Probabilités

1 Probabilités élémentaires

Exercice 1
Cinq personnes vont au restaurant. Elles déposent leur chapeau au vestiaire. Après le repas, elle récupèrent leur chapeau au hasard. On convient de numéroter les personnes de 1 à 5.

Pour $i \in [\![1, 5]\!]$, on note A_i l'événement :"La personne numéro i repart avec son chapeau" et A l'événement :"Aucune personne ne repart avec son chapeau".

1. Quel univers peut-on associer à cette expérience aléatoire ?
2. Calculer les probabilités des événements $P(A_i)$ et $P(A_i \cap A_j)$ pour $i \neq j$.
3. Calculer $P(A)$.

Exercice 2
Une élection comporte trois candidats et n votants, où n est un entier supérieur ou égal à 3. Chaque votant donne sa voix à l'un ou l'autre de ces trois candidats. Tout candidat qui a obtenu au moins une voix est élu.
On suppose que chaque vote se porte au hasard, de facon équiprobable, sur un de ces candidats et que les votes sont mutuellement indépendants.
Le vote se faisant par correspondance, le dépouillement se fait au fur et à mesure de la réception des bulletins de vote et, pour tout entier naturel k au plus égal à n, on note u_k la probabilité qu'après réception du k-ième bulletin, un seul candidat ait obtenu des voix, v_k la probabilité qu'après réception du k-ième bulletin, exactement deux candidats aient obtenu au moins une voix chacun et w_k la probabilité qu'après réception du k-ièmebulletin, les trois candidats aient obtenu au moins une voix chacun.

1. (a) Préciser les nombres u_1, v_1 et w_1.
   (b) Justifier les égalités : $u_2 = \dfrac{1}{3}$, $v_2 = \dfrac{2}{3}$, $w_2 = 0$.
   (c) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer qu'il existe une matrice M vérifiant pour tout entier naturel k non nul et srictement inférieur à n:
   $$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}$$
   (d) En déduire l'égalité matricielle :
   $$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$$
2. Soit A la matrice donnée par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer la matrice A^2.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul k, il existe des nombres réels a_k, b_k, c_k vérifiant l'égalité $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_k & 2^k & 0 \\ b_k & c_k & 3^k \end{pmatrix}$ et les relations $\left\{ \begin{pmatrix} a_{k+1} = a_k + 2^{k+1} \\ b_{k+1} = b_k + 2c_k \\ c_{k+1} = 2c_k + 3^k \end{pmatrix} \right.$
   (c) Pour tout entier naturel non nul k, on pose : $d_k = a_{k+1} - a_k$ et $q_k = \dfrac{c_{k+1}}{2^{k+1}} - \dfrac{c_k}{2^k}$.
   Montrer que les suites $(d_k)_{k\in\mathbb{N}.^\times}$ et $(q_k)_{k\in\mathbb{N}.^\times}$ sont deux suites géométriques et préciser leurs raisons.
   (d) Calculer de deux facons différentes, pour tout entier naturel k non nul, les sommes $\sum_{j=1}^{k-1} d_j$ et $\sum_{j=1}^{k-1} q_j$.
   En déduire les égalités : $\left\{ \begin{pmatrix} a_k = 2^{k+1} - 2 \\ c_k = 3^k - 2^k \end{pmatrix} \right.$
   (e) Exprimer, pour tout entier naturel non nul k, $b_{k+1} - b_k$ en fonction de k.
   En déduire, par une méthode analogue à celle de la question d), l'égalité : $b_k = 3^k - 2^{k+1} + 1$.
3. (a) Exprimer la matrice M^{n-1} à l'aide de la matrice A^{n-1} et en déduire les égalités :
   $$\begin{cases} u_n = & \dfrac{1}{3^{n-1}} \\ v_n = & \dfrac{2^n - 2}{3^{n-1}} \\ w_n = & 1 - \dfrac{2^n - 1}{3^{n-1}} \end{cases}$$
   (b) Déterminer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$. Ces résultats étaient-ils prévisibles ?
   (c) À partir de quel nombre n de votants est-on certain à 99% qu'au moins deux candidats sont élus ?

Exercice 3
Dans cet exercice, tous les événements considérés sont définis dans un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité P. Pour tout événement M et tout événement N tel que $P(N) \neq 0$, on rappelle que la probabilité conditionnelle de M sachant N, notée $P_N(M)$, est donnée par
$$P_N(M) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)}$$
On note $\overline{M}$ l'événement contraire de M.

