Anatomie de la construction d'un énoncé mathématique indécidable à l'usage des professeurs de mathématiques et de philosophie.

Olivier MUZEREAU
Professeur agrégé de mathématiques
Académie de l'île de la Réunion

12 avril 2015

Il est fréquent, quand on s'intéresse aux nombres entiers, qu'on y remarque des régularités sur quelques cas particuliers. On se demande dés lors s'il s'agit là de vérités générales.

Exemple 1 :
On remarque la régularité suivante :
$1 = 1^2$,
$1 + 3 = 2^2$,
$1 + 3 + 5 = 3^2$,
$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$.
S'agit-il d'une vérité générale, i.e. si je fais la somme des n premiers nombres impairs, le résultat est-il toujours le carré du nombre n ?
La réponse est positive et sa preuve bien connue des mathématiciens. Il existe d'ailleurs comme souvent bien des façons de prouver cela.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un certain entier impair $2 \times n_0 - 1$ jusque auquel la propriété soit vraie mais qu'elle soit fausse au rang suivant, c'est à dire supposons que $1+3+5+...+(2\times n_0-1) = n_0^2$ mais que $1+3+5+...+(2\times n_0-1)+(2\times n_0+1) \neq (n_0+1)^2$.
Comme on sait que l'égalité $1 + 3 + 5 + ... + (2 \times n_0 - 1) = n_0^2$ est vraie, rajoutons de part et d'autre du signe "=" le nombre $2 \times n_0 + 1$.
On obtient $1 + 3 + 5 + ... + (2 \times n_0 - 1) + (2 \times n_0 + 1) = n_0^2 + (2 \times n_0 + 1)$.
Or il est clair [1] que $n_0^2 + (2 \times n_0 + 1) = (n_0 + 1)^2$, ce qui contredit notre hypothèse de départ.
Il était donc absurde supposer que notre propriété s'arrêtait à un certain rang et n_0 n'existe pas : la propriété est vraie pour tous les nombres.

1. c'est une des identités remarquables : $(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$ avec $a = n_0$ et $b = 1$.

Exemple 2 :
On se donne les règles suivantes :

Je choisis un nombre entier supérieur à 1.
S'il est pair je prends sa moitié.
S'il est impair je le multiplie par 3 et j'ajoute 1.
Si le résultat obtenu n'est pas 1, je recommence la procédure.

Les premières suites de nombres obtenues sont les suivantes :
2,1.
3,10,5,16,8,4,2,1.
4,2,1.
5,16,8,4,2,1.
6,3,10,5,16,8,4,2,1.
7,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1.
On constate que l'on finit par aboutir au nombre 1 sur chacun des exemples. Cette propriété est-elle une propriété intrinsèque des nombres entiers ?
A ce jour, aucune preuve n'a été établie et aucun contre exemple trouvé même pour des nombres très grands [2].
Existe-t'il une preuve de cette propriété ?

Jusqu'au théorème de Gödel (1931), nul n'en aurait douté. La conviction générale était que toute propriété vraie pouvait être prouvée.
On a en effet longtemps confondu vérité et preuve en mathématiques en ne considérant comme vrai que ce que l'on avait canoniquement prouvé. "Canoniquement", c'est à dire suivant un certain nombre de règles de déduction formelles (syllogismes, raisonnements par l'absurde, raisonnements par analyse-synthèse etc) et en partant d'un nombre restreint de postulats généralement évidents pour l'intuition [3].
L'exploration et explicitation de ces vérités matérielles de base ainsi que des règles formelles d'inférence s'est particulièrement affinée entre la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle et la première moitié du XX$^{\text{ème}}$ en s'enrichissant du couple de catégories symbolique-sémantique [4].

