QUELQUES ASPECTS DES SUITES ET DES FRACTIONS DANS LE *GAṆITA-SÂRA-SAṄGRAHA* DE MAHÂVÎRÂÇÂRYA (IXe SIÈCLE)

Lawrence Somesh IGNACE

Le *Gaṇita-sâra-saṅgraha* de Mahâvîrâçârya est un traité indien du IXe siècle dont le titre veut dire « Compendium de l'essentiel du calcul ». Je me propose d'exposer quelques aspects des suites et des fractions dans ce traité mais, tout d'abord, je voudrais parler un peu des jaïna et de leur école de mathématiques. En effet, alors que les grands maîtres Âryabhaṭa, Brahmagupta et Baskarâçârya étaient tous des hindous, Mahâvîrâçârya, quant à lui, était de religion jaïna (religion dont le fondateur s'appelait lui aussi Mahâvîra).

« Les jaïna ont attaché beaucoup d'importance à la connaissance des mathématiques. Leur littérature religieuse peut être classifiée en quatre parties :

1) *Anuyoga* ou "L'exposé des principes" (du jaïnisme) ;

2) *Gaṇitânuyoga* ou "L'exposé des principes du calcul" ;

3) *Samkyana* ou "La science des nombres" (l'arithmétique) ;

4) *Jyotiśa* ou « Astronomie », considérée comme la principale science qu'un prêtre jaïna doit maîtriser.

Il est essentiel de noter qu'un prêtre jaïna apprend ces sciences pour calculer le lieu et l'heure propices pour les cérémonies religieuses. Pour les jaïna, un enfant doit d'abord apprendre à écrire, et ensuite apprendre l'arithmétique qui est considérée comme la plus importante des sciences ou arts. »[1]

Selon le *Sthânânga-sûtra*, les sujets de discussion en mathématiques sont au nombre de dix[2] : *parikarman* (les opérations fondamentales), *vyavahara* (sujets de traitement des nombres), *rajju* (« corde », qui veut dire géométrie), *râsi* (« tas », qui veut dire mensuration des corps solides), *kalâsavarṇa* (fractions), *yâvat-tâvat* (« autant de fois que », qui veut dire équations quadratiques), *ghana* (« cube », pour les équations cubiques), *varga-varga* (équations bi-quadratiques) et *vikalpa* (permutation et combinaison).

[1] B. Datta, *The jaina school of mathematics*, B. C. M. S., vol. 21 (1929), p. 116.
[2] D'après B. Datta, *op. cit.*

Il me semble qu'il n'y avait pas de grands contacts ni de communication des connaissances dans le domaine mathématique entre les jaïna et les hindous. Jusqu'au XVe siècle, les jaïna ont gardé $\sqrt{10}$ pour la valeur de Pi, et certaines formules sur le calcul d'aire sont fausses. On pourrait dire qu'ils étaient davantage doués pour l'arithmétique et le calcul des grands nombres que pour la géométrie.

Dans le *Trilokasara* d'un certain Nemichandra, un commentateur jaïna, probablement vers les premiers siècles de notre ère, nous avons des grands nombres exprimés en puissances de deux. Un terme technique, *ardhacchéda*, est employé pour l'exposant. Il est dit que la somme des *ardhacchéda* de deux nombres donnés sera l'*ardhacchéda* du produit de ces nombres et que la différence des *ardhacchéda* de deux nombres donnera l'*ardhacchéda* du quotient de la division du premier nombre par le second. Un exemple numérique peut illustrer ces règles. L'*ardhacchéda* de 64 est 6, car $64 = 2^6$. L'*ardhacchéda* de 16 est 4, car $16 = 2^4$. On a : $16 \times 64 = 1024$ et $2^6 \times 2^4 = 2^{10} = 1024$. L'*ardhacchéda* de 1024 est bien égal à 10. De même, nous pouvons vérifier que $64/16 = 4$ et que $2^6/2^4 = 2^{6-4} = 2^2$. Cela nous fait penser à nos calculs sur les puissances d'un nombre : $a^m \times a^n = a^{m+n}$ et $a^m/a^n = a^{m-n}$.

Mahâvîra, dans son *G. S. S.*[3], a dédié six strophes à la grandeur d'un roi du nom de Amoghavarśa Nṛpatunga, qui régnait de 815 à 878 de notre ère. On peut donc considérer que cette œuvre a pu être rédigée au milieu du IXe siècle. Il semble que Mahâvîra a connu l'œuvre de Brahmagupta, mais il ne parle pas de lui dans son traité. Par ailleurs, Bhaskara II, qui vivait vers le XIIe siècle, n'a eu apparemment aucune connaissance de ce traité de Mahâvîra.

