propre à l'esprit, c'est le processus indivisible par lequel il fixe son attention successivement sur les diverses parties d'un espace donné ; mais les parties ainsi isolées se conservent pour s'ajouter à d'autres, et une fois additionnées entre elles se prêtent à une décomposition quelconque : ce sont donc bien des parties d'espace, et l'espace est la matière avec laquelle l'esprit construit le nombre, le milieu où l'esprit le place.

Le nombre issu d'une juxtaposition dans l'espace et non d'une succession dans le temps

A vrai dire, c'est l'arithmétique qui nous apprend à morceler indéfiniment les unités dont le nombre est fait. Le sens commun est assez porté à construire le nombre avec des indivisibles. Et cela se conçoit sans peine, puisque la simplicité provisoire des unités composantes est précisément ce qui leur vient de l'esprit, et que celui-ci prête plus d'attention à ses actes qu'à la matière sur laquelle il agit. La science se borne à attirer notre regard sur cette matière : si nous ne localisions déjà le nombre dans l'espace, elle ne réussirait certes pas à nous l'y faire transporter. Il faut donc bien que, dès l'origine nous nous soyons représenté le nombre par une juxtaposition dans l'espace. C'est la conclusion à laquelle nous avions abouti d'abord, en nous fondant sur ce que toute addition implique une multiplicité de parties, perçues simultanément.

Deux multiplicités radicalement différentes

Or, si l'on admet cette conception du nombre, on verra que toutes choses ne se comptent pas de la même manière, et qu'il y a deux espèces bien différentes de multiplicité. Quand nous parlons d'objets matériels, nous faisons allusion à la possibilité de les voir et de les toucher ; nous les localisons dans l'espace. Dès lors, aucun effort d'invention ou de représentation symbolique ne nous est nécessaire pour les compter ; nous n'avons qu'à les penser séparément d'abord, simultanément ensuite, dans le milieu même où ils se présentent à notre observation. Il n'en est plus de même si nous considérons des états purement affectifs de l'âme, ou même des représentations autres que celles de la vue et du toucher. Ici, les termes n'étant plus donnés dans l'espace, on ne pourra guère les compter, semble-t-il, *a priori*, que par quelque processus de figuration symbolique. Il est vrai que ce mode de représentation paraît tout indiqué lorsqu'il s'agit de sensations dont la cause est évidemment située dans l'espace. Ainsi, quand j'entends un bruit de pas dans la rue, je vois confusément la personne qui marche ; chacun des sons successifs se localise alors en un point de l'espace où le marcheur pourrait poser le pied ; je compte mes sensations dans l'espace même où leurs causes tangibles s'alignent. Peut-être quelques-uns comptent-ils d'une manière analogue les coups successifs d'une cloche lointaine leur imagination se figure la cloche qui va et qui vient cette représentation de nature spatiale leur suffit pour les deux premières unités ; les autres unités suivent naturellement. Mais la plupart des esprits ne procèdent pas ainsi : ils alignent les sons successifs dans un espace idéal, et s'imaginent compter alors les sons dans la pure durée. Il faut pourtant s'entendre sur ce point. Certes, les sons de la cloche m'arrivent successivement ; mais de deux choses l'une. Ou je retiens chacune de ces sensations successives pour l'organiser avec les autres et former un groupe qui me rappelle un air ou un rythme connu : alors je ne compte pas les sons, je me borne à recueillir l'impression pour ainsi dire qualitative que leur nombre fait sur moi. Ou bien je me propose explicitement de les compter, et il faudra bien alors que je les dissocie, et que cette dissociation s'opère dans quelque milieu homogène où les sons, dépouillés de leurs qualités, vidés en quelque sorte, laissent des traces identiques de leur passage. Reste à savoir, il est vrai, si ce milieu est du temps ou de l'espace. Mais un moment du temps, nous le répétons, ne saurait se conserver pour s'ajouter à d'autres. Si les sons se dissocient, c'est qu'ils laissent entre eux des intervalles vides. Si on les compte, c'est que les intervalles demeurent entre les sons qui passent : comment ces intervalles demeureraient-ils, s'ils étaient durée pure, et non pas espace ? C'est donc bien dans l'espace que s'effectue l'opération. Elle devient d'ailleurs de plus en plus difficile à mesure que nous pénétrons plus avant dans les profondeurs de la conscience. Ici nous nous trouvons en présence d'une multiplicité confuse de sensations et de sentiments que l'analyse seule distingue.

Leur nombre se confond avec le nombre même des moments qu'ils remplissent quand nous les comptons ; mais ces moments susceptibles de s'additionner entre eux sont encore des points de l'espace. D'où résulte enfin qu'il y a deux espèces de multiplicité : celle des objets matériels, qui forme un nombre immédiatement, et celle des faits de conscience, qui ne saurait prendre l'aspect d'un nombre sans l'intermédiaire de quelque représentation symbolique, où intervient nécessairement l'espace.