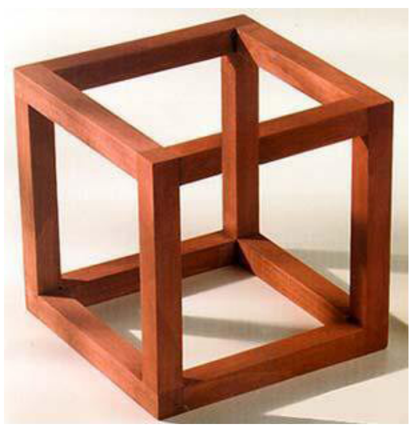
2. Il s'agit de la fameuse conjecture de Syracuse.
3. Nous visons essentiellement ici les postulats de la géométrie ou de l'arithmétique.
4. Dans la suite de cet article, le terme "symbolique" désignera les suites de symboles s'enchaînant mécaniquement les uns avec les autres abstraction faite de toute signification qui pourrait leur être octroyée. Le terme sémantique renvoie lui au sens qu'on attache aux symboles. Ce sens sera ici celui de relations entre nombres entiers.
Le choix des nombres entiers oriente nécessairement le choix de certains axiomes et de certaines règles d'inférence plutôt que d'autres dans le but de cadrer au mieux avec les idées intuitives que l'on se fait des nombres naturels du fait de compter, d'additionner, de multiplier etc.

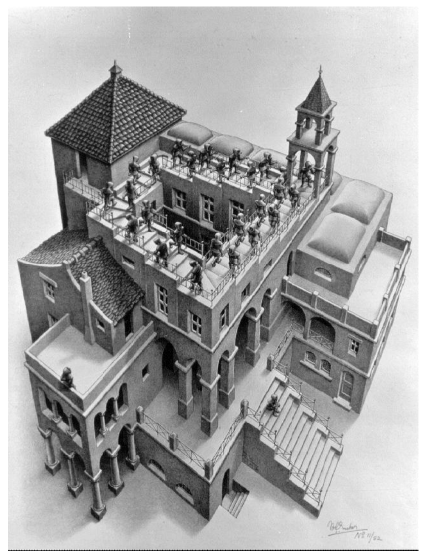
Prenant acte de ce couple de catégories, Kurt Gödel[3] a su construire un énoncé mathématique concernant les nombres entiers qui est vrai mais qui ne peut être mécaniquement déduit en partant des axiomes de bases et en utilisant les règles d'inférence classiques de l'arithmétique.
En nous inspirant du travail éclairant de Raymond Smulyann[1], nous présentons ici, analogies et exemples à l'appui, quelques uns des schèmes permettant de construire cet énoncé vrai et indémontrable.
Notre travail vise essentiellement à donner matière aux professeurs tant de mathématiques que de philosophie pour saisir les originalités de la construction de cet énoncé. Chacun consultera avec profit les parties 1 et 2 de ce travail. La partie 3 s'attache à un morceau plus technique de la preuve et requière de bonnes bases en logique symbolique, discipline plus familière aux professeurs de mathématiques.
Nous renvoyons qui voudrait approfondir les enjeux épistémologiques en lien avec le théorème de Gödel au livre pluriel d'Ernest Nagel et coauteurs[3].

1 Quelques analogies pour illustrer des idées force de la preuve.

1.1 La double lecture possible de certains objets.

Première analogie.
Les dessins ci-dessous ont été effectués par Maurits Cornelis Escher. Douglas Hofstadter[2] a profondément exploré dans son livre ce type d'analogies. Ces images choquent toutes les deux celui qui prend le temps de bien les regarder.





Dans un premier temps, celui qui observe le dessin de gauche se fait tout de suite l'idée d'une sorte de cube.
Dans un deuxième temps, il constate l'impossibilité de l'existence réelle d'une telle figure. Il ne considère donc plus cette image comme celle d'un cube mais, pour en percer le mystère, il envisage le dessin sous l'aspect des règles de sa construction. Il ne voit plus dés lors un cube mais la technique de dessin utilisée pour construire cette image.
L'intelligence suit la même démarche dans le cas de la deuxième figure.