Dans le *G. S. S.*, chaque puissance de dix a un nom. Cela va jusqu'à 10^{24} (appelé *Mahâsobha*). Dans ce traité, si l'on prenait les équivalents sanskrit des mots lune, œil, feu et ciel pour représenter respectivement les chiffres 1, 2, 3 et 0, alors une combinaison telle que feu-ciel-lune-œil représenterait le nombre 2103 ($3 \times 10^0 + 0 \times 10^1 + 1 \times 10^2 + 2 \times 10^3$). Il faut noter que le mot feu désigne le chiffre 3 car il existe trois formes d'autel. Cette combinaison des nombres nominaux et du système de notation décimale a été développée pour faciliter l'utilité métrique, et aussi pour exprimer les grands nombres. Ainsi, les risques d'erreur auraient été minimes pour un copiste copiant les grands nombres. Ce système avait déjà été utilisé par Bhaskara I (un savant du VIIe siècle) et par Âryabhaṭa I.

Le *G. S. S.* est divisé en neuf chapitres. C'est dans le troisième chapitre qu'il est question des méthodes d'opérations arithmétiques avec des fractions, de la sommation des progressions arithmétiques et géométriques formées de fractions et d'une présentation de plusieurs formes de fractions simples et complexes. L'un des problèmes proposés – un bon exercice pour nos élèves de 5e – est le suivant :

3 Désormais, *G. S. S.* désignera le *Gaṇita-sâra-saṅgraha.*

> «Un huitième d'une colonne est enfoncé dans la boue, un tiers dans l'eau, un quart dans la mousse et 7 hastas (unité de mesure de longueur) sont visibles dans l'air. Quelle est la longueur de cette colonne ? »

À partir du septième chapitre, les problèmes abordés sont uniquement géométriques. La règle pour calculer l'aire d'un disque est énoncée comme suit :

> « Le diamètre d'une figure circulaire multiplié par la racine carrée de dix devient la circonférence. La circonférence multipliée par un quart du diamètre donne l'aire. »

En notant C la circonférence, D le diamètre et *r* le rayon, il vient $\mathrm{C} = \mathrm{D} \times \sqrt{10}$ et $\mathrm{A} = \mathrm{C} \times \mathrm{D}/4 = \sqrt{10} \times \mathrm{D}^2/4 = \sqrt{10} \times r^2$, et nous retrouvons notre formule actuelle, à savoir $\mathrm{Pi} \times r^2$.

Dans le huitième chapitre, les calculs concernent les creusements ou le calcul du contenu cubique d'une surface creuse, autrement dit le calcul des volumes ou la mesure cubique. L'unité est une brique qui mesure 1 hasta en longueur, $1/2$ hasta en largeur et 4 angulas en épaisseur ou en hauteur. Le neuvième et dernier chapitre traite des calculs sur les ombres. Mahâvîra propose quelques règles pour calculer la durée passée ou restante d'une journée en sachant la longueur d'un pieu et celle de son ombre. Voici un exemple d'un tel problème :

> « La longueur de l'ombre d'un homme est trois fois sa hauteur. Dis-moi, cher ami, quelle partie de la journée s'est écoulée dans la matinée ou quelle partie de la journée reste encore dans l'après-midi ? »

Suites arithmétiques

Le vers 61 du *G. S. S.* nous donne la règle de calcul pour la somme des termes d'une suite arithmétique :

> « Le nombre de termes dans la suite est (d'abord) diminué par un et (ensuite) divisé par deux et multiplié par la raison ; ceci, associé avec le premier terme de la suite et multiplié (après) par le nombre de termes devient la somme de tous (les termes de la suite en progression arithmétique). »

Notons *n* le nombre de termes, *a* le premier terme, *r* la raison et S la somme des termes de la suite. D'après le vers 61, nous avons $\mathrm{S} = ((n-1)/2 \times r + a) \times n$. On peut simplifier S de la manière suivante :

$$\mathrm{S} = (2a + (n-1) \times r) \times n/2 = (a + (a + (n-1) \times r)) \times n/2 = (a + l) \times n/2,$$

où *l* désigne le dernier terme de la suite. Cette dernière formule est celle que nous employons aujourd'hui.

