Compte-rendu de la séance avec l'abaque de Gerbert en CE2 b le 12 juin 2023

Contexte

Le programme de cycle 2 dit que : « Une bonne connaissance des nombres inférieurs à mille et de leurs relations est le fondement de la compréhension des nombres entiers et ce champ numérique est privilégié pour la construction de stratégies de calcul et la résolution des premiers problèmes arithmétiques. » Dans le cas de la multiplication posée, les « stratégies de calcul » sont en fait des algorithmes créés au moyen-âge voire avant, en Asie (Chine du sud ou Inde du nord). Ces algorithmes sont connus en Occident depuis la traduction par Fibonacci (vers 1200) d'écrits d'Al Khwarizmi (dont le nom a été latinisé par Fibonacci en *algoritmus* d'où vient le mot « algorithme »). Parmi les algorithmes présentés par Fibonacci, le plus populaire est celui décrit par d'Alembert dans l'Encyclopédie :

Multiplicande, ... 329.
Multiplicateur, ... 58.

2632.
1645.

19082. Produit.

Après avoir diſpoſé le multiplicateur 58 ſous le multiplicande 329, c'eſt-à-dire les unités de l'un ſous les unités de l'autre, les dixaines ſous les dixaines, *&c.* & avoir tiré une ligne, je dis 8 fois 9 = 72 ; je poſe 2 & je retiens 7, comme dans l'addition ; enſuite 8 fois 2 = 16, auxquels ajoutant 7 j'ai 23 ; je poſe donc 3 & retiens 2 ; après quoi je dis, 8 fois 3 = 24 & 2 retenus font 26 ; j'écris 6 & poſe 2 en avançant vers la gauche.

Quand j'ai opéré ſur le multiplicande 329 avec le premier nombre 8 du multiplicateur ; je répete une opération ſemblable avec le nombre ſuivant 5, ayant ſoin de mettre le premier chiffre de ce nouveau produit ſous les dixaines, parce qu'alors ce ſont des dixaines qui multiplient ; & faiſant enſuite l'addition des deux produits 2632 & 1645 diſpoſés comme on le voit dans l'exemple, je trouve que le produit total eſt 19082.

Lorsque d'Alembert écrit « je dis 8 fois 9 = 72 », il fait évidemment allusion à une connaissance (stockage de la table de multiplication, que Leibniz appelait *Pythagorique*, dans la mémoire à long terme). Et lorsqu'il écrit « je pose 2 & je retiens 7 », il s'agit d'écrire 2 et de mémoriser (dans la mémoire de travail) le chiffre 7.

Dans les manuels de CE2 du XXI[e] siècle, on trouve encore cette méthode de multiplication, à ceci près que les retenues sont écrites et pas mémorisées. Typiquement, pour effectuer une multiplication de nombres à plusieurs chiffres,

- on écrit les retenues au lieu de les retenir,
- on écrit les produits du multiplicande par chacun des chiffres du multiplicateur, l'un en-dessous de l'autre mais décalés,
- on ne matérialise pas les colonnes par des traits verticaux les séparant (ce qui nécessite un placement précis des chiffres par le calculateur si on n'utilise pas du papier à carreaux)
- on raisonne en termes de décalage et non en termes d'ordres de grandeur : dans l'exemple de l'Encyclopédie, on dit 5×9=45 qu'on décale d'un cran vers la gauche (pour avoir 450) parce que le 5 est le chiffre des dizaines dans le multiplicateur (plutôt que dire que 50×9=450).

Par ailleurs, les encyclopédistes avaient conscience (sans doute pour l'avoir vécu) du caractère pénible de l'enseignement de cet algorithme de multiplication. L'article « multiplication » de l'Encyclopédie occupe trois pages !

Or une solution alternative existe depuis plus de mille ans, elle est due au pape Sylvestre II, qui lorsqu'il n'était que Gerbert, avait eu l'occasion d'enseigner la multiplication à des élèves parfois illustres (des évêques, l'historien Richert, le roi Robert II, l'empereur Othon II,…). La pédagogie de Gerbert était en avance sur son époque (voire la nôtre) puisque basée sur la manipulation, la pédagogie de projet, les travaux pratiques… et la numération décimale ! En effet Gerbert enseignait la multiplication deux siècles avant que Fibonacci la popularise.