Seconde analogie.
La phrase ci dessous :

Ils ne prirent pas la ville, car attendre et espérer sont toujours de mauvais conseil.

se traduit en grec de la façon suivante :

οὐκ ἔλαβον πόλιν. ἀλλα γὰρ ἐλπὶς ἔφε κακά.

Lue à haute voix, cette phrase grecque s'entend :

où qu'est la bonne Pauline ? Elle pisse et fait caca.

On constate ainsi une différence entre ce que signifie la phrase pour l'helléniste et la signification que sa sonorité renvoie dans une autre langue.

Les exemples précédents visent à familiariser le lecteur avec la numérotation de Gödel. En effet, dans tout ce qui suit on se donne une syntaxe de treize symboles [5] ainsi que des numéros (dits de Gödel) correspondant à ces symboles (on est en base 13) :

0	$'$	$($	$)$	f	$,$	v	$\sim$	$\supset$	$\forall$	$=$	$\leq$	$\#$
1	0	2	3	4	5	6	7	8	9	η	ϵ	δ

Par exemple le prédicat [6] $\exists y(x = 3 + y)$ est vrai dés que x est un nombre supérieur ou égal à 3. Il peut donc *signifier* l'ensemble des nombres supérieurs ou égaux à 3. Mais ce prédicat peut aussi renvoyer à autre chose par l'intermédiaire de son numéro de Gödel.
On peut vérifier [7] qu'il s'agit de $79655265\eta1000456553$. Ce dernier numéro fait partie de divers ensembles de nombres. Par exemple, c'est un élément de l'ensemble des nombres impairs, c'est un élément de l'ensemble des nombres dont la somme des chiffres est égale à 83 (7+9+6+...+5+3 avec η qui vaut pour 10) et une foule nombreuse d'autres possibilités.
Ainsi, pour revenir à notre analogie avec le grec, le premier sens de ce prédicat est "je caractérise l'ensemble des nombres supérieurs ou égaux à 3" mais pour qui ne comprend pas son sens et *n'entend* que son numéro de Gödel, il signifie bien d'autres choses telles que "je suis une expression dont le numéro est impair" ou encore "je suis une expression dont la somme des chiffres du numéro est égale à 83"
Enfin, pour faire le lien avec notre analogie concernant les dessins de Escher, soulignons simplement que c'est une pente nécessaire que suit notre intelligence quand elle passe de l'image de cube à celle de technique de dessin. C'est de la même façon qu'il faut entraîner notre intelligence à passer du sens d'un prédicat à son numéro ; numéro qui peut faire partie de nombreux ensembles de nombres.

5. Dans toutes la suite, on utilisera souvent la couleur bleue pour rappeler qu'on utilise un symbole de base. On utilisera la couleur verte pour signifier qu'on utilise un symbole-abréviation de symboles de base.

6. Cette phrase se lit de façon informelle : il existe un nombre entier y tel que le nombre entier x soit égal à y augmenté de 3.

7. Pour simplifier les notations, on écrira souvent x et y en lieu et place des *variables* $v_{'}$ et $v_{''}$.
Le symbole $\exists$ est quant à lui une abréviation de $\sim\forall$, 3 une abréviation de 0"', + une abréviation de $f_{'}$.

1.2 Les phrases qui parlent d'elles-mêmes.

Parmi les nombreux exemples de phrases parlant d'elles-mêmes, citons en simplement deux[2].

Dans le village, le barbier rase tous ceux qui ne se rasent pas *eux même* et seulement eux.
Qui rase le barbier ?

Deux possibilités :
Soit c'est le barbier. Mais cela est impossible car il ne rase que ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes et donc ne peut *se* raser.
Soit c'est un autre que le barbier. Mais cela est impossible car il rase *tous* ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes et donc devrait se raser.

Génie de la lampe : mon seul souhait est que tu ne réalises aucun de mes souhaits.

Deux possibilités pour le génie :
soit il réalise le souhait mais alors il ne le réalise pas,
soit il ne le réalise pas mais alors il le réalise.

