Probabilités

1 Densité de probabilité

Exercice 1
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{x+|x|+1}{2(|x|+1)}$.

1. Démontrer que F est la fonction de répartition d'une VAR X. Tracer $\mathcal{C}_F$.
2. Calculer les probabilités suivantes:
   - $P(X \leq 0,5)$
   - $P(X > -0,5)$
   - $P(-1 < X \leq 1)$
3. Déterminer une densité de probabilité associée à F.

Exercice 2
On définit f par :

$$f(x) = \begin{cases} k(4x - x^2), & \text{pour } x \in [0,4] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer k pour f soit une densité d'une variable aléatoire, que l'on notera X.
2. Calculer alors la fonction de répartition F_X et tracer sa représentation graphique.
3. Calculer $P(1 < X < 2)$ et $P(X > 2/X > 3)$.
4. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 3
λ est un réel strictement positif. On considère la fonction réelle f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda^2 t e^{-\lambda t}, & \text{pour } t \geq 0 \\ 0, & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire que l'on notera X.
2. Calculer l'espérance de X.
3. On suppose que cette espérance vaut 2. Construire les représentations graphiques de f et de F, fonction de répartition de X.

Exercice 4 (loi de Rayleigh)
Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est densité de probabilité.
2. Soit X une VAR dont une densité de probabilité est f; Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Déterminer la loi de X^2.

Exercice 5
Un skieur doit traverser un glacier de largeur 1. On sait qu'il y a une probabilité p pour qu'il exite une crevasse. Si celle-ci existe, sa position P est une V.A.R qui suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

Le skieur a pourcouru la distance $x \quad (x \in [0,1])$ sans rencontrer de crevasse. Quelle est la probabilité qu'il en rencontre une avant la fin du trajet ?

Exercice 6
Un train arrive en gare toutes les heures, de 0^h à 24^h. Monsieur Durand doit prendre l'un de ces trains; son heure d'arrivée à la gare est une VAR X qui suit la loi uniforme sur $[0,24]$. On désigne par Y la VAR égale au temps d'attente de Monsieur Durand. Montrer que Y suit une loi uniforme.

Exercice 7
La durée d'attente X en secondes, à la caisse rapide d'un supermarché, est une variable aléatoire qui suit un loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{200}$.

1. Calculer les probabilités que :
   - l'attente soit inférieure à 1 minute.
   - l'attente dépasse 3 minutes.
2. Un client, après une attente de 2 minutes 30, se plaint d'être arrivé à un mauvais moment. Sa plainte est-elle fondée ?

Exercice 8
Soit X une variable aléatoire qui une loi normale $\mathcal{N}(20;5)$.

1. Calculer les probabilités suivantes :
   $P(X \leq 28)$ $P(X \geq 28)$ $P(X \geq 12)$ $P(X \leq 12)$ $P(12 \leq X \leq 28)$
2. Déterminer le réel a tel que :
   a. $P(X \leq a) = 0,99$ *b.* $P(X \leq a) = 0,01$ *c.* $P(X \geq a) = 0,05$ *d.* $P(X \geq a) = 0,9$ *e.* $P(20 - a \leq X \leq 20 + a) = 0,95)$.

Exercice 9
On suppose que la variable aléatoire X égale aux tailles des éléves d'une école suit une loi normale de moyenne 160 cm et d'écart-type à 15 cm. Déterminer :

1. La probabilité pour qu'un éléve ait une taille supérieure à 175 cm.
2. La probabilité pour qu'un éléve ait une taille comprise entre 150 cm et 155 cm.

Exercice 10
On suppose que la variable aléatoire X dont les valeurs sont les notes obtenues à une certain examen suit une loi normale de moyenne 76 et d'écart-type 15. Sur 100 candidats, les 15 meilleurs obtiennent la mention "TB", les dix derniers ne sont pas admis.

1. Calculer $P(X < 0)$. Justifier le fait que X peut suivre une loi normale.
2. Calculer la note minimale pour obtenir la mention "TB".
3. Calculer la note minimale pour réussir.