L'objet de la séance était de tester l'abaque de Gerbert en CE2, avec des élèves qui connaissaient déjà la multiplication posée et étaient de ce fait en mesure de comparer les deux approches. L'abaque de Gerbert n'utilise pas l'écriture ni l'effaçage (pas de crayon ni de gomme), est basée sur la manipulation d'objets et ne nécessite que la connaissance des tables de multiplication (on n'y échappe pas !)

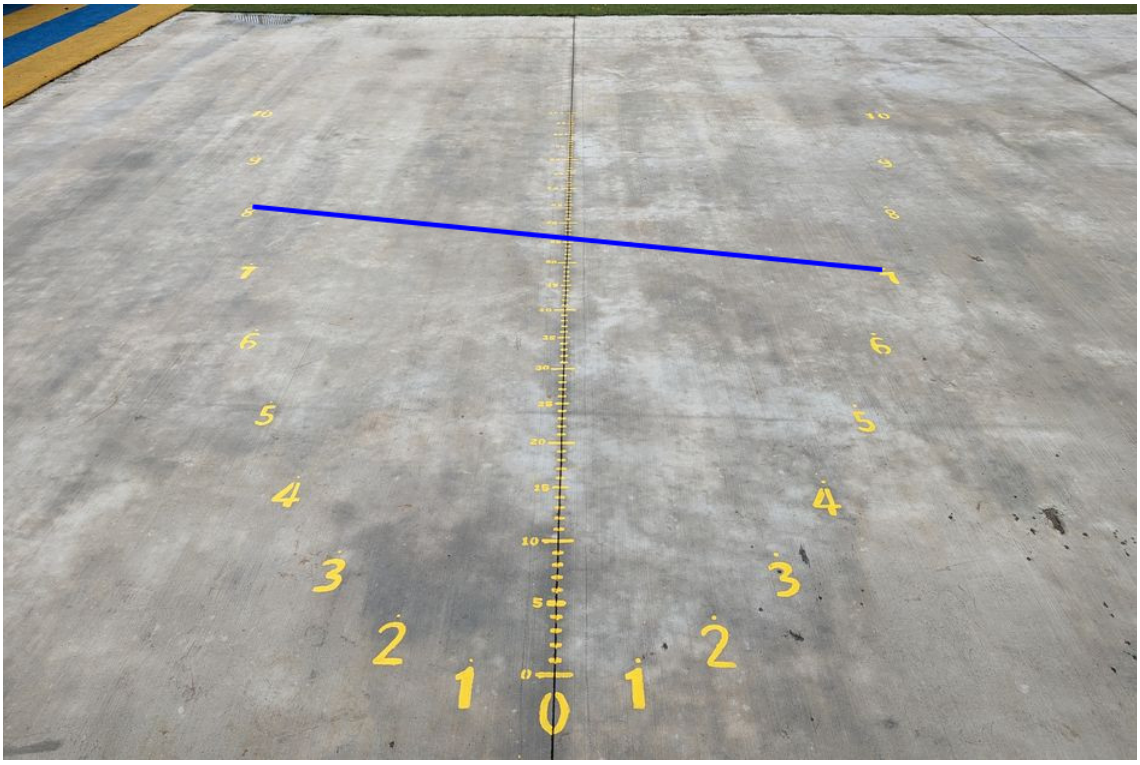
Tables de multiplication

Même avec la méthode de Gerbert, il est nécessaire de trouver rapidement les produits de deux nombres à un chiffre. Le moyen le plus rapide est de les sortir de sa mémoire (à long terme) ce qui suppose qu'on les ait mémorisé précédemment… Avec les effectifs des classes, subordonner l'enseignement des techniques de calcul à la connaissance parfaite des tables de multiplication, n'est pas raisonnable. L'apprentissage des tables de multiplication et l'apprentissage du calcul sont progressifs (sur plusieurs années) donc simultanés. Que faire alors lorsqu'il s'agit de former à la technique de calcul, des élèves qui ne connaissent pas encore les tables de multiplication ?

