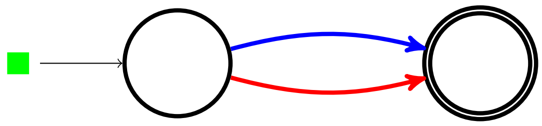
Théorie des infinitésimaux par Conway et Norton

0.1 Les étoiles

0.1.1 L'étoile

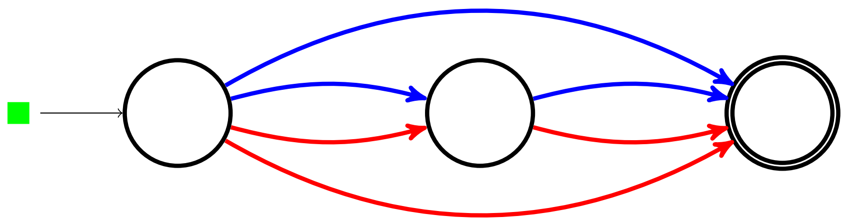
Voici le plus simple des jeux qui ne sont pas des nombres :



En effet le premier qui joue est le gagnant de ce jeu. Ce jeu ne peut donc être ni positif (sinon les bleus gagneraient lorsque les rouges commencent), ni négatif (sinon les rouges gagneraient lorsque les bleus commencent), ni égal à zéro (sinon le premier qui joue serait le perdant). Conway appelle *étoile* ce jeu, et le note *. L'étoile est un jeu de Nim à un tas d'une pièce.

0.1.2 Étoile 2

Le jeu de Nim à un tas de 2 pièces est

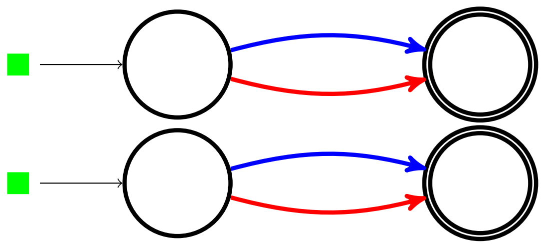


est noté *2 (à ne pas confondre avec 2* qui est la somme du nombre 2 et de l'étoile).

On définit de façon similaire les jeux de Nim *3, *4 etc. Ces jeux, appelés *nimbers* ne sont pas des nombres (c'est toujours celui qui joue en premier qui gagne) et forment un corps de caractéristique 2. En particulier, chacun d'entre eux est son propre opposé.

0.1.3 Nim addition

La somme de * et *

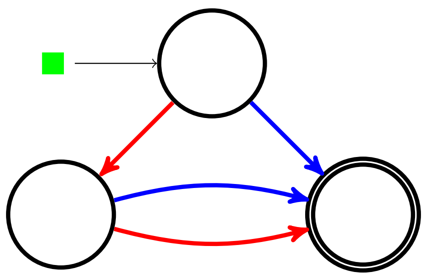


est égale à 0, comme on le voit en y jouant : le premier qui joue perd la somme en laissant son adversaire marquer le dernier but dans l'autre terme. L'étoile est bien son propre opposé, et additionner l'étoile revient au même que soustraire l'étoile.

0.2 $\uparrow$ et ses multiples

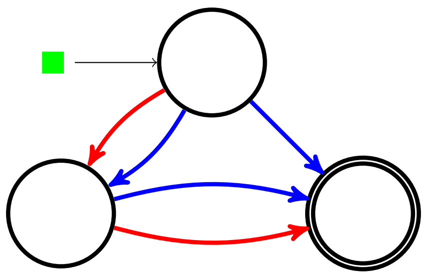
0.2.1 Le jeu $\uparrow$

Ce jeu est positif :



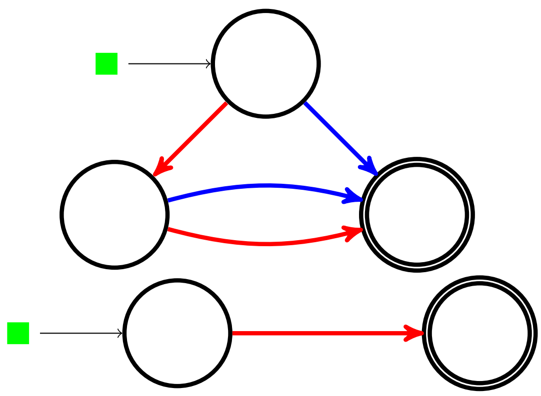
En effet, si les bleus commencent, ils marquent le but directement, et si ce sont les rouges qui commencent, ils laissent les bleus marquer le but juste après.

Ce jeu s'appelle *up* et se note $\uparrow$. En voici une variante :



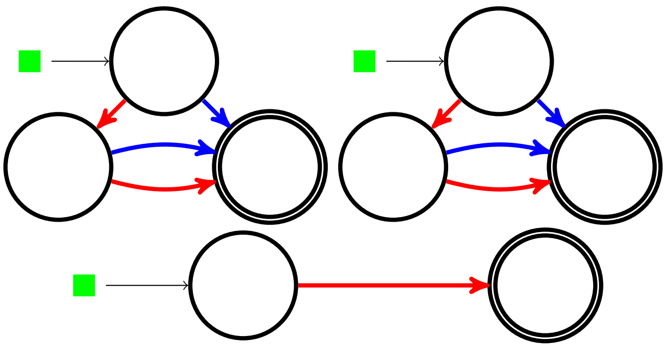
0.2.2 $\uparrow$ est infiniment petit

On rappelle que $\uparrow$ est positif. Mais $\uparrow -1$ est négatif :