Ayant saisi la possibilité de tels paradoxes, Gödel a cherché à construire une phrase mathématique sensée qui parlerait d'elle-même. Or, seuls les prédicats[8] font sens quand ils parlent des nombres. De plus, ils ont vocation à ne parler que de nombres. Ils deviennent vrais où faux quand on remplace leur variable libre par un nombre. Ils ne signifient rien si on remplace cette variable libre[9] par un autre prédicat.
Par exemple le prédicat qui signifie "x est un nombre pair" est vrai si on remplace x par 48, faux si on le remplace par 951 et n'a aucun sens si on remplace x par "x est un nombre premier". En effet, que signifie ""x est un nombre premier" est un nombre pair" ?
L'astuce de Gödel, c'est l'introduction de ces fameux numéros assignés aux prédicats. Certes l'expression ""x est un nombre premier" est un nombre pair" n'a aucun sens, mais par contre l'expression ""le numéro de Gödel du prédicat "x est un nombre premier"" est un nombre pair" a un sens. Il s'agit d'un énoncé[10] qui est soit vrai, soit faux.

8. Un prédicat arithmétique est une affirmation ou une négation concernant une propriété des nombres entiers. Elle est vraie pour certains nombres et fausse pour d'autres.
Par exemple le prédicat "x est plus grand que le triple de la somme de ses chiffres" est vraie pour 100 car $(1+0+0) \times 3 < 100$ mais fausse pour 14 par exemple (on raisonne dans cette note en base 10.

9. Il s'agit du x de l'exemple de la note précédente.

10. Un énoncé est un prédicat dans lequel la variable libre a été remplacée par un nombre entier. Un énoncé est donc vrai ou faux.

2 Ce qu'il faut élaborer pour obtenir un énoncé indécidable sans mettre encore les mains dans le cambouis.

2.1 Les énoncés vrais et les énoncés prouvables.

Dans la suite précisons que nous appellerons *énoncés* des assertions sur les nombres qui sont soit vraies, soit fausses.
Par exemple l'énoncé "17 est un nombre premier" est vrai mais l'énoncé "60 est un nombre divisible par 7" est faux.
Pour savoir si le premier énoncé est vrai, on liste les diviseurs de 17. Il n'y a que 1 et 17 donc il est premier.
Dans le second cas, on effectue la division euclidienne et on constate que le reste est non nul.

On appellera *énoncé prouvable* un énoncé auquel ont peut arriver en suivant une succession d'étapes partant d'axiomes et aboutissant à l'énoncé à l'aide de règles d'inférence.
Par exemple l'énoncé $\forall x(x \times 1 = x)$ est prouvable.
Partons d'un axiome de l'arithmétique [11] $((x \times (y+1)) = (x \times y) + x)$.
En prenant $y = 0$, on obtient $((x \times (0+1)) = (x \times 0) + x)$.
En utilisant les axiomes $(z + 0) = z$ avec $z = 1$ et $(x \times 0 = 0)$, on obtient $(x \times 1) = x$.
Reste à utiliser la règle d'inférence appelée généralisation [12] pour écrire $\forall x(x \times 1 = x)$.
On a ainsi obtenu un énoncé [13] en utilisant les axiomes et les règles d'inférence : cet énoncé est donc prouvable.
La suite d'opérations effectuées peut être résumée comme suit :
$\#((x\times(y+1)) = (x\times y)+x)\#((x\times(0+1)) = (x\times 0)+x)\#(z+0) = z\#((x\times 1) = (x\times 0)+x)$
$\#(x \times 0 = 0)\#(x \times 1) = x\#\forall x(x \times 1 = x)\#$
Dans cette chaîne, notre énoncé prouvable est précédé de toutes les briques ayant permis sa construction. On appelle cette chaine "*preuve de l'énoncé*".