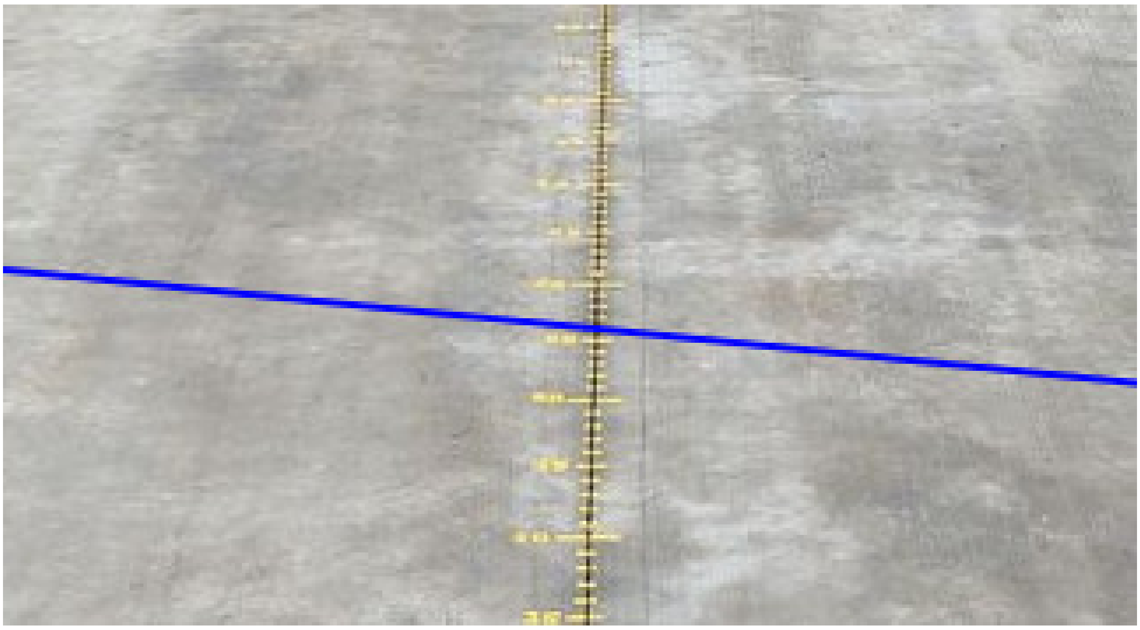
- Une technique répandue est la pratique des additions. Par exemple si on ne sait pas combien font 8×7, on peut calculer (calcul mental ou posé) 8+8+8+8+8+8+8 ou 7+7+7+7+7+7+7+7 par additions successives. Cela aide la mémorisation à long terme mais prend du temps.
- On peut aussi calculer par doublages successifs : 8×7=2×2×2×7=2×2×14=2×28 (si on sait calculer mentalement des doubles).

- Mais il y a aussi le nomogramme de multiplication :

En tendant une ficelle entre les nombres 8 et 7 sur le nomogramme,



le produit s'obtient par lecture graphique de la graduation sur l'axe :



Le nomogramme étant peint dans la cour de l'école, il faudrait idéalement programmer des séances Gerbert (par exemple en APC) près de la cour, voire, si la météo le permet, dehors, avec une ficelle permettant de mesurer les produits. La combinaison des artéfacts Gerbert+nomogramme donnerait alors à l'activité un caractère pleinement manipulatoire. En particulier, on ne dispose actuellement pas de données permettant d'évaluer l'efficacité de la nomographie vue comme un vecteur d'apprentissage des tables de multiplication (l'idée remonte d'ailleurs à Möbius en 1848).

La méconnaissance des tables de multiplication en CE2 est effective. Ainsi des élèves ont affirmé avec certitude que 8×7 est égal à 54. À leur décharge,

- 54 est un nombre pair comme on s'y attend pour un multiple de 8.
- 54 est proche de 56 comme nombre.
- 8×7 et 9×6 sont géographiquement proches dans la table de Pythagore, comme le montre l'extrait suivant :

							8	9	
6								54	
7							56		

Cependant, la connaissance des tables de multiplication est la seule vraie difficulté avec l'abaque de

Gerbert. Le reste n'est que manipulation de jetons.

