Formulaire de mathématiques - BTS : Groupement D

Analyses Biologiques - Biochimie - Biotechnologies - Hygiène, propreté, environnement - Métiers de l'eau - Peintures, encres et adhésifs - Plastiques et composites - Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries.

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce programme

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

ln(ab)=ln a + ln b, où $a > 0$ et $b > 0$

exp(a+b) = exp a $\times$ exp b

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

cos(a+b)=cos a cos b - sin a sin b

sin(a+b)=sin a cos b + cos a sin b

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

sin(2t)=2 sin t cos t

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$, ch $t = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$, sh $t = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)\right)$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a. Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$

$\lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$

$\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b. Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
$t^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$

$f(t)$	$f'(t)$
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$
$\text{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\text{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$e^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	ae^{at}

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^a)' = au^{a-1}u'$

c. Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur [a,b] :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

d. Développements limités

$e^t = 1 + \dfrac{t}{1!} + \dfrac{t^2}{2!} + \ldots + \dfrac{t^n}{n!} + t^n\epsilon(t)$

$\dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^n t^n + t^n\epsilon(t)$

$\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n} + t^n\epsilon(t)$

$\sin t = \dfrac{t}{1!} - \dfrac{t^3}{3!} + \dfrac{t^5}{5!} + \ldots + (-1)^p\dfrac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\epsilon(t)$

$\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^4}{4!} + \ldots + (-1)^p\dfrac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\epsilon(t)$

$(1+t)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}t + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\epsilon(t)$

e. Equations différentielles

Equations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ ou G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + c = 0$ Equation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]\,e^{rt}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2\alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique

3. PROBABILITES

a. Loi binomiale

$C_n^k \; p^k \; q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n\,!}{k\,!\;(n\text{-}k)\,!}$ $\quad$ $E(X) = np\,;$ $\quad$ $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b. Loi de Poisson

$$P(X{=}k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k\,!} \qquad E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda$$

$k \backslash \lambda$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$k \backslash \lambda$	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,223	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,175	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,175	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,001	0,002	0,006	0,013
18								0,000	0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20									0,000	0,001	0,002
21										0,000	0,001
22											0,000

c. Loi exponentielle

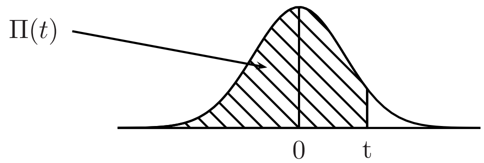
Fonction de fiabilité : $R(t) = e^{-\lambda t}$ $\quad$ $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\quad$ $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

d. Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE N(0,1)

$$\Pi(t) = P(T \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4	4,5
$\Pi(t)$	0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$