La solidarité des idées de nombre et d'espace

À vrai dire, chacun de nous établit une distinction entre ces deux espèces de multiplicité quand il parle de l'impénétrabilité de la matière. On érige parfois l'impénétrabilité en propriété fondamentale des corps, connue de la même manière et admise au même titre que la pesanteur ou la résistance par exemple. Cependant une propriété de ce genre, purement négative, ne saurait nous être révélée par les sens ; même, certaines expériences de mélange et de combinaison nous amèneraient à la révoquer en doute, si notre conviction n'était faite sur ce point. Imaginez qu'un corps pénètre un autre corps : vous supposerez aussitôt dans celui-ci des vides où les particules du premier viendront se loger ; ces particules à leur tour ne pourront se pénétrer que si l'une d'elles se divise pour remplir les interstices de l'autre ; et notre pensée continuera cette opération indéfiniment plutôt que de se représenter deux corps à la même place. Or, si l'impénétrabilité était réellement une qualité de la matière, connue par les sens, on ne voit pas pourquoi nous éprouverions plus de difficulté à concevoir deux corps se fondant l'un dans l'autre qu'une surface sans résistance ou un fluide impondérable. De fait, ce n'est pas une nécessité d'ordre physique, c'est une nécessité logique qui s'attache à la proposition suivante : deux corps ne sauraient occuper en même temps le même lieu. L'affirmation contraire renferme une absurdité qu'aucune expérience concevable ne réussirait à dissiper : bref, elle implique contradiction. Mais cela ne revient-il pas à reconnaître que l'idée même du nombre deux, ou plus généralement d'un nombre quelconque, renferme celle d'une juxtaposition dans l'espace ? Si l'impénétrabilité passe le plus souvent pour une qualité de la matière, c'est parce que l'on considère l'idée du nombre comme indépendante de l'idée d'espace. On croit alors ajouter quelque chose à la représentation de deux ou plusieurs objets en disant qu'ils ne sauraient occuper le même lieu : comme si la représentation du nombre deux, même abstrait, n'était pas déjà, comme nous l'avons montré, celle de deux positions différentes dans l'espace ! Poser l'impénétrabilité de la matière, c'est donc simplement reconnaître la solidarité des notions de nombre et d'espace, c'est énoncer une propriété du nombre, plutôt que de la matière. - Pourtant on compte des sentiments, des sensations, des idées, toutes choses qui se pénètrent les unes les autres et qui, chacune de son côté, occupent l'âme tout entière ? - Oui, sans doute, mais précisément parce qu'elles se pénètrent, on ne les compte qu'à la condition de les représenter par des unités homogènes, occupant des places distinctes dans l'espace, des unités qui ne se pénètrent plus par conséquent. L'impénétrabilité fait donc son apparition en même temps que le nombre ; et lorsqu'on attribue cette qualité à la matière pour la distinguer de tout ce qui n'est point elle, on se borne à énoncer sous une autre forme la distinction que nous établissions plus haut entre les choses étendues, qui se peuvent traduire immédiatement en nombre, et les faits de conscience, qui impliquent d'abord une représentation symbolique dans l'espace.

Des définitions du nombre à la pelle

Euclide Éléments, livre 7 (vers 300 av. J.-C.)

- Définition 1, l'unité est selon quoi chacune des choses existantes est dite une.
- Définition 2, un nombre est un assemblage composé d'unités
- Définition 3, un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand. [*Être partie* signifie ici être diviseur.]
- Définition 5, un nombre est multiple d'un nombre, le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit.
- Définition 6, le nombre pair est celui qui peut être divisé en deux parties égales.
- Définition 7, le nombre impair est celui qui ne peut pas se partager en deux parties égales, ou bien celui qui diffère d'une unité du nombre pair.

« *Nous dirons : le nombre est un ensemble d'unités.* » Avicenne, Le Livre de science (1023)

« *La quantité discrète se divise en nombre et langage, or le nombre est la réunion de plusieurs unités. Le nombre se définit encore d'une autre manière : le nombre est une collection mesurée par l'unité. Pour comprendre ces définitions il faut savoir que l'unité se prend pour l'être, et l'unité est le principe du nombre.* » Saint Thomas d'Aquin, Commentaire de la Logique d'Aristote

Numerus integer est totum ex unitatibus tanquam partibus collectum, Leibniz, Nouveaux essais Manuscrit A
Numerus integer est totum ex unitatibus collectum, Manuscrit B
Numerus est ratio omnium eorum quae estimantur ad unum, tanquam ad mensuram itaque scilicet etiam fracti et surdi comprehenduntur. Manuscrit C
Quod si Regressus sit major progressu, in summa prodibit progressus falsus, qui revera erit Regressus. Et talis progressus erit minor nullo numerusque qui eum designabit dicetur esse minor nihilo.