Abaque de Gerbert

Gerbert et le moyen-âge

Il y a 11 siècles, en France, personne n'était capable d'effectuer une multiplication par un nombre à deux chiffres, et c'est Gerbert qui a changé la donne en introduisant la numération décimale en France. Cette information a impressionné les élèves. Voici ce qu'écrivait Leibniz à propos de la numération décimale au début du XVIIIe siècle :

> Mais cette Arithmétique ordinaire par dix ne paroît pas fort ancienne, au moins les Grecs & les Romains l'ont ignorée, & ont été privés de ſes avantages. Il ſemble que l'Europe en doit l'introduction à Gerbert, depuis Pape ſous le nom de Sylveſtre II, qui l'a eue des Maures d'Eſpagne.

En fait, l'abaque de Gerbert n'a rien d'original, ce sont les jetons qui sont une invention originale.

Ci-dessus on voit le calcul (pas fini) de la multiplication 264×48. Comme le multiplicande a 3 chiffres et le multiplicateur a 2 chiffres, il y a 3×2=6 produits partiels, lesquels sont

- 8×4 = 32 (caché par la main du calculateur)
- 8×60 = 480 (visible : le chiffre caché est inexistant parce que égal à 0)
- 8×200 = 1600 (avant-dernière ligne pour l'instant)
- 40×4 = 160 (dernière ligne pour l'instant)
- 40×60 = 2400 (non encore calculé)
- 40×200 = 8000 (non encore calculé)

ce qui donnera un produit égal à 32+480+1600+160+2400+8000 qu'on peut calculer directement par des groupements-échanges sur l'abaque : les élèves choisissent en général de commencer par la droite et trouvent 12672.

Il est possible de dire « 8 fois 6 = 48 donc 8 fois 60 = 480 » et placer directement le jeton 4 dans la colonne des centaines et le jeton 8 dans la colonne des dizaines. Mais il est également possible de

- dire 8×6 = 48,
- placer le jeton 4 dans la colonne des dizaines et le jeton 8 dans la colonne des unités,
- poser le majeur sur le jeton 8 et l'index sur le jeton 4,
- dire que puisque le chiffre 6 représente 60, on décale les deux jetons d'une colonne vers la gauche, ce qui se fait directement du fait que les jetons glissent mieux sur l'abaque que sur le doigt.

Placement des jetons

Gerbert avait rédigé (en latin) une sorte de poème qui expliquait où placer les jetons. Il montrait probablement les jetons à ses élèves à l'aide de deux doigts dont l'un est replié (le chiffre des dizaines). En effet il appelait digit (que Michel Chasles traduit par doigt) le chiffre des unités et articulo (articulation, que Chasles traduit par article) le chiffre des dizaines. Ce script en Python

```
rang = ['unités','dizaines','centaines',
    'milliers','dizaines de milliers','centaines de milliers',
    'millions','dizaines de millions','centaines de millions',
    'milliards','dizaines de milliards','centaines de milliards']
print('Pour multiplier ')
for i in range(6):
    for j in range(i,6):
        S = 'des '
        S += rang[i] + ' par des '
        S += rang[j] +', mettre le doigt sur les '
        S += rang[i+j] + " et l'article sur les "
        S += rang[i+j+1] + '.'
        print(S)
```

permet de reconstituer le texte de Gerbert (ou plutôt sa traduction française, que Chasles n'avait pas faite faute de place). Voici un extrait de la sortie obtenue (c'est une table d'addition déguisée) :

Pour multiplier

- des unités par des unités, mettre le doigt sur les unités et l'article sur les dizaines.
- des unités par des dizaines, mettre le doigt sur les dizaines et l'article sur les centaines.
- des unités par des centaines, mettre le doigt sur les centaines et l'article sur les milliers.
- des unités par des milliers, mettre le doigt sur les milliers et l'article sur les dizaines de milliers.
- des dizaines par des dizaines, mettre le doigt sur les centaines et l'article sur les milliers.
- des dizaines par des centaines, mettre le doigt sur les milliers et l'article sur les dizaines de milliers.
- des dizaines par des milliers, mettre le doigt sur les dizaines de milliers et l'article sur les centaines de milliers.
- des centaines par des centaines, mettre le doigt sur les dizaines de milliers et l'article sur les centaines de milliers.
- des centaines par des milliers, mettre le doigt sur les centaines de milliers et l'article sur les millions.