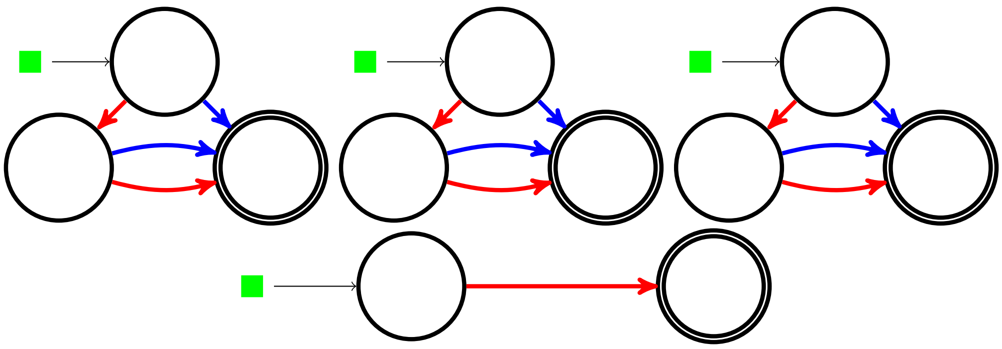


En effet ce sont les rouges qui gagnent à ce jeu. Que la somme $\uparrow -1$ est négative, signifie que $\uparrow < 1$.

Mais en fait $2\uparrow < 1$ aussi puisque $\uparrow + \uparrow -1$ est négatif :



Le jeu $\uparrow + \uparrow + \uparrow -1$

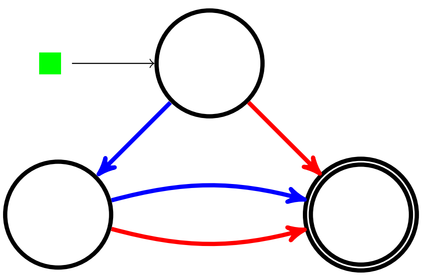


est également négatif. En fait, comme les rouges disposent d'un atout -1 à jouer le plus tard possible, ils ont une stratégie gagnante à $4\uparrow -1$, à $5\uparrow -1$, à $6\uparrow -1$ etc. Ce qui signifie que $\uparrow$ est inférieur à 1 mais aussi à $\frac{1}{2}$, à $\frac{1}{3}$, à $\frac{1}{4}$, à $\frac{1}{5}$, à $\frac{1}{6}$ etc.

Le jeu $\uparrow$ est un infiniment petit positif.

0.2.3 L'opposé de $\uparrow$

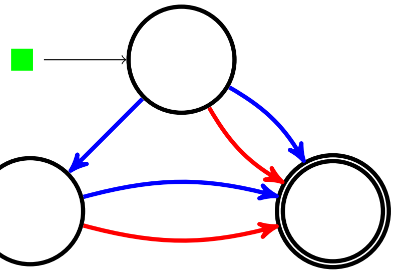
Le jeu $\downarrow$:



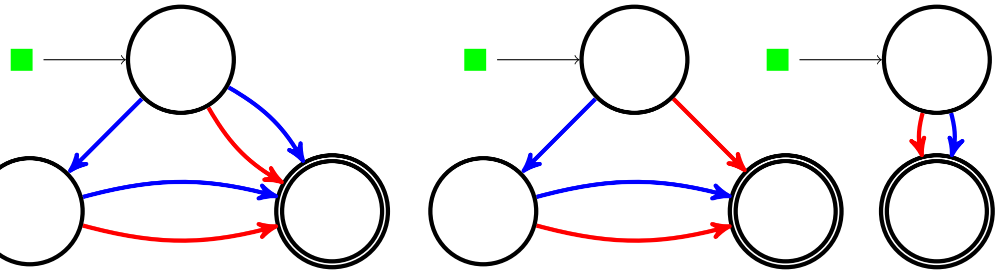
qui est opposé à $\uparrow$ (couleurs rouge et bleue inversées, somme des deux nulle) est donc un infiniment petit négatif.

0.2.4 $\uparrow *$

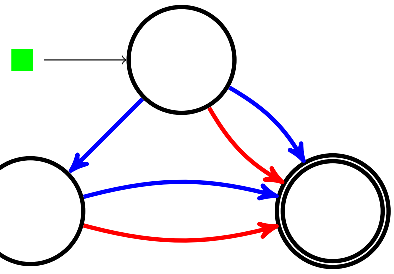
Ce jeu par contre



n'a pas de signe (le prochain à jouer, gagne ce jeu). Mais en lui additionnant $\downarrow$ et l'étoile (c'est-à-dire en lui soustrayant $\uparrow +*$ puisque l'étoile est son propre opposé) on trouve que $\uparrow * + \downarrow + * = 0$:



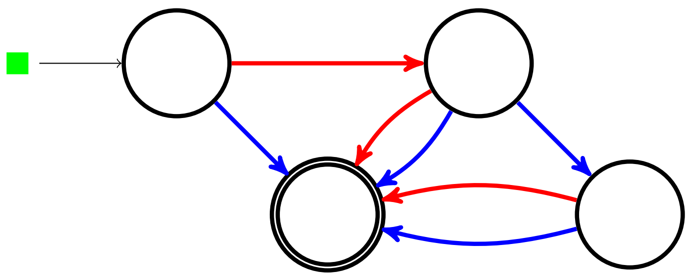
En effet si les bleus commencent, les rouges ont une stratégie gagnante, et si les rouges commencent, les bleus ont une stratégie gagnante. Ce qui signifie que la somme est nulle. Le jeu