Il y a donc possibilité de différencier la notion de vérité et celle de preuve.
Dans le premier cas, on a une idée claire de ce que sont les nombres entiers et on utilise les opérations qui nous viennent à l'esprit pour vérifier la vérité ou fausseté de l'énoncé.
Dans le deuxième cas, on part des axiomes et on cherche une chaine constituée d'axiomes, de règles d'inférences et de divers étapes de calcul aboutissant à l'énoncé qu'on souhaite prouver.
Attention. L'ensemble des nombres entiers est ici donné. Notre but n'est pas de le construire mais de nous donner les moyens d'y caractériser des énoncés vrais et des énoncés prouvables.

11. Il s'agit des axiomes de l'arithmétiques N6, N3 et N5 proposés par Smullyan.
12. La règle de généralisation : si on a prouvé f(x), alors on a prouvé $\forall x f(x)$ (puisque le x de la première preuve joue un rôle arbitraire).
13. x n'est plus ici une variable libre à cause du symbole $\forall$ (qui se lit "pour tout")

Reste une remarque importante :
l'énoncé $\forall x(x \times 1 = x)$ est prouvable mais il est aussi vrai car tout nombre multiplié par 1 est égal à lui même.
C'est la définition de la multiplication : $3 \times 4 =_{\text{déf}} 4+4+4$, $2 \times 6 =_{\text{déf}} 6+6$ donc $x \times 1 =_{\text{déf}} x$.
D'un autre coté, un énoncé tel que "17 est un nombre premier" pourrait, bien que fastidieusement, être prouvé à l'aide des axiomes et des règles d'inférence.

Tout le travail qui va suivre va consister à exhiber un énoncé vrai mais non prouvable.

2.2 Le prédicat qui exprime $\mathcal{P}$.

On appelle *prédicat* une expression ayant une variable libre. Quand cette variable est remplacée par un nombre, le prédicat devient un énoncé, c'est à dire qu'il devient vrai ou faux.
On dit qu'un prédicat *exprime* un ensemble de nombres si, quand sa variable libre est remplacée par un nombre de cet ensemble, il devient un énoncé vrai et s'il devient un énoncé faux quand sa variable libre est remplacée par un nombre ne faisant pas partie de cet ensemble.
Rappelons que tout énoncé a un numéro qui est un entier. Il est donc possible de parler par exemple de l'ensemble $\mathcal{S}$ des numéros de Gödel des énoncés par exemple.
Le plus grosse difficulté technique du travail de Gödel consiste à construire un prédicat qui exprime l'ensemble $\mathcal{P}$ des numéros de Gödel des énoncés prouvables [14]. C'est à dire un prédicat qui devienne un énoncé vrai dés que sa variable libre est remplacée par un numéro de Gödel d'un énoncé prouvable. Ce prédicat serait donc vrai pour le numéro $9652654551\eta13$ qui est le numéro de $\forall x(x \times 1 = x)$.
Remarquons qu'il n'y a rien d'évident à ce qu'il existe un tel prédicat. En effet, tout prédicat est un agencement particulier de nos 13 symboles. Il existe une quantité dénombrable d'agencements possibles. Par contre, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ est lui non dénombrable. Il existe donc de fait une pluralité d'ensembles de nombres qui ne sont pas exprimables par des prédicats.

14. C'est l'objet de notre troisième partie.

2.3 Le prédicat qui exprime $\widetilde{\mathcal{P}}$ en fonction du prédicat qui exprime $\mathcal{P}$.

Lemme Si on admet qu'un prédicat $H(x)$ exprime $\mathcal{P}$, alors le prédicat [15] $\sim H(x)$ exprime l'ensemble $\widetilde{\mathcal{P}}$ des numéros de Gödel des énoncés qui ne sont pas prouvables [16].
En effet, si x est le numéro de Gödel d'un énoncé prouvable alors $H(x)$ est vrai donc $\sim H(x)$ est faux, mais si x est le numéro de Gödel d'un énoncé non prouvable alors $H(x)$ est faux donc $\sim H(x)$ est vrai. Donc $\sim H(x)$ est vrai sur les numéros de Gödel des énoncés non prouvables et faux ailleurs : il exprime l'ensemble des numéros de Gödel des énoncés non prouvables.