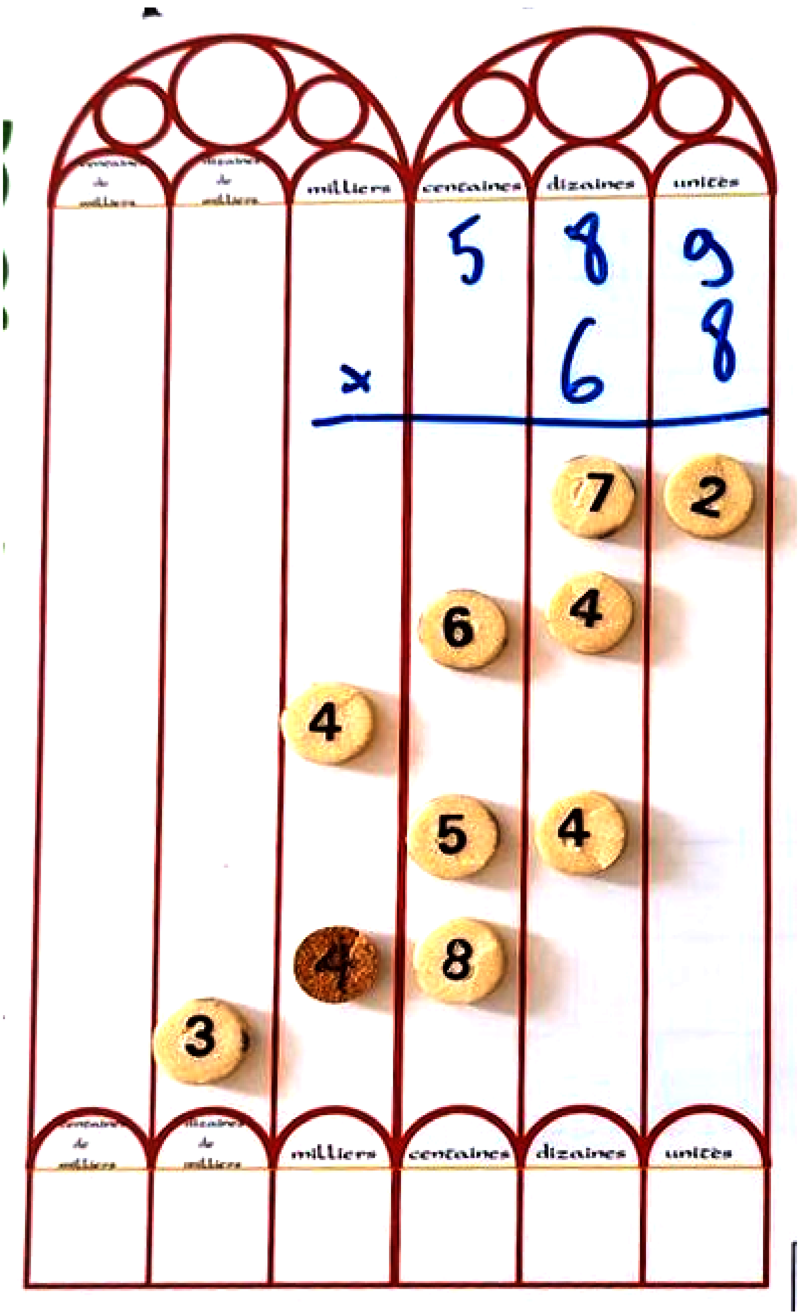
Mais l'apprentissage par cœur de ce texte n'est pas nécessaire pour savoir où placer les jetons. Comme on l'a vu il est possible de dire « 8×6 = 48 donc 8×60 = 480 » et placer 4 dans les centaines et 8 dans les dizaines, ou commencer par dire « 8×6 = 48 », placer le 8 (le doigt) dans la colonne des unités et le 4 (l'article) dans la colonne des dizaines (ou placer 4 dans la colonne des dizaines en disant « quarante » puis 8 dans la colonne des unités en disant « 8 ») et ensuite seulement dire que puisque le facteur 6 est dans la colonne des dizaines, il faut décaler d'une colonne vers la gauche les deux jetons.

La verbalisation (et la présence des colonnes) permet de se passer facilement du chiffre 0 puisque par exemple s'il y a un 3 dans la colonne des centaines et un 2 dans la colonne des unités, on prononce « trois centaines et deux unités » qui se simplifie facilement en « trois cents deux » : il n'est pas d'usage de prononcer « zéro dizaine » dans ce genre de situation.