âdidhana

Dhana veut dire littéralement « bien » et *âdi* veut dire « premier ». Ici, *âdidhana* désigne la somme de tous les premiers termes de la suite. Par exemple, soit la suite

7, 11, 15, 19, 23. On peut écrire ces termes sous la forme 7, $7+4\times1, 7+4\times2$, $7+4\times3$, $7+4\times4$. Ici, *âdidhana* $= 5\times7=35$. Nous ne possédons pas de terme équivalent dans nos mathématiques actuelles.

uttaradhana

Uttara veut dire « ce qui est en plus ». D'après la règle, on a : *uttaradhana* = $n\times r\times((n-1)/2)$. Dans notre exemple, *uttaradhana* = $5\times4\times(4/2)=40$. C'est aussi la somme $(4\times1)+(4\times2)+(4\times3)+(4\times4)$.

antyadhana

Antya veut dire « dernier », et donc *antyadhana* est la valeur du dernier terme d'une suite arithmétique. « Le nombre de termes (d'une suite) diminué d'un et multiplié par la raison et ensuite associé avec le premier terme (donne) l'*antyadhana*. » Autrement dit, *antyadhana* = $(n-1)\times r+a$. Dans notre exemple, *antyadhana* = $(4\times4)+7=23$.

madhyadhana

Madhya veut dire « milieu » et *madhyadhana* désigne la valeur du terme du milieu d'une suite. « La moitié de la somme d'*antyadhana* et du premier terme (donne) le *madhyadhana* », c'est-à-dire : *madhyadhana* = $(((n-1)\times r+a)+a)/2$. Pour notre exemple, *madhyadhana* = $(((4\times4)+7)+7)/2=30/2=15$. Ici, 15 est le terme qui se trouve au milieu de la suite. Mais, si une suite comportait quatre termes (par exemple : 7, 11, 15, 19), le *madhyadhana* serait égal à 13, la moyenne arithmétique du 2^{e} et du 3^{e} terme de la suite.

sarvadhana

Sarva veut dire « tout » et donc *sarvadhana* représente la valeur de la somme de tous les termes. D'une part, *sarvadhana* = *âdidhana* + *uttaradhana* (dans notre exemple, *sarvadhana* = 35 + 40 = 75) ; d'autre part, *sarvadhana* = $n\times$ *madhyadhana* (dans notre exemple, *sarvadhana* = 5×15 = 75).

En définitive, Mahâvîra nous fournit trois façons de calculer la somme des n termes d'une suite arithmétique. Voici deux exemples proposés dans le *G. S. S.* :

> « Le premier terme est 3, la raison est 8 et le nombre de termes est 12. Ces trois (quantités) sont progressivement augmentées de un, telles (qu'il y ait) sept suites. Ô calculateur, dis les sommes de toutes (ces suites). »

> « Ô toi qui possède assez de force dans les bras pour traverser l'océan de l'arithmétique, dis-moi la valeur totale de toutes les offrandes faites aux 1000 cités en commençant (l'offrande) avec 4 et augmentant successivement de 8. »

De plus, l'auteur nous dit que pour une suite qui aurait une raison négative, la somme resterait la même si on inversait l'ordre des termes de sorte que le dernier terme devienne le premier (c'est-à-dire si la même suite devenait une suite de raison positive). On peut d'ailleurs remarquer que la première formule de Mahâvîra reste valable pour une suite de raison négative, même si l'on ne change pas l'ordre des termes.

Mahâvîra donne ensuite les règles pour calculer le nombre de termes *n*, la raison *r* et le premier terme *a* (ces règles se présentent en vers, en langue sanskrite et sans démonstration) :

$$n = \frac{\left(\sqrt{(2a-r)^2+8rS}+r\right)/2-a}{r} \;;\quad r = \frac{S-na}{(n^2-n)/2} \;;\quad a = \frac{S-((n-1)/2)nr}{n}.$$

La règle suivante permet de trouver la valeur de la raison *r* quand la somme S est connue et après avoir choisi le premier terme *a* et le nombre de termes *n* au hasard :

$$r = \frac{(S/n)-a}{(n-1)/2}$$

Exemple : « La somme donnée dans ce problème est 540. Ô joyau des calculateurs, dis-moi le nombre de termes, la raison et le premier terme. » Ici, S = 540 ; prenons $n = 5$ et $a = 8$:

$$r = \frac{(540/5)-8}{4/2} = \frac{108-8}{2} = 50.$$

La suite serait donc : 8, 58, 108, 158, 208.