2 Inégalité de Beinaymé Tchebytchev - Approximations

Exercice 11
On considère une éprueve de Bernouilli prenant la valeur 1 avec la probabilité $\frac{1}{100}$. On réalise n fois cette épreuve. On note X la variable aléatoire égal au nombre de 1 obtenu au cours de ces n épreuves.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer le nombre d'épreuves n à répéter à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une fois 1 soit supérieur à $\frac{95}{100}$.
3. Refaire le même calcul en approximant la loi de X par une loi de poisson.

Exercice 12
Un livre de 800 pages contient 1000 erreurs d'impression réparties au hasard. On désigne par X la variable aléatoire définie par le nombre d'erreurs figurant dans une page.

1. Déterminer la loi de X. Donner $E(X)$ et σ_X.
2. Montrer qu'il est légitime d'apporcher la loi de X par une loi de poisson, que l'on déterminera.
3. Déterminer la probabilité pour qu'il y ait dans une page donnée :
   - aucune erreur;
   - une erreur;
   - deux erreurs;
   - au plus trois erreurs;
   - au moins trois erreurs.

Exercice 13
Une entreprise fabrique des brioches en grande quantité. On pèse les boules de pâte avant la cuisson. On note X la variable aléatoire qui à chaque boule de pâte associe sa masse. X suit une loi normale de moyenne $700g$ et d'écart-type $20g$.

1. Seules les boules dont la masse est comprise entre $600g$ et $732g$ sont acceptées à la cuisson. Quelle est la probabilité qu'une boule, prise au hasard dans la production soit acceptée à la cuisson ?
2. On désigne par h un réel positif. Déterminer h afin que l'on ait : $P(700 - h \leq X \leq 700 + h) \leq 0,95$.
3. On admet que 8% des boules sont refusés à la cuisson. On prélève au hasard, successivement et avec remise, n boules dans la production. On note Y_n la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de n boules, associe le nombre de boules qui seront refusées à la cuisson. Quelle est la loi de Y_n?
   - Dans le cas $n = 10$, calculer la probabilité d'avoir exactement 3 boules refusées à la cuisson.
   - Dans le cas $n = 50$, on admet que l'on peut approcher la loi de Y_50 par une loi de poisson. Préciser le paramètre de cette loi de poisson.
   - Calculer alors la probabilité d'avoir, parmi 50 boules prélevées, exactement 4 boules refusées à la cuisson, puis la probabilité d'avoir au moins 45 boules acceptées à la cuisson.

Exercice 14
Sur une autoroute la proportion de camions par rapport à l'ensemble des véhicules est $0,07$.

1. - Soit X le nombre de camions parmi 100 véhicules pris au hasard. Quelle est la loi de X.
   - Par quelle loi peut approximer la loi de X. En déduire $P(X \geq 5)$.
2. - Soit Y le nombre de camions parmi 1000 véhicules. Quelle est la loi de Y.
   - Par quelle loi peut-on approximer la loi de Y ? Calculer $P(65 \leq Y \leq 75)$.
3. - On suppose que n véhicules empruntent l'autoroute. On note Z le nombre de camions parmi ces n véhicules. Quelle est la loi de Z.
   - A quelle condition sur n peut-on approximer la loi de Z par une loi normale ?
   - On suppose la condition précédente vérifiée, Déterminer les valeurs de n pour lesquelles on peut affirmer que la proportion des camions parmi ces n véhicules est comprises entre $0,06$ et $0,08$ avec un risque d'erreur inférieur à $0,05$.

3 Exercices complémentaires

Exercice 15

1. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ est convergente et calculer sa valeur.

   Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 2 \\ f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

2. Montrer que f définit une densité de probabilité.

3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité.

   (a) Déterminer la fonction de répartition de X.

   (b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
   On considère trois variables aléatoires indépendantes T_1, T_2 et T_3, chacune de même loi que X.