Par contre il y a parfois des difficultés à se rappeler si le chiffre des dizaines doit être placé à gauche ou à droite du chiffre des unités. C'est peut-être la conséquence du fait qu'on effectue les calculs de droite à gauche (à cause des retenues) alors qu'on lit (les nombres) de gauche à droite. C'est peut-être aussi la conséquence du fait qu'il n'y a pas de place (horizontalement) dans une colonne pour y placer les deux chiffres. Certains élèves ont tendance à systématiquement mettre le chiffre des dizaines à droite de celui des unités.

Utilisation de l'abaque en classe

Les énoncés (choix du multiplicande et du multiplicateur) ont été élaborés par des élèves (c'est un bon moyen d'évaluer leur niveau), et un volontaire a effectué la multiplication écrite au tableau alors que d'autres ont effectué la même multiplication sur l'abaque ou l'ardoise. Les abaques de l'IREM étant plastifiés, on peut rappeler les opérandes au feutre afin d'éviter d'avoir à les mémoriser :

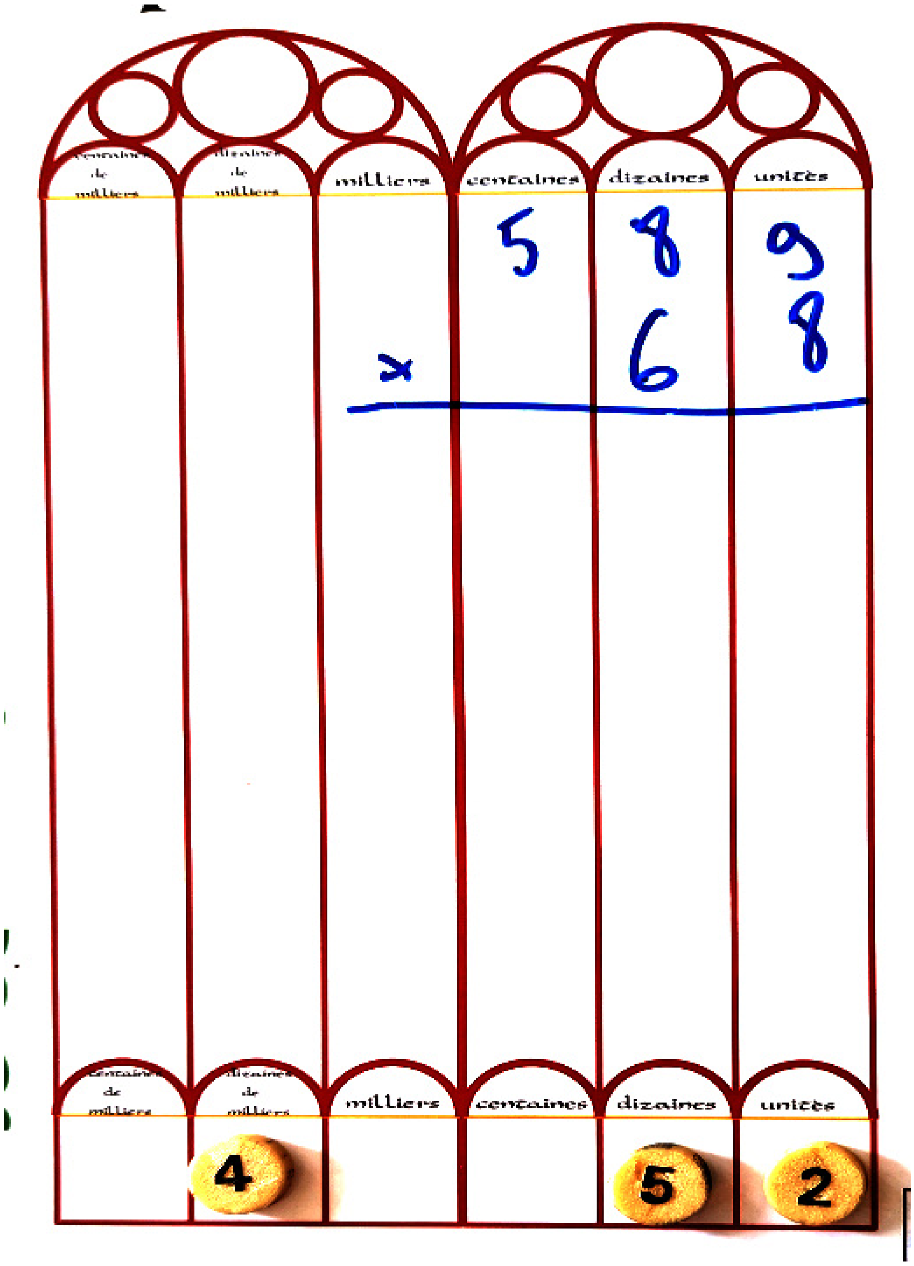


Comme le multiplicande a 3 chiffres non nuls, et que le multiplicateur a 2 chiffres non nuls, il y aura 3×2 = 6 produits partiels, chacun formé d'un (le doigt) ou deux (le doigt, précédé de l'article) chiffres, et obtenu par les tables de multiplication. Une des erreurs les plus répandues chez les élèves est l'oubli d'un de ces 6 produits partiels. Une autre est le décalage erroné (typiquement, le produit est trop à droite). Pour la multiplication ci-dessus, on détaille les produits partiels, verbalisés :

- 8×9 = 72
- 8×8 = 64 donc 8×80 = 640
- 8×5 = 40 donc 8×500 = 4000
- 6×9 = 54 donc 60×9 = 540
- 6×8 = 48 donc 60×80 = 4800
- 6×5 = 30 donc 60×500 = 30000

(ou encore, comme 6×5 = 30, on place un jeton 3 dans la colonne des dizaines, puis on le décale une fois vers la droite parce que ce n'est pas 6 mais 60, et encore deux fois vers la droite parce que ce n'est pas 5 mais 500).

La multiplication ci-dessus n'est pas vraiment finie, mais il ne reste plus qu'à effectuer les additions.