1. On considère trois événements A, B, C tels que $P(B) \neq 0, P(B) \neq 1, P(C) \neq 0, P(B \cap C) \neq 0$.
   (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que
   $P(A \cap C) = P(A \cap B \cap C) + P\left(A \cap \overline{B} \cap C\right)$

(*b*) En déduire alors la formule suivante : $P_C(A) = P_{B\cap C}(A)\,P_C(B) + P_{\overline{B}\cap C}(A)\,P_C(\overline{B})$

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante : on lance indéfiniment une pièce amenant $Pile$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, et $Face$ avec la probabilité q,où $q = 1 - p$. On admet que les résultats des différents lancers sont indépendants. Pour tout entier naturel k non nul, on note
F_k l'événement :" on obtient $Face$ à l'issue du k-ième lancer ".

$\overline{F_k}$ est donc l'événement :" on obtient $Pile$ à l'issue du k-ième lancer ".
On considère l'événement E : " 2 $Face$ consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de 2 $Pile$ consécutifs"
Par exemple :

- ♦ si les résultats des six premiers lancers sont $F_1\overline{F_2}F_3\overline{F_4}F_5F_6$, alors E est réalisé;
- ♦ si les résultats des six premiers lancers sont $\overline{F_1}F_2F_3\overline{F_4}\overline{F_5}F_6$, alors E est réalisé;
- ♦ si les résultats des six premiers lancers sont $F_1\overline{F_2}F_3\overline{F_4}\overline{F_5}F_6$,alors $\overline{E}$ est réalisé.

2. (*a*) Donner sans calcul la valeur de $P_{F_1\cap F_2}(E)$.
(*b*) Justifier également sans calcul la relation suivante $P_{F_1\cap\overline{F_2}}(E) = P_{\overline{F_1}}(E)$.
(*c*) En utilisant la relation trouvée à la question **1.**(*b*), avec $A = E, B = F_2$ et $C = F_1$,trouver une relation entre $P_{F_1}(E)$ et $P_{\overline{F_1}}(E)$.

3. (*a*) Que vaut $P_{\overline{F_1}\cap\overline{F_2}}(E)$?
(*b*) Montrer que $P_{\overline{F_1}\cap F_2}(E) = P_{F_1}(E)$.
(*c*) Toujours en utilisant la relation de la question **1.**(*b*) appliquée à des événements bien choisis,
montrer que $P_{\overline{F_1}}(E) = qP_{F_1}(E)$.

4. (*a*) Déduire des questions **2** et **3** les égalités $P_{F_1}(E) = \frac{q}{1-pq}$ et $P_{\overline{F_1}}(E) = \frac{q^2}{1-pq}$.
(*b*) Calculer $P(E)$ en fonction de p et de q.

5. On note G l'événement : " 2 $Pile$ consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de 2 $Face$ consécutifs"
(*a*) Expliquer comment trouver $P(G)$ sans calcul.
(*b*) Vérifier que $P(E) + P(G) = 1$. Comment interpréter ce dernier résultat ?

2 Variables aléatoires discrètes

Exercice 4
On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 10. Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1. Déterminer $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de X.
2. Démontrer que : $\forall k \in \{1, n\}$, $P(X \geq k+1) = \dfrac{A_{10}^k}{10^k}$.
3. En déduire la loi de X.
4. Montrer que l'espérance $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{A_{10}^k}{10^k}$.

Exercice 5
Une urne contient n boules blanches et n boules noires $(n \geq 1)$. On effectue dans cette urne des tirages d'une boule sans remise jusqu'à obtention de toutes les boules noires.
Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires.

1. Déterminer la loi de X.
2. Démontrer que $\sum\limits_{k=n}^{2n}\binom{n}{k} = \binom{2n+1}{n+1}$.
3. En déduire que $E(X) = \dfrac{n(2n+1)}{n+1}$

Exercice 6
Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère deux variables aléatoires discrètes indépendantes X et Y telles que:
X suit une loi binomiale de paramètres n et x (notée $B(n, x)$ avec $x \in]0, 1[$).
Y suit une loi binomiale de paramètres n et y (notée $B(n, y)$ avec $y \in]0, 1[$).
On pose alors Z la variable aléatoire discrète définie par l'égalité: $Z = 2n - X - Y$.