4. On condidère la variable aléatoire $U = \inf(T_1, T_2, T_3)$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (U > t) = (T_1 > t) \cap (T_2 > t) \cap (T_3 > t)$$

   (a) Déterminer la fonction de répartition G de U.

   (b) Montrer que U admet une densité et déterminer une densité g de U.

   (c) Montrer que U admet une espérance et calculer $E(U)$.

5. On condidère la variable aléatoire $V = \sup(T_1, T_2, T_3)$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (V \leqslant t) = (T_1 \leqslant t) \cap (T_2 \leqslant t) \cap (T_3 \leqslant t)$$

   (a) Déterminer la fonction de répartition H de V.

   (b) Montrer que V admet une densité et déterminer une densité h de V.

   (c) La variable aléatoire V admet-elle une espérance ?

Exercice 16

1. Etude préliminaire

   On admet, pour tout entier naturel k et tout réel x de $[0; 1[$, que la série $\sum\limits_{n \geqslant k} C_n^k x^n$ est convergente et on note $s_k(x) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n$.

   (a) Vérifier, pour tout réel x de $[0; 1[$:

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \text{ et } s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

   (b) Pour tout couple d'entiers naturels (n, k) tel que $k < n$, montrer :

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

   (c) Pour tout entier naturel k et tout réel x de $[0; 1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x).$$

   (d) Montrer, par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall x \in [0, 1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

2. Etude d'une expérience aléatoire.

   On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

   - On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
   On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
   - Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
   On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^{\times}$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k/N = n)$.

   (c) Vérifier : $\quad P(X = 0) = \dfrac{4}{9}.$

   (d) En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^{\times}, \quad P(X = k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

   (e) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.

   (f) Montrer : $\quad \forall k \in \mathbb{N}, \ P(X \leqslant k) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k.$

3. Etude d'une variable aléatoire à densité

   On note $a = -\dfrac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k & \text{si } x \in [a; +\infty[\\ F(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   On rappelle : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\dfrac{4}{9}\right)^x = e^{x \ln \frac{4}{9}}.$

   (a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, notée Y.

   (b) Déterminer une densité f de Y.

(c) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{x \ln \frac{4}{9}}$.

(d) Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ et calculer $E(Y)$.

1. **Étude d'une suite**
On note $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ la suite réelle définie pour tout entier n strictement positif par :

$$c_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$$

(a) Montrer que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ est une suite décroissante de réels positifs.

(b) Montrer que, pour tout entier n strictement positif, l'on a : $c_{n+1} + c_n = \dfrac{1}{n}$

(c) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leqslant 2c_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

En déduire un équivalent simple de c_n quand n tend vers l'infini.

(d) Calculer c_1 et prouver, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right)$$

2. **Étude d'une suite de variables aléatoires à densité**
Pour tout entier n strictement positif, on note f_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \dfrac{1}{c_n\, t^n(1+t)} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

(a) À l'aide d'un changement de variable, établir pour tout entier n strictement positif et pour tout réel x supérieur ou égal à 1, l'égalité :

$$\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)} dt = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du$$

(b) En déduire que, pour tout entier n strictement positif, f_n est une densité de probabilité. Dans la suite de l'exercice, on suppose que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, telle que, pour tout entier n strictement positif, X_n prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$ et admet f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n.

(c) Pour quelles valeurs de n la variable aléatoire X_n admet-elle une espérance? Dans le cas où l'espérance de X_n existe, calculer cette espérance en fonction de c_n et de c_{n-1}.

(d) Dans cette question, exclusivement, on suppose que n est égal à 1. Préciser la fonction F_1.
En déduire l'ensemble des réels y vérifiant $\mathbf{P}([X_1 \leqslant y]) \geqslant \dfrac{1}{2}$ Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z = \ln(X_1)$.

(e) Soit x un réel strictement supérieur à 1.
Justifier l'encadrement :

$$0 \leqslant \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du \leqslant \frac{1}{n+1}$$

En déduire la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du \right).$$

Transformer, pour tout entier naturel n non nul, $F_n(x)$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire l'égalité suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 1.$$

(f) Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x)$ si x est un réel inférieur ou égal à 1 ?
Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ converge en loi vers une variable que l'on précisera.