Mais même là l'abaque de Gerbert permet une autre vision : si on commence par la gauche on va moins vite (parce que de nouvelles retenues pourront apparaître au cours du calcul) mais on a tout de suite un ordre de grandeur du résultat, on voit qu'il est proche de 40000.

Ensuite on procède par groupements-échanges, par exemple en remplaçant les deux jetons 4 de la colonne des milliers par un seul jeton 8 dans la même colonne, ou en remplaçant le jeton 7 de la colonne des dizaines par un jeton 5 et un jeton 2, pour ensuite remplacer les jetons 2, 4 et 4 de la colonne des dizaines par un jeton 1 dans la colonne des centaines, etc. et dans l'ordre qu'on veut (les stratégies de calcul évoquées dans le programme) !

Conclusion

Bilan

On va examiner les caractéristiques de l'activité selon le triptyque manipuler → verbaliser → abstraire cité dans le rapport Villani-Torossian.

Manipuler

Gerbert se servait de son abaque pour enseigner la multiplication (et surtout la division) par la manipulation d'objets. L'utilisation du canal kinesthésique pour enseigner a été promue également par

- Édouard Lucas (prof de maths en CPGE) à la fin du XIXe siècle,
- John Dewey (philosophe) à la toute fin du XIXe siècle,
- Maria Montessori (médecin) au tout début du XXe siècle,
- Ovide Decroly (instituteur) au début du XXe siècle,
- Célestin Freinet (instituteur) entre les deux guerres,
- Jean Piaget (psychologue) durant tout le XXe siècle,
- Charles Torossian (inspecteur général) et Cédric Villani (député) dans leur rapport,
- plus récemment (et plus localement) Ibrahim Moullan (prof de maths)…

Le matériel nécessaire est constitué de l'abaque proprement dit (probablement facile à trouver sous le nom de tableaux de numération, sinon reproductible en papier mais à plastifier de préférence), les jetons (plus difficiles à trouver, mais la création de jetons de Gerbert par dessin d'un chiffre sur un jeton vierge, peut être en soi une activité pédagogiquement intéressante ; Gerbert avait commandé auprès d'un artisan champenois la fabrication de milliers de jetons en ivoire, de fait en CE 2 il faut au moins 5 jetons de chaque sorte soit ***50 jetons par élève***) et optionnellement un nomogramme pour les élèves ayant des difficultés avec les tables de multiplication.