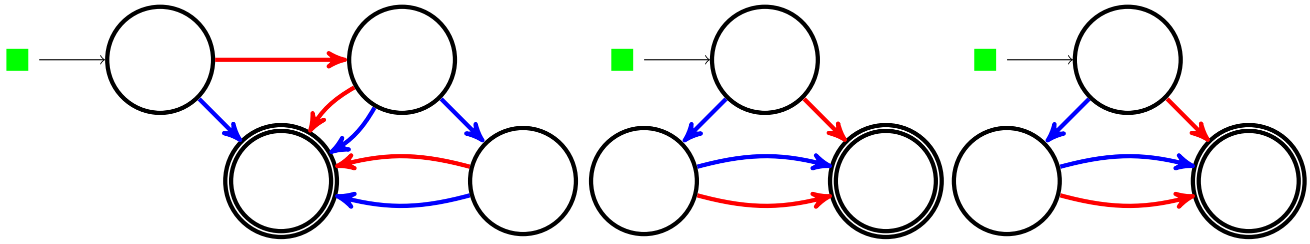
est donc égal à $\uparrow +*$ (que Conway note $\uparrow *$). On remarque que bien que $\uparrow$ soit positif et $*$ ne soit pas négative, leur somme $\uparrow *$ n'est pas positive. Conway et Norton assimilent $*$ à une agitation thermique qui perturbe suffisamment $\uparrow$ pour que la somme ne soit plus positive (autrement dit, pour annuler l'avantage des bleus à $\uparrow$).

0.2.5 $\uparrow\uparrow$

Ce jeu est positif :



Mais en lui soustrayant $\uparrow + \uparrow$ on trouve que $\uparrow\uparrow + \downarrow + \downarrow = 0$:

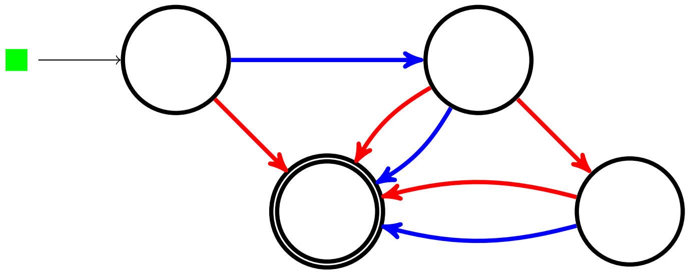


En effet on trouve que la somme des trois termes est gagnée par celui qui joue en deuxième. Cela prouve que le jeu étudié est égal à la somme $\uparrow + \uparrow$. On le note donc $\uparrow\uparrow$ ou $\Uparrow$.

$\uparrow\uparrow$ est positif, et même supérieur à $\uparrow$, mais il est également infiniment petit. On a d'ailleurs vu plus haut que $\uparrow\uparrow < 1$.

0.2.6 $\downarrow\downarrow$

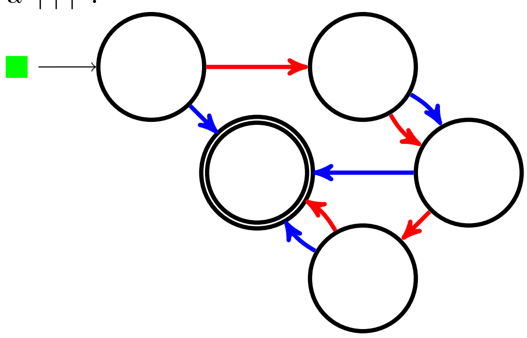
L'opposé de $\uparrow\uparrow$ est donc un infiniment petit négatif :



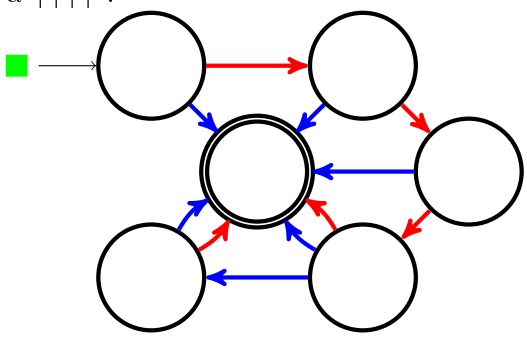
0.2.7 Autres multiples de $\uparrow$

On peut vérifier (en additionnant le nombre correct de termes égaux à $\downarrow$) que

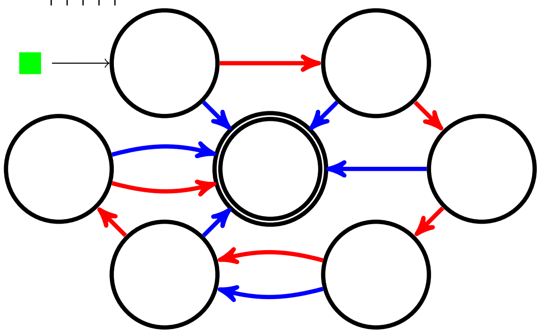
- le jeu suivant est égal à $\uparrow\uparrow\uparrow$:



- le jeu suivant est égal à $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$:



- le jeu suivant est égal à $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$:

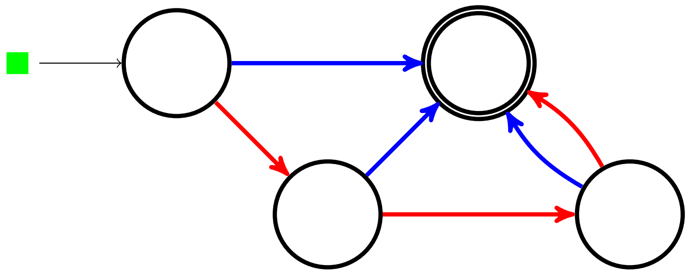


ce qui permet de refaire la construction des entiers, mais dans le monde infiniment petit, l'unité étant le jeu $\uparrow$. En fait, si $\uparrow$ ressemble à un atome (les autres infiniment petits connus jusqu'ici étant des multiples entiers de $\uparrow$), on a vu que l'étoile introduit une incertitude sur le signe d'un jeu. Pour quantifier cette incertitude, Conway et Norton ont élaboré une théorie de la thermodynamique de l'infiniment petit, avec la notion de masse atomique d'un jeu infinitésimal.

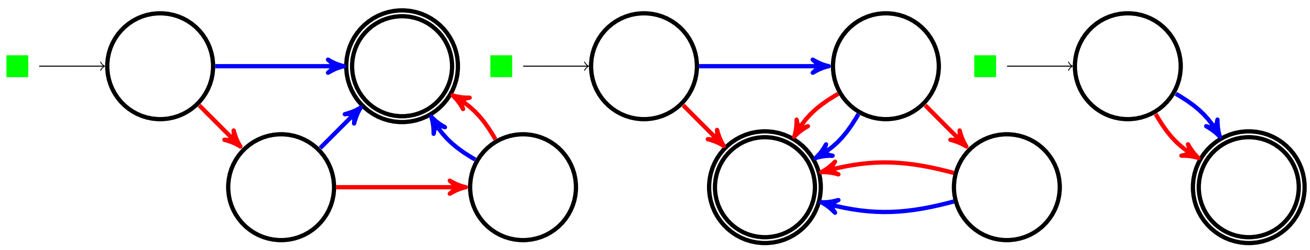
0.3 Masse atomique

0.3.1 Un infiniment petit positif

Ce jeu est intéressant en lui-même. On constate d'abord que les bleus disposent d'une stratégie gagnante, ce qui signifie que ce jeu est positif :



Pour le nommer, on propose de lui soustraire $\uparrow\uparrow$ et $*$ (ce qui revient à lui ajouter $\downarrow\downarrow + *$ puisque l'étoile est son propre opposé) :



On découvre que cette somme de 3 termes est égale à 0 (le prochain joueur est perdant à cette somme). Cela prouve que le jeu étudié est égal à $\uparrow\uparrow *$.

0.3.2 Masse atomique

Résumons :

- * n'est ni positive, ni négative : elle introduit une incertitude autour de 0, similaire à une agitation thermique infinitésimale.
- $\uparrow$ est infiniment petit, mais positif.
- Cependant $\uparrow *$ n'est pas positif : l'agitation thermique ajoutée par * à $\uparrow$ suffit à annihiler l'avantage des bleus à $\uparrow$.
- Mais si on ajoute un infiniment petit positif (à savoir $\uparrow$), la somme $\uparrow\uparrow *$ est positive.

L'étoile est donc assez forte pour détruire le signe de $\uparrow$ mais pas celui de $\uparrow\uparrow$. Ce résultat s'exprime en disant que *la masse atomique de $\uparrow$ est égale à 1.*

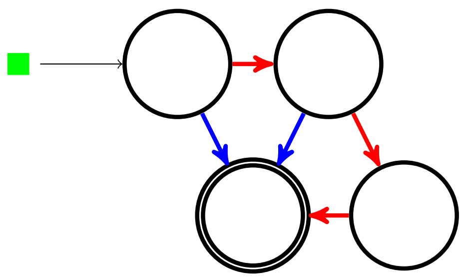
Conway et Norton ont en fait introduit une fonction (calculable mais pas facilement) sur les infinitésimaux, qu'ils ont appelée *masse atomique* et dotée des propriétés suivantes :

- La masse atomique de 0 est 0.
- La masse atomique de * est 0.
- La masse atomique de *2, *3 etc est 0.
- Un jeu qui n'est pas infinitésimal, n'a pas de masse atomique.
- La masse atomique est un homomorphisme des jeux infinitésimaux dans les jeux. Ce qui signifie que la masse atomique d'une somme de jeux infinitésimaux est la somme des masses atomiques de ces jeux.
- La masse atomique de $\uparrow$ est 1.
- La masse atomique de $\downarrow$ est donc -1.
- La masse atomique de $\uparrow\uparrow$ est 2.
- La masse atomique de $\uparrow\uparrow\uparrow$ est 3.
- La masse atomique de $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$ est 4.
- La masse atomique de $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$ est 5.