1. (a) Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs possibles de Z.
   (b) Exprimer en fonction de n, x et y les probabilités:
   $$P(Z = 0) \quad ; \quad P(Z = 2n) \quad ; \quad P(Z = 2n-1) \quad ; \quad P(Z = 1)$$
   (c) Donner les espérances et variances suivantes: $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$, et en déduire $E(X^2)$ et $E(Y^2)$.
   (d) On pose W la variable aléatoire définie par $W = XYZ$.
   Montrer que l'espérance de W est donnée par: $E(W) = n^2(n-1)xy(2-x-y)$.

Exercice 7
Une secrétaire effectue 3 appels téléphoniques vers 3 correspondants distincts. Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $\frac{1}{5}$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondant obtenu.

1. Déterminer la loi de X. On donnera les résultat sous la forme de fractions irréductibles.
2. Après ces 3 recherches, la secrétaire appelle une deuxième fois chacun des correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. Par exemple, si elle a obtenu 1 correspondant lors de la première série d'appels, elle rappelle les 2 correspondants qu'elle n'a pu obtenir. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondant obtenu lors des deux séries d'appels.

Par exemple, si la secrétaire a obtenu 1 correspondant lors de la première série d'appels (donc elle recontacte lors de la seconde série d'appels les 2 correspondants non contacté la première fois) et qu'elle réussit à contacter 1 seul correspondant lors de la seconde série d'appel, alors elle a contacté $Y = 1 + 1 = 2$ correspondants lors des deux séries d'appels
Déterminer la loi du couple (X, Y).

3. En déduire la loi de Y.

Exercice 8
On dispose d'une urne qui contient des boules numérotées de 1 à N ,N étant un entier naturel non nul.
On y effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise de la boule tirée avant de procéder au tirage suivant. On désigne par X la variable aléatoire réelle égale au nombre de tirages nécessaires pour voir pour la première fois toutes les boules de l'urne.

1. On suppose que l'urne contient 2 boules (N=2)

1. Montrer que la probabilité d'avoir effectué n tirages pour voir pour la première fois les deux boules de l'urne,est donnée par : pour $n \geqslant 2 \quad p[X = n] = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
2. Vérifier que la variable aléatoire $Y = X - 1$ suit une loi géométrique. Quel en est son paramètre ? Donner la valeur de l'espérance et de la variance deY. En déduire l'espérance et la variance de X.

On suppose que l'urne contient 3 boules (N=3).
On note A_n (respectivement B_n ,C_n) l'événement:"la boule A (respectivement la boule B,la boule C)n'a pas été obtenue au cours des n tirages, $n \in \mathbb{N}^{\times}$

1. Déterminer les probabilités suivantes :
$$p[A_n], \quad p[A_n \cap B_n], \quad p[A_n \cap B_n \cap C_n]$$
2. Exprimer l'événement $[X > n]$ en fonction des événements A_n,B_n,C_n.
3. Prouver que pour tout $n \geqslant 2$:
$$p[X > n] = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
4. En déduire que la loi de X est donnée par : pour tout $n \geqslant 3 \quad p[X = n] = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$
5. Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} p[X = n] = 1$
6. Montrer que X admet une espérance et déterminer cette espérance.

Exercice 9
Etant donné un réel λ et $p \in]0; 1[$, on considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = n\lambda p^n$$

1. Déterminer le réel λ.
2. Calculer $E(X)$.

Exercice 10
Une urne contient trente bulletins marqués A et vingt marqués B. On tire successivement des bulletins en remettant chaque fois le bulletin tiré.

1. Quelle est la loi de la v.a.r X égale au numéro du tirage où apparaît le premier bulletin marqué B ?
2. Calculer la probabilité que le premier bulletin marqué B apparaisse à un tirage de numéro pair.

Exercice 11
Soient a et b deux entiers naturels vérifiant $1 \leq b < a$.
Une urne contient a boules blanches et $a - b$ boules noires. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise dans l'urne de la boule tirée après chaque tirage. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux boules blanches.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X)$.

Exercice 12
Soit X une v.a.r telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $p_{n+1} = \dfrac{2}{n+1} p_n$.

1. Démontrer que $p_n = \dfrac{2^n}{n!} p_o, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la loi de X. Calculer $E(X)$.