Pour le corrigé, on peut aussi utiliser des jetons magnétiques visibles depuis le fond de la salle de cours et qui tiennent sur le tableau blanc : on dessine sur ce tableau un abaque géant et un élève (ou l'enseignant) place ou déplace les jetons en expliquant les phases du calcul.

Verbaliser

La phase de verbalisation est clairement la plus complexe. En fait, d'expérience, on saisit facilement les concepts mis en jeu avec l'abaque de Gerbert, quand on ***manipule soi-même***. Il est bien plus difficile de comprendre en regardant faire les autres.

Les élèves ont apprécié de manipuler l'abaque et se sont prêtés au jeu de la verbalisation : ils ont essayé d'expliquer ce qu'ils faisaient, par exemple en récitant les tables de multiplication, en essayant d'expliquer pourquoi ils mettaient les jetons à tel endroit, en explicitant les groupements-échanges, etc.

La verbalisation est importante avec l'abaque de Gerbert, surtout sur le placement des jetons : comme l'écrivait d'Alembert, « je dis » : soit je dis 8×6 = 48 pour ensuite revenir à la phase de manipulation en faisant glisser les deux jetons vers la gauche parce que le 6 est dans la colonne des dizaines, soit je dis 8×60 = 480 puisque le jeton 6 dans la colonne des dizaines représente 60. En fait on gagne même à raconter toutes ces versions de la même histoire.

Abstraire

Certains élèves dyspraxiques ont du mal à suivre une ligne du regard, a fortiori deux lignes simultanément (une verticale et une horizontale dans la table de Pythagore). Ces élèves au moins bénéficient du nomogramme (qui ramène la lecture du produit à une seule ligne à suivre) et de l'abaque (dont les colonnes, tracées, guident le regard verticalement).

La lenteur des indiens (puis après eux, les arabes, et encore après, les européens) à utiliser le chiffre 0, suggère que celui-ci est bien plus abstrait que les autres chiffres. Or l'abaque de Gerbert n'utilise pas le chiffre zéro : pour écrire 480 on place un 4 dans la colonne des centaines et un 8 dans celle des dizaines ***et c'est tout***, il n'y a pas besoin de préciser qu'il n'y a pas d'unités.

Pour multiplier par une puissance de 10, on déplace les deux jetons (les chiffres) ce qui est plus porteur de sens que le déplacement de la virgule. En effet l'abaque de Gerbert peut avantageusement servir pour les nombres décimaux.

Propositions

De nombreux élèves ont apprécié cette approche de la multiplication, ce qui est une bonne surprise parce qu'en fin de CE 2, certains sont déjà à l'aise avec le calcul posé des multiplications. En particulier, une élève qui avait fait de nombreuses erreurs de soustraction lors du tournoi d'alquerkonane, s'est bien mieux débrouillée avec les multiplications. Il serait donc intéressant d'explorer la démarche de Gerbert avant la fin d'année de CE 2, par exemple en fin d'année de CE 1.

Une progression possible avec l'abaque de Gerbert est celle-ci :

- En CE 1, découverte de l'abaque avec des additions de plusieurs termes comme celle vue plus haut 72+640+4000+540+4800+30000, voire des soustractions effectuées avec groupements-échanges.
- En CE 2, utilisation de l'abaque de Gerbert pour effectuer des multiplications posées, en commençant par les produits partiels à deux chiffres, puis en introduisant les sommes partielles (par exemple 72+640+4000 = 4712 et 540+4800+30000 = 35340 qu'on peut

ensuite retrouver directement sur la multiplication posée à la d'Alambert (avec les retenues) pour finir par 4712+35340 = 40052.

- En CM 1, découverte (sur l'abaque de Gerbert) de la division vue comme soustraction itérée, de la division euclidienne et des additions et soustractions sur les nombres décimaux.
- En CM 2, approfondissement de la division et multiplication sur les nombres décimaux.

Un atelier de fabrication de jetons de Gerbert présente aussi un certain intérêt. Il s'agit essentiellement de dessiner les chiffres sur les jetons et on peut envisager d'y impliquer des élèves de GS et CP.

La combinaison Gerbert+nomogramme n'a pas encore été testée…

La manipulation au tableau avec des jetons grands et magnétiques n'a pas encore été testée non plus.

Laetitia Bègue

Alain Busser

Patrick Schilli

IREM LA RÉUNION