Suites géométriques

Le second type de suite est la progression géométrique. Apparemment, la raison négative pour une progression arithmétique n'a pas posé beaucoup de problème à Mahâvîra mais, par contre, il n'est pas question dans son traité de raison négative pour une progression géométrique. Pour les suites géométriques, Mahâvîra utilise un terme technique, le *guṇadhana* : pour une suite géométrique de *n* termes, la valeur du *guṇadhana* correspond à la valeur du $(n + 1)^{e}$ terme. La règle (vers 93) pour calculer le *guṇadhana* et la somme d'une progression géométrique permet de bien comprendre la signification de ce terme :

> « Le premier terme multiplié par une certaine puissance de la raison géométrique, (cette puissance) déterminée par le nombre de termes (dans la suite), donne le *guṇadhana.* Et qu'il soit clair que ce *guṇadhana*, diminué par le premier terme, et (ensuite) divisé par la raison diminuée d'un, devient la somme de la suite en progression géométrique. »

En notation moderne, la règle nous dit que

$$S = \frac{ar^n - a}{r-1},$$

où a est le premier terme, r la raison, n le nombre de termes, S la somme et ar^n le *guṇadhana*. Les Indiens passaient ainsi par une étape intermédiaire que nous n'utilisons pas dans notre façon de calculer. De façon générale, c'est pour cette même raison qu'il n'existe pas de nom pour un certain nombre de termes techniques employés par les Indiens.

Dans le vers 94, Mahâvîra donne une autre règle pour calculer la somme d'une suite en progression géométrique. Cette règle, qui est en quelque sorte basée sur un système binaire utilisant le zéro et le un, est très étonnante pour son époque. Très longue, elle permet de calculer r^n. Un exemple numérique l'illustrera bien : soit une progression géométrique 2, 4, 8, 16, 32…, où $n = 12$ et $r = 2$; il s'agit de trouver la valeur de r^{12}.

- 12 est pair, donc on doit diviser par 2 et on le note par 0.
- $12/2 = 6$ est pair, donc on doit diviser par 2 et on le note par 0.
- $6/2 = 3$ est impair, donc on doit soustraire 1 et on le note par 1.
- $3 - 1 = 2$ est pair, donc on doit diviser par 2 et on le note par 0.
- $2/2 = 1$ est impair, donc on doit soustraire 1 et on le note par 1.
- $1 - 1 = 0$, qui termine cette partie de l'opération.

Nous avons donc dans la colonne de droite :

$$\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

En commençant de bas en haut, nous avons : $1 \times r = 1 \times 2 = 2$; le un ayant un zéro au-dessus de lui, le r obtenu est élevé au carré, ce qui donne r^2, c'est-à-dire $2^2 = 4$; de même, on a ensuite $4 \times 2 = 8$ (r^3), $8^2 = 64$ (r^6) et $64^2 = 4096$ (r^{12}).

On peut dire qu'on trouve là les premières traces d'un système de notation binaire qui emploie le zéro et le un pour faciliter le calcul de r^n sans effectuer les multiplications successives par r. Cette première tentative n'a pas abouti à un système de notation binaire des nombres, tel que nous l'utilisons aujourd'hui en informatique.

Le vers 96 est un exercice proposé par Mahâvîra :

> « Après avoir obtenu 2 pièces d'or (dans une ville), un homme va de ville en ville, gagnant (partout) 3 fois (plus qu'il avait gagné immédiatement avant). Dites combien il aura dans la 8e ville. »

Mahâvîra donne aussi la formule pour calculer le nombre de termes, avec a, r et S donnés. Après, il propose beaucoup de formules pour calculer une partie de la suite ou la suite restante.

Opérations sur les fractions

> « Dans la multiplication des fractions, les numérateurs sont à multiplier par les numérateurs et les dénominateurs par les dénominateurs, après avoir effectué le procédé de réduction transversale, si possible, entre les deux fractions » (vers 2).