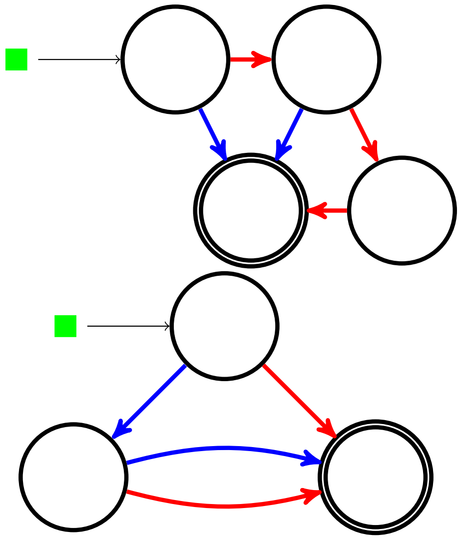
La masse atomique d'un jeu infinitésimal est un jeu. Jusqu'à présent on n'a vu que des masses atomiques égales à des nombres entiers. Mais ce n'est pas nécessairement le cas. On verra plus bas que des masses atomiques peuvent être des fractions, voire ne pas être des nombres. Cela mène à la découverte de jeux infinitésimaux particuliers, qui sont donc intéressants à étudier, par exemple en y jouant.

0.3.3 Infiniment petit par rapport à $\uparrow$

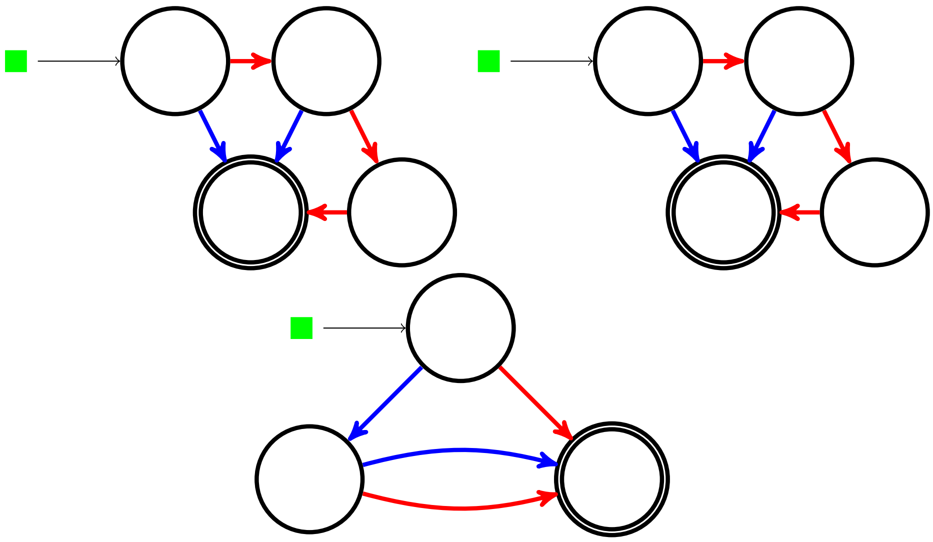
Ce jeu est positif :



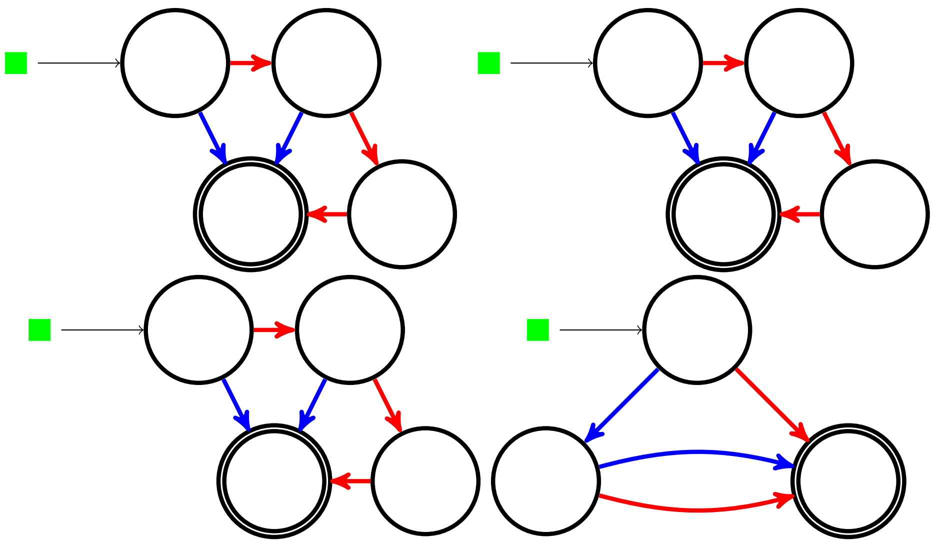
Mais en lui ajoutant un infiniment petit négatif (en l'occurrence $\downarrow$), la somme est négative :



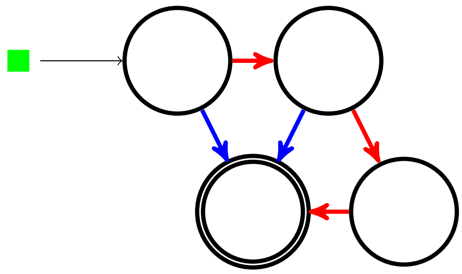
Il en est de même pour



ou



etc, ce qui prouve l'existence d'un jeu positif mais infiniment plus petit que $\uparrow$ qui est lui-même infinitésimal. Le jeu

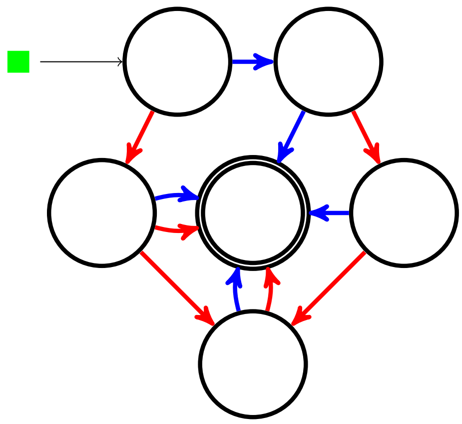


noté $+_1$ (et nommé *tiny one* par Conway) est donc un infinitésimal infiniment petit par rapport à $\uparrow$. Sa masse atomique est donc 0. L'opposé de $+_1$ est noté $-_1$ (et nommé *miny one*).