Le nombre est « *multitude dont on acquiert la connaissance distincte par la numération, c'est-à-dire en ajoutant successivement, dans un temps donné, une unité à une autre unité* ». Emmanuel Kant, Dissertation de 1770 §15

« *La quantité discrète est le nombre, ou comme il faudrait mieux dire est composée de nombres, c'est-à-dire de nombre d'entités séparées supérieurs à l'unité* ». Jeremy Bentham De l'Ontologie (1814)

« *Par* puissance *ou* nombre cardinal *de M nous entendons le concept général qui, avec l'aide de notre faculté active de penser, est extrait de l'ensemble M, en ceci que nous faisons abstraction de la nature des éléments particuliers de M et de l'ordre selon lequel ils se présentent. Comme chaque élément m* [de M]*, pris séparément, dans la mesure où nous faisons abstraction de sa nature, devient une* unité*, le nombre cardinal de M est un agrégat déterminé composé d'unités, et ce nombre a dans notre esprit l'existence d'une image intellectuelle, ou encore d'une projection, de l'agrégat M de départ*. » Georg Cantor « Une contribution à la théorie des ensembles » (1878)

Si en considérant un système simplement infini N, ordonné par une représentation φ, on fait totalement abstraction de la nature particulière des éléments, que l'on ne retient simplement que le fait qu'ils sont différents et ne considère que les relations établies entre eux par la représentation φ qui définit l'ordre, alors ces éléments s'appellent nombres naturels ou nombres ordinaux ou simplement nombres, et l'élément fondamental 1 s'appelle le nombre fondamental de la suite N des nombres.

Étant donnée cette libération des éléments de tout autre contenu (abstraction), on peut à juste titre les qualifier de libre création de l'esprit humain. Richard Dedekind (1888)

« *On ne doit pas oublier les considérations précédentes quand on définit le nombre cardinal. Si nous considérons deux collections, on peut chercher à établir une loi de correspondance entre les objets de ces deux collections, de façon qu'à tout objet de la 1re corresponde un objet de la 2e et un seul, et inversement. Si cela est possible, on dit que les deux collections ont le même nombre cardinal.*
Mais, ici encore, il convient que cette loi de correspondance soit prédicative. Si l'on a affaire à deux collections infinies, on ne pourra jamais concevoir ces deux collections comme épuisées. Si nous supposons que nous ayons pris dans la première un certain nombre d'objets, la loi de correspondance nous permettra de définir les objets correspondants de la 2e. Si nous introduisons ensuite de nouveaux objets, il pourra arriver que cette introduction change le sens de la loi de correspondance, de telle façon que l'objet A' de la 2e collection, qui avant cette introduction correspondait à un objet A de la 1re, n'y correspondra plus après cette introduction. Dans ce cas la loi de correspondance ne sera pas prédicative. » Henri Poincaré, Dernières pensées

[6.021] *Le nombre est l'exponent d'une opération.*
[6.022] *Le concept de nombre n'est rien d'autre que ce qu'il y a de commun à tous les nombres, la forme générale du nombre.*
Le concept de nombre est le nombre variable. Et le concept de l'égalité des nombres et la forme générale de toutes les égalités de nombres.
[6.03] *La forme générale du nombre entier est* $[0, \xi, \xi+1]$
Ludwig Wittgenstein Tractatus logico-philosophicus

« *Un nombre est quoi que ce soit qui est le nombre d'une classe.* » Bertrand Russell, Introduction à la philosophie mathématique, (1921)

Le signe 1 est un nombre.
Un signe qui commence par 1 et finit par 1, de sorte que dans l'intervalle + suit toujours 1 et que 1 suit toujours +, est également un nombre. Par exemple les signes 1+1 ; 1+1+1 sont des nombres.
David Hilbert, Werke, Vol. 3 (1922)

« *Le nombre est une notion opératoire dont l'acquisition permet à l'enfant de percevoir la conservation de l'extension d'une collection, la sériation des longueurs et l'inclusion des classes*. » Aurélie Lainé, résumant La Genèse du nombre chez l'enfant de Piaget et Szeminska.

Le nombre est une construction faisant intervenir les cinq outils logiques suivants, rangés par ordre d'acquisition par l'enfant : l'adéquation unique (mise en correspondance de chaque objet décompté avec une seule étiquette numérique comme quand un enfant compte sur ses doigts) ; l'ordre stable (la suite des étiquettes numériques est fixe et immuable) ; l'abstraction (on ne tient pas compte de la nature des objets que l'on compte) l'homogénéité ou l'hétérogénéité des objets n'a pas d'incidence sur le dénombrement ; la non-pertinence de l'ordre des éléments dénombrés : l'endroit où l'on commence le dénombrement ne change pas le résultat ; le principe cardinal (la dernière étiquette numérique (dernier nombre formulé) énonce le cardinal de la collection c'est-à-dire la quantité d'éléments qu'il y a dans la collection.
Pascale Planche résumant les idées de Rita Gelman

Notion fondamentale des mathématiques dérivant du besoin de dénombrer, de classer des objets ou de mesurer des grandeurs, mais qui ne peut faire l'objet d'une définition stricte. Dictionnaire Larousse