Le procédé de réduction transversale est appliqué aux fractions quand le numérateur de la première divise le dénominateur de la seconde et vice-versa, et ceci facilite beaucoup la multiplication : c'est ainsi que $6/8 \times 4/18$ peut être réduit à $1/2 \times 1/3$ avec ce procédé. L'exemple 3 du traité s'énonce ainsi :

> « Dis-moi, mon ami, combien aurait une personne pour 3/8 d'un pala de gingembre sec, s'il obtient 4/9 d'un pana pour 1 pala de gingembre ? »

La première remarque qu'on peut faire, c'est que la résolution de cet exercice nécessite l'application de la règle de trois. La plupart des exemples qui sont proposés pour illustrer les règles de multiplication et de division ont cette forme, mais ils sont choisis de façon que la troisième valeur connue soit toujours l'unité, ce qui, effectivement, réduit l'opération à une simple multiplication ou division de deux ou plusieurs fractions. Pour la division, deux règles sont proposées dans le même vers, mais on va considérer seulement la première qui nous semble précise et facile :

> « Après avoir pris le dénominateur du diviseur comme son numérateur (et vice versa), l'opération devient alors une multiplication (de fractions) » (vers 8).

En notation moderne, cela s'écrirait : $(a/b)/(c/d) = (a/b) \times (d/c)$. L'exemple 10 s'énonce ainsi :

> « Combien recevra une personne pour un pala de bois de santal si elle reçoit 20/3 d'un pana pour 3/8 d'un pala ? »

Après ces deux règles, Mahâvîra explique comment trouver le carré, la racine carrée, le cube et la racine cubique des fractions. Il traite des suites arithmétiques avec des termes sous forme de fractions. Les différents types de fractions traités sont :

1) *Bhâga* ou fractions simples. Ce sont les formes telles que a/b ou $a/b \pm c/d \pm \cdots$.

2) *Prabhâga* ou fractions de fractions (a/b de c/d de $e/f \ldots$).

3) *Bhâga bhâga* ou fractions complexes, c'est-à-dire les formes de fractions où un entier ou une fraction est divisé par une fraction : $a/(b/c)$ ou $(p/q)/(r/s)$.

4) *Bhâgânubandha*, c'est-à-dire addition ou combinaison d'une fraction avec une autre ou plusieurs : $a + (b/c)$ ou $((p/q) + (r/s)$ de $(p/q) + (t/u)$ de…).

5) *Bhâgâpavâha* ou fractions en dissociation, c'est-à-dire soustraction d'une fraction d'une autre ou de plusieurs : $a - (b/c)$ ou $((p/q) - (r/s)$ de $(p/q) - (t/u)$ de…).

6) Le sixième et dernier type est le *bhâgamâtṛ* ou fractions formées de deux ou plusieurs des types précédents.

D'après Datta et Singh, les Indiens ont eu besoin de distinguer plusieurs types de fractions parce qu'ils ne possédaient pas un symbolisme adapté pour noter toutes les opérations (seul le point a été employé pour noter la soustraction). Dans ces conditions, on comprend mieux la nécessité d'une telle classification.

La règle pour l'addition et la soustraction des fractions suggère la méthode de réduction aux dénominateurs communs en passant par le calcul du plus petit commun multiple : le *niruddha*.

> « Le *niruddha* (ou le plus petit commun multiple) est calculé au moyen de la multiplication continue de (tous) les facteurs communs (possibles) des dénominateurs et de (tous) leurs quotients (ultimes). Les numérateurs et les dénominateurs sont multipliés respectivement par le quotient obtenu après la division du *niruddha* par les dénominateurs (respectifs) de toutes les fractions pour que les dénominateurs soient égaux (en valeur) » (vers 56).

Par exemple, calculons le *niruddha* de 36 et 24. On a : $36 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 3$ et $24 = \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times \underline{3}$. Les facteurs communs sont $2 \times 2 \times 3$. Les quotients ultimes sont 3 et 2. Le *niruddha* de 36 et 24 est donc $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$. Voici maintenant un problème :

> « Un honorable *śrâvaka* m'avait donné deux pièces d'or et m'avait demandé de lui apporter des lotus blancs, du yaourt, du beurre, du lait et du bois de santal pour 1/4, 1/5, 1/2, 3/10 et 7/20 d'une pièce d'or (respectivement) pour exécuter les offices dans un temple de Jina. Maintenant, dis-moi, ô calculateur, quel sera le reste de l'argent après avoir soustrait les dépenses. »

Un *śrâvaka* est un laïque de la religion jaïna, qui a uniquement le droit d'entendre et apprendre les dharmas ou devoirs, contrairement aux ascètes qui sont autorisés à enseigner les devoirs religieux.