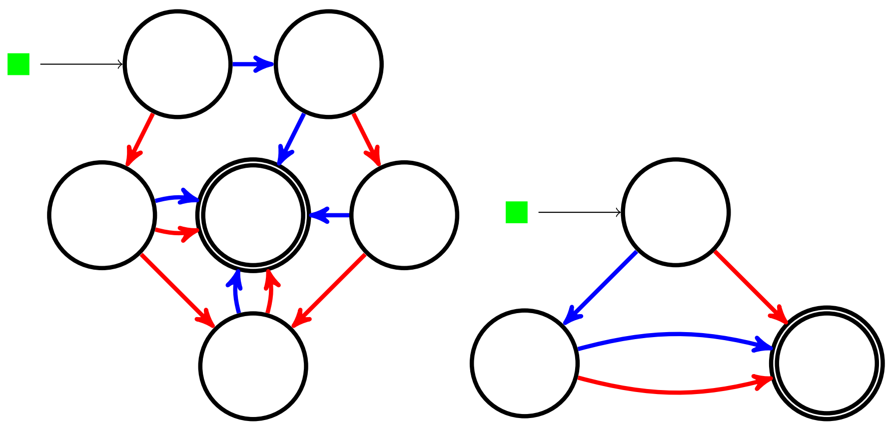
Il y a d'autres infinitésimaux positifs dont la masse atomique est plus petite que 1 (c'est-à-dire qui sont eux-mêmes compris entre 0 et $\uparrow$) sans pour autant être nulle.

0.3.4 La moitié de $\uparrow$

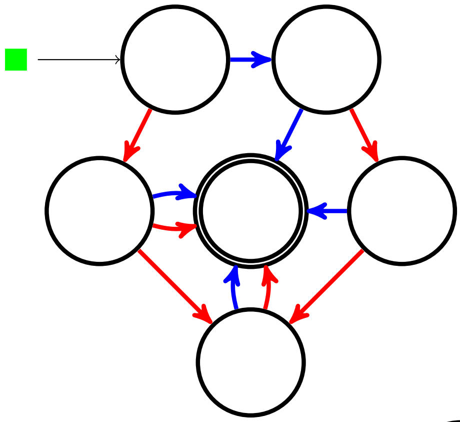
On constate que ce jeu est positif :

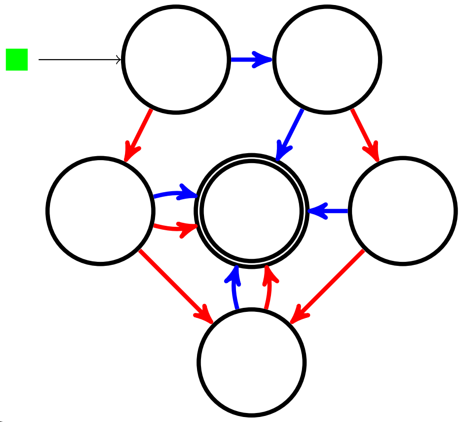


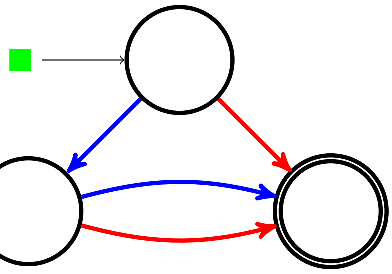
Mais on constate également qu'en lui ajoutant $\downarrow$, la somme est négative :



Le jeu est donc inférieur à $\uparrow$. Mais la somme de ce jeu avec lui-même et $\downarrow$ est nulle (il y a une stratégie gagnante pour celui qui joue en second) :





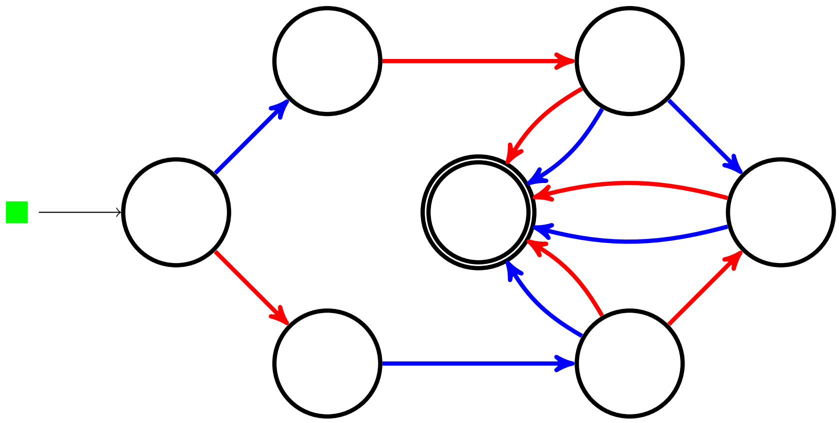


Cela signifie que la somme du jeu avec lui-même est égale à $\uparrow$, autrement dit, que le jeu étudié est $\frac{\uparrow}{2}$. Sa masse atomique est donc égale à $\frac{1}{2}$.