2.4 Le prédicat exprimant Π en fonction du prédicat exprimant $\widetilde{\mathcal{P}}$ et l'énoncé indécidable.

Reste une dernière étape (**attention, c'est la plus subtile**) : considérons n'importe quel prédicat $E(x)$ de numéro de Gödel n. Notons plutôt $E_n(x)$ ce prédicat.
$E_n(n)$ est donc un énoncé qui est soit prouvable, soit non prouvable.
On note Π l'ensemble des nombres n tels que les énoncés $E_n(n)$ ne soient pas prouvables.
Nous allons construire dans le lemme ci dessous un prédicat $L(x)$ qui exprime l'ensemble Π.

Avant cela, considérons par exemple, le numéro $2654551\eta103$ du prédicat $(x \times 0 = 1)$.
Il est faux donc non prouvable que $(2654551\eta103 \times 0 = 1)$. En conséquence, $2654551\eta103$ fait partie de l'ensemble Π et L($2654551\eta103$) est un énoncé vrai.

On admettra pour simplifier [17] la preuve du lemme que si un prédicat $E_n(x)$ a pour numéro de Gödel n alors il nous est possible de déterminer le numéro de Gödel de l'énoncé $E_n(n)$ **que l'on notera** $d(n)$.

Par exemple le prédicat $F(x)$ défini par $x+1 = 3\times x$ a pour numéro de Gödel $654510\eta100045565$. On peut déterminer le numéro de Gödel de $F(654510\eta100045565)$. C'est à dire l'énoncé obtenu à partir du prédicat F dans lequel toute occurrence de la variable libre x est remplacée par $10^{654510\eta100045565}$. En effet, ce numéro est $10^{654510\eta100045565}4510\eta100045510^{654510\eta100045565}$ dans lequel on a signifié en vert les endroits où la variable x (c'est à dire v' de numéro de Gödel 65) a été remplacée [18] par $10^{654510\eta100045565}$.

15. Le symbole $\sim$ est interprété du point de vue sémantique comme signifiant "non".
16. Attention, ce n'est pas parce qu'il existe des énoncés non prouvables que le travail est terminé. En effet, l'énoncé "$2 = 1$" est faux donc non prouvable. Ce qu'on cherche, c'est un énoncé vrai et non prouvable.
17. C'est lors du détail de cette étape qu'il est très utile d'avoir choisi un nombre premier de symboles (cf.[1]).
18. On utilise la notation $10^{654510\eta100045565}4510...$ pour abréger l'écriture 10..........04510... où le nombre 0 a été répété $654510\eta100045565$ fois

Lemme :
Si $\sim H(x)$ est un prédicat qui exprime $\widetilde{P}$ alors Π est exprimé par le prédicat :

$$L(x) =_{\text{déf}} \exists y(\sim H(y) \wedge (y = d(x))$$

Preuve :
Soit n un nombre tel que $L(n)$ soit un énoncé vrai.
Alors il existe un nombre m qui d'une part est numéro de Gödel d'un énoncé non prouvable et d'autre part vérifie $m = d(n)$, c'est à dire que m est le numéro de Gödel de $E_n(n)$. Ainsi, $E_n(n)$ est non prouvable. Ce qui signifie que n est dans Π.
Réciproquement si n est dans Π alors $E_n(n)$ est non prouvable donc son numéro de Gödel $d(n)$ est dans $\widetilde{P}$ et rend ainsi vrai le prédicat $\sim H(x)$. En conséquence $L(n)$ est vrai.

□

Ce prédicat $L(x)$ a lui aussi un numéro de Gödel (mettons ℓ) donc $L(\ell)$ est un énoncé qui est soit vrai soit faux.