La règle du vers 75 me semble très intéressante. Il s'agit d'une règle qui permet de former une suite de *n* fractions pour laquelle la somme est toujours un et le numérateur de chacune des fractions est aussi un :

> « Quand la somme des différentes quantités ayant un pour leur numérateur est un, les dénominateurs sont tels que, en commençant par un, ils sont multipliés (successivement) dans l'ordre par trois, le premier et le dernier dénominateur ainsi obtenus sont (encore) multipliés par 2 et 2/3 (respectivement). »

Vérifions cette règle en formant une suite de fractions de cinq termes. Dans un premier temps, on obtient la suite : 1/1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81. Après, 1 et 81 sont multipliés par 2 et 2/3 pour aboutir à la suite finale : 1/2, 1/3, 1/9, 1/27, 1/54. On vérifie que $1/2 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + 1/54 = (27 + 18 + 6 + 2 + 1)/54 = 54/54 = 1$.

C'est avec cette règle que je terminerai mon compte-rendu du *G. S. S.* Il y aurait bien d'autres règles et exemples qui mériteraient notre attention, mais nous n'avons pas assez de temps pour les aborder ici.

Conclusion

Au terme de cet exposé sur les suites et les fractions dans le *G. S. S.*, il apparaît tout d'abord que, d'après notre étude, les traits caractéristiques de la pensée de l'auteur sont la simplicité, la concision, l'esprit pédagogique et un souci permanent d'éclairer le lecteur sur toutes les façons possibles d'appliquer les règles énoncées. On peut relever ces qualités tout au long du traité.

Dans le *G. S. S.*, Mahâvîra reprend plusieurs éléments déjà abordés par ses illustres prédécesseurs dont il connaissait manifestement les travaux, bien qu'il ne cite aucun nom d'auteur. Entre Âryabhaṭa et Brahmagupta, les choses se présentent d'une façon claire. Brahmagupta a bien connu les travaux d'Âryabhaṭa, qu'il a critiqués. L'hypothèse que Mahâvîra aurait connu les œuvres de Brahmagupta est admise par les historiens des mathématiques : « Il (Mahâvîra) semble être parfaitement au courant des mathématiques hindoues et, en particulier, de celles de Brahmagupta qui était reconnu un peu partout comme une autorité en la matière. En fait, il (Mahâvîra) traitait plusieurs problèmes qui avaient attiré l'attention de son illustre prédécesseur et essayait de les améliorer, maintes fois avec succès, ce qui démontre qu'il n'était ni un simple compilateur, ni un commentateur, mais un vrai chercheur. »[4] De son côté, G. Mazars nous dit que Mahâvîra simplifie et complète les enseignements de Brahmagupta[5].

Enfin, si j'ai choisi de m'intéresser au *G. S. S.* de Mahâvîra, c'est aussi pour attirer l'attention des historiens des sciences sur une œuvre qui me paraît avoir été injustement négligée jusqu'ici, alors qu'elle représente une étape importante dans le développement de l'arithmétique en Inde. Ce texte nous livre en outre quantité d'informations sur les aumônes, le change, les transactions commerciales, etc., qui nous renseignent sur certains aspects de la vie quotidienne dans l'Inde d'hier.

BIBLIOGRAPHIE

ANDERSON, R. G. W., *Science in India*, catalogue, Crown copyright, 1982.

BAG, A. K., *Mathematics in ancient and medieval India*, Benares, Chaukhambha Orientalia, 1979.

BERNARD, J. A., *L'Inde*, Éditions Fayard, 1985.

BOSE, D. M., SEN, S. N., SUBBRAYAPPA, B. V., *A Concise History of Science in India*, New Delhi, Indian National Science Academy, 1971.

[4] Bose, Sen and Subbrayappa, *A concise history of science in India*, Indian National Science Academy, New Delhi, 1971, p. 166-167.

[5] Actes du colloque « Histoire de fractions, fractions d'histoire », organisé par P. Benoit, K. Chemla et J. Ritter.

CHAKRABARTY, G., Typical problems of hindu mathematics, *Annals of the Bhandarkar Oriental Research Institute*, 14, 1933, 87-102.

COLEBROOKE, H. T., *Algebra with Arithmetic & Mensuration from the sanskrit of Brehmagupta and Bhascara*, London, 1817.

DATTA, B., The jaina school of mathematics, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 21, 1929, 115-145.

DATTA, B., SINGH, A. N., *History of hindu mathematics, A Source Book*, Bombay/London, Asia Publishing House, 1962.