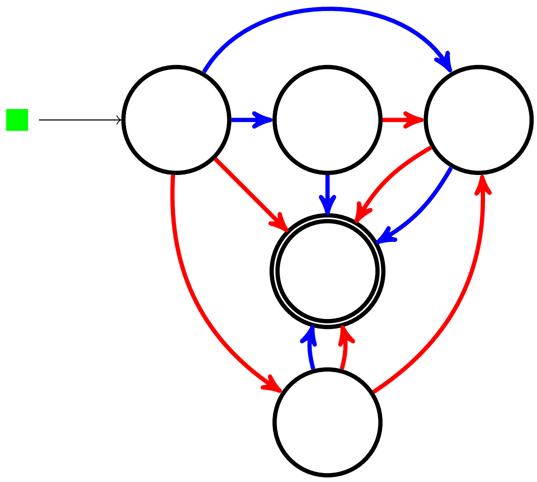
Cet exemple montre que la masse atomique d'un jeu n'est pas nécessairement un nombre entier. En fait, ce n'est même pas nécessairement un nombre.

0.3.5 Masse atomique étoile

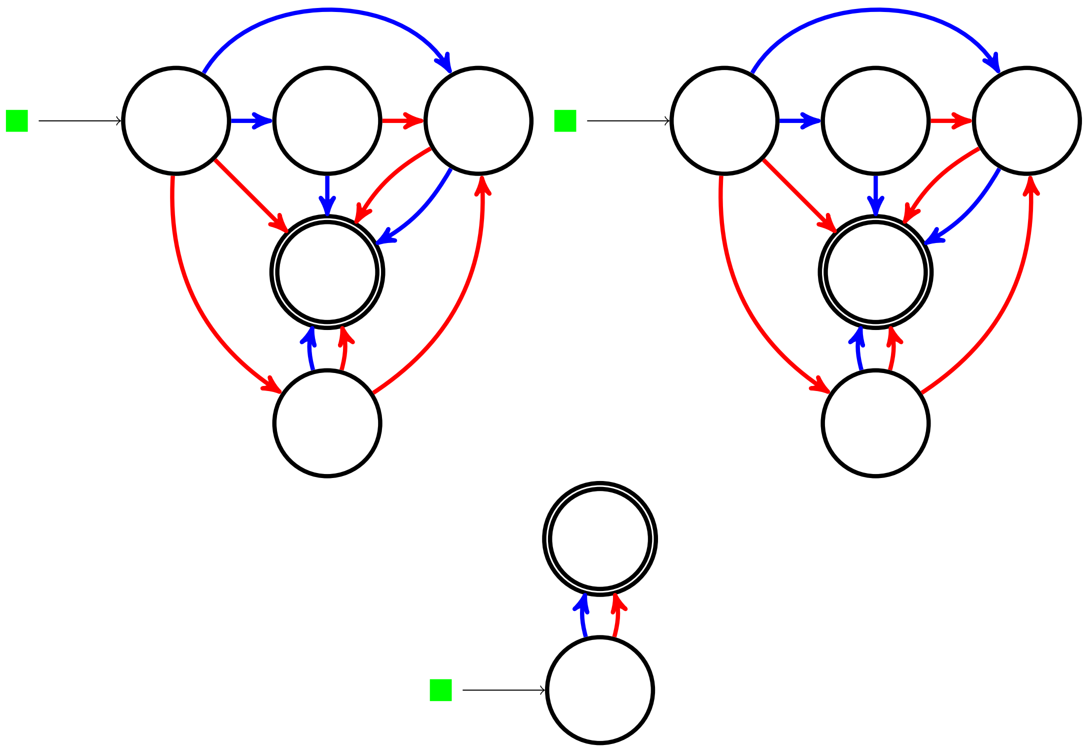
La masse atomique de ce jeu est égale à l'étoile :



Conway et Norton se servent de cette construction pour étudier ce jeu qui n'est ni positif, ni négatif (il y a une stratégie gagnante pour le prochain qui joue) :



Si on évalue la somme de ce jeu avec lui-même et l'étoile :

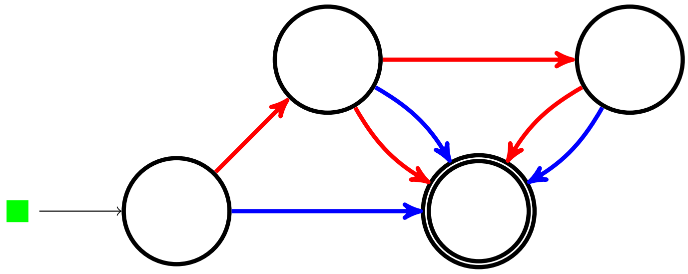


on découvre l'existence d'une stratégie gagnante pour celui qui joue en second, donc la preuve (puisque l'étoile est son propre opposé) que le jeu en question est la moitié de l'étoile, dans la mesure où la somme avec lui-même est l'étoile. Ce jeu se note donc $\frac{*}{2}$.