Examinons les deux possibilités.
Soit $L(\ell)$ est vrai. Cela signifie que ℓ est dans l'ensemble Π des nombres n tels que les énoncés $E_n(n)$ ne sont pas prouvables. Donc en particulier, $L(\ell)$ est non prouvable, i.e. il s'agit d'un énoncé vrai et non prouvable.
Soit $L(\ell)$ est faux. Cela signifie que ℓ n'est pas dans l'ensemble Π des nombres n tels que les énoncés $E_n(n)$ ne sont pas prouvables. Donc en particulier, $L(\ell)$ est prouvable, i.e. c'est un énoncé faux et prouvable.
La deuxième possibilité est a rejeter car on suppose qu'à partir d'axiomes vrais et de règles d'inférences valides, on obtient toujours le vrai, i.e. on suppose que tout énoncé prouvable est vrai.
Il faut donc accepter la première proposition :

$L(\ell)$ est un énoncé vrai et non prouvable.

Reste désormais la partie la plus fastidieuse : construire ce fameux prédicat H.

3 Construction du prédicat $H(x)$ exprimant l'ensemble $\mathcal{P}$ des numéros de Gödel des énoncés prouvables.

Nous détaillons dans la suite quelques grandes étapes de la route à suivre pour construire ce prédicat. Une preuve exhaustive mais plus aride peut être trouvée dans le livre de Raymond Smullyan[1].

Dans ce qui suit, nous définiront quelques éléments nécessaires pour pouvoir parler d'énoncé prouvable en exhibant à chaque étape un prédicat caractérisant ces éléments.

On appelle numéral une expression du type $0, 0', 0'', 0'''$ etc. D'un point de vue sémantique, ces expressions signifient les nombres entiers 0, 1, 2, 3 etc.
L'expression symbolique $num(x) =_{\text{déf}} \exists y(x = 10Ey)$ a x pour seule variable libre [19]. Il s'agit du prédicat qui exprime l'ensemble des numéros de Gödel des termes. C'est à dire que l'énoncé $num(n)$ est vrai quand n est le numéro de Gödel d'un terme et faux sinon.
Par exemple le nombre 10000 que l'on a écrit en base 13 est bien le numéro de Gödel d'un terme car 10000=10 E 4. Il s'agit d'ailleurs là du numéro de l'expression 0"" qui signifie 4.

Il existe de même un prédicat noté var(x) exprimant les numéros de Gödel des variables puis un prédicat tm(x) exprimant les numéros de Gödel des termes qui sont les $+$, ., **E** ou '-combinaisons de numéraux [20] ou de variables.

On appelle formule toute $\sim$, $\supset$ ou $\forall v_i$-combinaison d'égalités ou inégalités de termes.
Par exemple $(\overline{3}+v_4=\overline{6})\supset(v_1\sim=\overline{9})$ est une formule.
Le fait qu'un nombre x (v_1) soit le numéro de Gödel d'une égalité ou inégalité entre termes est exprimé par le prédicat [21]
$f_0(v_1) =_{\text{déf}} (\exists v_2, v_3 \leq v_1)(\text{tm}(v_2) \wedge \text{tm}(v_3) \wedge v_1 = v_2 * \overline{\eta} * v_3 \vee v_1 = v_2 * \overline{\epsilon} * v_3)$
On construit de même un prédicat fm(x) exprimant les numéros de Gödel des formules.

Une fois les termes et les formules caractérisés par des prédicats, on peut trouver pour chaque axiome (cf.[1]) un prédicat exprimant l'ensemble de ses numéros de Gödel. Cet ensemble n'est pas toujours un singleton et peut être infini car les axiomes validant des syllogismes doivent

19. 10 est ici l'abréviation en base 13 du symbole $0''''''''''''$.
20. Attention à bien distinguer numéral qui a pour pluriel "numéraux" et numéro de Gödel qui a pour pluriel "numéros"
21. On rappelle pour la commodité :

0	′	(	)	f	,	v	$\sim$	$\supset$	$\forall$	$=$	$\leq$	#
1	0	2	3	4	5	6	7	8	9	η	ϵ	δ

$(F_1 \wedge F_2)$ est l'abréviation de $\sim(F_1 \supset \sim F_2)$et signifie la conjonction "et".