GILLE, E., EISENBERG, J., SA MORIERA, C. A. de, *Grandes religions, mystères et merveilles*, par l'équipe de Life, Éditions des deux coqs d'or, 1965.

Grands reportages, février 1985.

IFRAH, G., *Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention*, Robert Laffont, 1985.

IFRAH, G., *Histoire universelle des chiffres*, Seghers, 1981.

MAZARS, G., L'Inde, dans *Le matin des mathématiciens*, entretiens sur l'histoire des mathématiques présentés par Émile Noël, Paris, Éditions Belin-France Culture, 1985, 122-133.

MAZARS, G., Les fractions dans l'Inde ancienne, de la civilisation de l'Indus à Mahâvîra, dans *Histoire de fractions, fractions d'histoire*, Actes du colloque organisé par P. Benoit, K. Chemla et J. Ritter, Paris, 1987.

RAJAGOPALAN, K., GOVINDARAJU, S., ABDUL HUQ, *A History of Indian Mathematics* (in tamil), The Christian Literature Society, Madras, 1979.

RANGÂÇÂRYA, M., *The Gaṇita-sâra-saṅgraha of Mahâvîrâçârya*, with english translation & notes, published under the orders of the government of Madras, printed by the superintendant, Government Press, 1912.

RODET, L., Leçons de calcul d'Âryabhaṭa, *Journal asiatique*, 7e série, 13, 1879, 393-434.

SARASVATI AMMA, T. A., *Geometry in ancient and medieval India*, Delhi, Motilal Banarsidass, 1979.

ANNEXE : CHRONOLOGIE INDIENNE

Antiquité

Civilisation de l'Indus	env. 2500 av. J.-C.	Métrologie et technologie avancées à en juger par les données archéologiques
Période védique	env. XVe-XIe s. av. J.-C.	Composition du *Veda* ; connaissances élémentaires en arithmétique et géométrie
	env. XIe-VIe s. av. J.-C.	Époque des *Brâhmana* et des *Upanishad* anciennes ; astronomie de calendrier et de rituel, illustrée notamment par le *Jyotishavedanga*

Bouddha	env. 560-480 av. J.-C.	Compilation des *Śulvasûtra* (traités du cordeau) entre le VIII^{e} et le IV^{e} s. av. J.-C.
Dynastie des Nanda	350-320 av. J.-C.	
Alexandre dans l'Inde	325 av. J.-C.	Contacts avec la science grecque ; influence de l'astronomie babylonienne ; les textes relatifs à cette période n'utilisent que le calcul arithmétique
Dynastie des Maurya	320-185 av. J.-C.	
Dynastie des Śunga	185-75 av. J.-C.	Contribution des Jaïna au développement des mathématiques
Dynastie des Kushâna	I^{er}-III^{e} s. ap. J.-C.	
Dynastie des Gupta	320-500 ap. J.-C.	Débuts de l'algèbre et de la trigonométrie appliquées à l'astronomie ; Âryabhaṭa (né en 476), mathématicien et astronome, professe la rotation de la Terre
Règne de Harsha	606-647	Développement de l'algèbre avec Bhâskara I et Brahmagupta
Conquête du Sind par les Musulmans	712	

Période médiévale

Monarchies locales	VIII^{e}-XII^{e} s.	Nombreux traités de mathématiques et d'astronomie ; travaux de Mahâvîra (IX^{e} s.), de Śrîdhara (X^{e} s.), de Śrîpati (XI^{e} s.)
Conquête musulmane	XII^{e} s.	Introduction de la science arabe ; travaux de Bhaskara II
Sultanat de Delhi	XIII^{e}-XVI^{e} s.	Rédaction de nombreux traités d'astronomie et de mathématiques ; traduction de textes sanskrits en persan ; commentaires de traités anciens
Dynastie Bahmani dans le Deccan	1347-1527	
Royaume de Vijayanagar dans le Sud	1336-1565	

Époque moderne et contemporaine

Dynasties mogholes	XVI^{e} -XVIII^{e} s.	Contacts avec la science européenne ; traduction en sanskrit de la version arabe des *Éléments* d'Euclide par Jagannâtha (1718)
Domination britannique	XIX^{e}-XX^{e} s.	Diffusion de la science occidentale ; création des premières universités (1857) ; fondation de sociétés savantes
Inde indépendante	depuis 1947	Contributions nombreuses et remarquées de chercheurs indiens en mathématiques