0.4 Ordres de grandeur

0.4.1 $\uparrow^2$

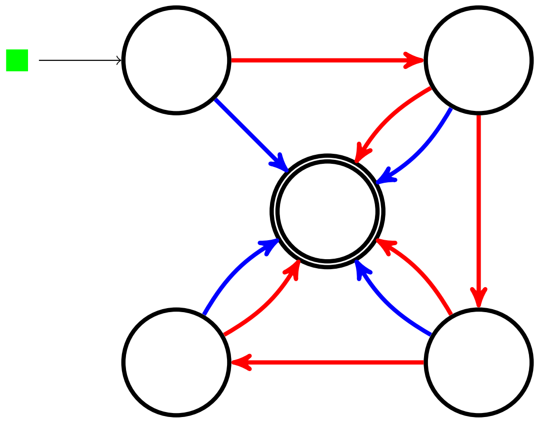
Voici un jeu positif :



Mais en lui ajoutant $\downarrow$ la somme est négative, et même en ajoutant $\downarrow$ à la somme de plusieurs copies du jeu ci-dessus. Le jeu ci-dessus est donc infiniment petit par rapport à $\uparrow$. Conway le note $\uparrow^2$. L'opposé de $\uparrow^2$ (qui est infiniment petit négatif) est $\downarrow^2$.

0.4.2 $\uparrow^3$

De façon similaire, on découvre que ce jeu (dont on voit qu'il est positif) est infiniment petit par rapport à $\uparrow^2$:

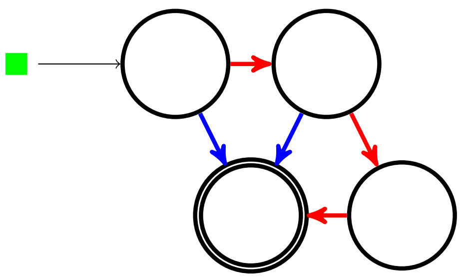


L'opposé de $\uparrow^3$ est $\downarrow^3$. On peut continuer la construction avec $\uparrow^4$ etc, et leurs opposés.

Il y a donc une gradation des infiniment petits positifs, chacun étant infiniment petit par rapport au précédent.

0.4.3 $+_1$

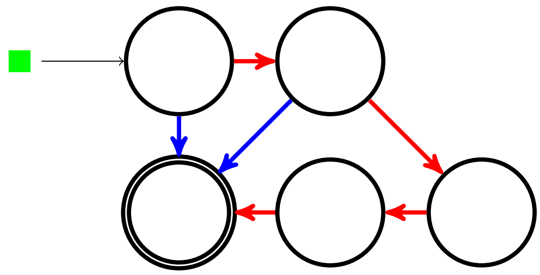
Les techniques précédentes permettent de vérifier que ce jeu, noté $+_1$ (prononcé *tiny one*) :



est infiniment petit non seulement par rapport à $\uparrow$ (on l'a vu précédemment) mais également par rapport à $\uparrow^2$, par rapport à $\uparrow^3$, à $\uparrow^4$ etc. C'est, de fait, le plus petit des jeux positifs vus jusqu'à présent. Jusqu'à présent...

0.4.4 $+_2$

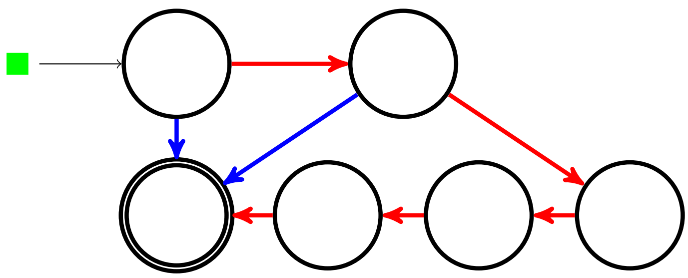
Les techniques habituelles permettent de montrer que ce jeu :



quoique positif, est infiniment petit par rapport à $+_1$. On le note $+_2$ (il répond au doux nom de *tiny two*, et son opposé $-_2$ à celui de *miny two*). On imagine la suite : s'il y a un $+_2$, il doit bien y avoir un $+_3$.

0.4.5 $+_3$

Le jeu positif

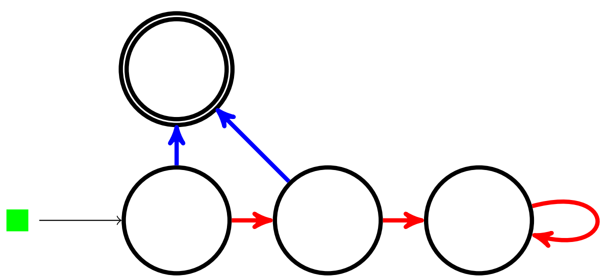


est positif, mais infiniment plus petit que $+_2$: c'est *tiny three*, noté $+_3$.

Il y a donc une autre gradation des ordres de grandeur, cette fois-ci avec la série des $+_n$. Tous ces jeux ont une masse atomique nulle.

0.4.6 Tout au bout

En fait, il y a un jeu défini comme une sorte de $+_\infty$:



Ce jeu (appelé *tiny* et noté $+$), infiniment petit par rapport à chacun des $+_n$, est de fait le plus petit jeu positif. Son étude est compliquée par le fait qu'il y a une boucle rendant la partie potentiellement infinie.

Alain Busser
IREMI 974
février 2023