Exercice 13

1. Djouneid brise en moyenne trois verres et une assiette par mois. Soit X le nombre de verres et Y le nombre d'assiettes victimes de sa maladresse en un mois. S'agissant de phénomènes accidentels, on suppose que X et Y suivent des lois de Poisson.
   (a) Etablir les lois de probabilités des variables X et Y.
   (b) Quelle est la loi de $X + Y$?
   (c) Calculer la probabilité d'avoir un mois sans verre ni assiette cassé.
2. Il casse aussi les bols. La variable aléatoire égale au nombre de bols cassés involontairement en un an suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6$. Son standing lui impose de casser au moins cinq bols par an. Le soir du 31 décembre, si son score annuel est inférieur à cinq, il casse le nombre de bols nécessaire pour atteindre ce manimum. Soit Z le nombre de bols cassés par an.
   Etablir la loi de Z. Calculer $E(Z)$.

Exercice 14
Une urne contient des boules blanches et noires. On suppose que la probabilité de piocher une blanche vaut $p \in]0,1[$. On effectue des tirages successifs avec remise.
Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 1-ère boule blanche.

1. Reconnaître la loi de X_1 et donner la valeur de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 2-ième boule blanche. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.
3. Soit X_r la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la r-ième boule blanche ainsi que la variable aléatoire $Y_r = X_{r+1} - X_r$.
   (a) Que représente la variable Y_r ? En déduire sa loi et son espérance.
   (b) Montrer, par récurrence, que la variable X_r admet une espérance.
   (c) Justifier que la suite $(E(X_r))_{r\in\mathbb{N}^\times}$ est arithmétique.
   Expliciter alors $E(X_r)$ en fonction de r.
4. Détermination de la loi de X_r.
   (a) Donner l'univers de X_r.
   (b) Pour $r \in \mathbb{N}^\times$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $r \leqslant k$, on considère les évènements
   A_k : "obtenir $r-1$ boules blanches aux $k-1$ premiers pioches ",
   B_k "obtenir une boule blanche à la k-ième pioche ".
   Comparer l'évènenement $A_k \cap B_k$ et $(X_r = k)$. En déduire la loi de X_r.

Exercice 15
Un péage comporte m guichets numérotés de 1 à m. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de voitures arrivant au péage en 1 heure. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet $n^\circ 1$.

1. Calculer $P_{(N=n)}(X=k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$.
2. Justifier que $P(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X=k)\,P(N=n)$
3. Montrer que $P(X=k) = e^{-\lambda}(\frac{1}{m})^k \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\lambda\left(1-\frac{1}{m}\right)\right)^n$.
4. En déduire la loi de probabilité de X (on retrouvera une loi usuelle)
5. Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 16
On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre λ. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres.
La probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à t.
On s'intéresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné :
N est la variable aléatoire égale au nombre de colis expédiés; X est la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés; Y est la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état. On a donc : $X + Y = N$.

1. Calculer, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, la probabilité conditionnelle suivante : $P_{(N=n)}(X=k)$.
2. En déduire que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.
3. En suivant une méthode similaire à X, déterminer la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles, à priori et sans calcul, indépendantes ?
5. Calculer la probabilité $P((X=k)\cap(Y=q))$ et $P(X=k)P(Y=q)$. Conclusion

Exercice 17
On considère une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u).
On suppose que $\quad p \geq \frac{1}{4} \quad r \geq \frac{1}{4} \quad u \geq \frac{1}{4} \quad$ et que $\quad p + r + u = 1$.
On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement: "Tirer une boule blanche (respectivement rouge, verte) au $n^{ième}$ tirage".
On appelle X (resp Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première blanche (resp rouge).
On définit alors la variable $D = |X - Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

1. Déterminer la loi de X. Faire de même pour Y.
2. Soit i et j des entiers naturels non nuls.
   (a) Exprimer, très soigneusement, l'événement $(X=i)\cap(Y=j)$ à l'aide des événements décrits dans l'énoncé.
      i. lorsque $i < j$
      ii. lorsque $i = j$
      iii. lorsque $i > j$
   (b) En déduire la valeur de la probabilité $P((X=i)\cap(Y=j))$.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
4. Expliciter l'image-univers $D(\Omega)$
5. Exprimer l'évènement $(D=1)$ à l'aide des évènements $(X=i)_{i\in\mathbb{N}^\times}$ et $(Y=j)_{j\in\mathbb{N}^\times}$.
   En déduire que $P(D=1) = \frac{2pr}{p+r}$.
6. Soit k un entier naturel non nul, montrer l'égalité:
$$P(D=k) = \frac{pr}{p+r}\left[(1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1}\right]$$
7. Montrer que D admet une espérance et que $E(D) = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - \frac{2}{p+r}$.