être vrais quelles que soient les formules qu'ils prennent en argument.
Par exemple l'axiome L_3 : $E_x{=}((\sim E_y{\supset}\sim E_z){\supset}(E_z{\supset}E_y))$ où E_x, E_y, E_z sont des formules de numéros de Gödel x, y, z est exprimé par le prédicat :
$(\exists v_2, v_3{\leq}v_1)(\mathrm{fm}(v_2){\wedge}\mathrm{fm}(v_3){\wedge}v_1 = \overline{227} * v_2 * \overline{87} * v_3 * \overline{382} * v_3 * \overline{8} * v_2 * \overline{33})$

En notant A(x) le prédicat caractérisant le fait d'être un axiome (A(n) est vrai si n est le numéro de Gödel d'un axiome et faux sinon), on obtient le prédicat $Pr(v_1)$ suivant qui exprime l'ensemble P des numéros de Gödel des énoncés prouvables :

$$\mathrm{Seq}(v_1){\wedge}(\forall v_2 \in v_1)(\mathrm{A}(v_2){\vee} \underbrace{(\exists v_3, v_4 \underset{v_1}{\prec} v_2)(v_4{=}v_3 * \overline{8} * v_2)}_{v_3 \text{ et } \underbrace{v_3 \Rightarrow v_2}_{v_4} \text{ précèdent } v_2 \text{ dans la preuve}} {\vee}(\exists v_3 \underset{v_1}{\prec} v_2)\mathrm{Gen}(v_3, v_2))$$

Quelques commentaires :
Seq(x) est un prédicat vrai sur les numéros de Gödel des expressions du type "# expression # expression # expression ..." où aucune expression interne ne contient le symbole # (voir l'exemple de la section 2.1). Il caractérise les suites d'expressions.
Pour $v_1 = n$ un nombre naturel donné, "$\forall v_2 \in n$" signifie "pour toute partie de l'écriture en base 13 du nombre n qui ne contienne pas le symbole #". Là encore, cela demande du travail de construire une expression présentant ce sens à l'aide des significations allouées aux treize symboles de départ. De même, $\exists v_3 \underset{n}{\prec} v_2$ signifie qu'il existe un v_3 dans l'écriture en base 13 de n apparaissant à gauche de v_2 et ne comportant pas le symbole #.
La note en accolade ainsi que la dernière expression $\mathrm{Gen}(v_3, v_2)$ sont les règles d'inférence :
La première est le modus ponens.
La seconde est la généralisation : si on a prouvé f(x), alors on a prouvé $\forall x f(x)$.
L'expression symbolique de la généralisation est $(\exists v_3{\leq}v_1)(\mathrm{Var}(v_3){\wedge}v_1{=}\overline{9} * v_3 * v_2)$, où v_2 est appelée dans les preuves à signifier le numéro de Gödel d'une formule.
L'énoncé $Pr(n)$ peut donc être lu de façon informelle :
"n est le numéro de Gödel d'un énoncé prouvable quand chaque séquence de chiffres composant son écriture en base 13 et comprise entre deux δ [22] est soit le numéro de Gödel d'un axiome, soit le numéro de Gödel d'une expression qui résulte du modus ponens de deux expressions de numéros de Gödel présents plus à gauche dans l'écriture de n (et compris chacun entre deux δ), soit le numéro de Gödel d'une expression qui résulte de la généralisation d'une expression dont le numéro de Gödel est présent plus à gauche dans l'écriture de n".

22. C'est le chiffre associé au symbole #.

Références

[1] Raymond Smullyan, *Les théorèmes d'incomplétude de Gödel*. Dunod, 2000.

[2] Douglas Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach : Les Brins d'une Guirlande Éternelle*. Dunod, 1979. Traduction en français de Jacqueline Henry et Robert

[3] Ernest Nagel, James R. Newman, Kurt Gödel, Jean-Yves Girard *Le Théorème de Gödel* Sciences, 1997.