Exercice 17
On considère dans cet exercice un rèel $\alpha > 0$.

1. Soient X et Y des variables aléatoires définies sur l?espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la loi exponentielle de paramétre α. Montrer que la variable aléatoire $inf(X, Y)$ suit la loi exponentielle de paramètre 2α.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $X - Y$. En déduire que $|X - Y|$ suit la loi exponentielle de paramétre α.
Trois personnes, A, B et C, arrivent en même temps à une borne téléphonique qui comporte deux cabines qu'occupent immédiatement A etB ; C remplace le premier sorti (qui quitte tout de suite les lieux). On note U, V et W les temps aléatoires respectifs d'occupation de leur cabine par A, B et C. On suppose que U, V et W sont des variables aléatoires indépendantes et de loi exponentielle de paramètre α.
2. Calculer la probabilité que C soit le dernier des trois à sortir de sa cabine.
3. Expliciter la fonction de répartition et, s'il y a lieu, une densité, de la variable aléatoire $sup(U, V)$. Préciser la loi de la variable aléatoire T égale au temps total passé par C à cette borne. La variable aléatoire T admet-elle une espérance ? Dans l'affirmative, préciser $E(T)$.

4. On note Z la variable aléatoire égale à l'instant où la dernière des trois personnes A, B et C quitte la borne, l'instant 0 étant celui de leur arrivée simultanée. Montrer que $Z = inf(U,V) + sup(|U-V|, W)$. On admet que les variables aléatoires $inf(U,V), |U-V|$ et W sont indépendantes. Préciser la loi de Z.
   Montrer que $Z - T = sup(|U-V| - W, 0)$. La variable aléatoire $Z?T$ est-elle à densité ?

Exercice 18
On considère une suite de variables alèatoires réelles $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ indépendantes et identiquement distribuées, ayant pour fonction de densité :

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} 1_{[0,\theta]}$$

où θ est un paramètre réel strictement positif.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $M_n = sup(X_1, ..., X_n)$ est une variable aléatoire réelle dont on déterminera une densité.
2. Calculer les deux premiers moments de M_n.
3. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$, on a :
$$(|M_n - \theta| > \epsilon) \subset (|M_n - \frac{2n\theta}{2n+1}| > \frac{\epsilon}{2})$$
4. En déduire que la suite $(M_n)_n$ converge en probabilité vers θ.
5. Donner l?espérance et la variance de la variable $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
6. Montrer que la suite (Y_n) converge en probabilité vers $\frac{2\theta}{3}$. Comparer les variances de M_n et de $Z_n = \frac{3Yn}{2}$.
7. Quelle méthode choisiriez-vous pour estimer la valeur du paramètre θ ?

Exercice 19
Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, et $Cov(X,Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y.

Dans les parties I et III, la fonction de répartition et une densité d'une variable aléatoire X à densité sont notées respectivement F_X et f_X.

On admet que les formules donnant l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes, ainsi que la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes, s'appliquent au cas de variables aléatoires à densité.

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité $X_1, X_2, ..., X_n$ sont indépendantes si pour tout $n-uplet$ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de réels, les évènements $[X_1 \leq x_1], [X_2 \leq x_2], ..., [X_n \leq x_n]$ sont indépendants.

L'objet du problème est double. D'une part, montrer certaines analogies entre les lois géométriques et exponentielles, d'autre part mettre en évidence quelques propriétés asymptotiques de variables aléatoires issues de la loi exponentielle.

La partie II est indépendante de la partie I. La partie III est indépendante de la partie II et largement indépendante de la partie I.

Partie I. Loi exponentielle

1. (a) Rappeler la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$. Etablir pour tout n de $\mathbb{N}^*$ la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$.
   On pose alors $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ et,.pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$.
   (b) Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

   Soit λ un réel strictement positif. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $1/\lambda$).
   on pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.
2. Justifier les relations $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.
3. (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1 \leq x])$, pour tout réel x.
   (b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(X_1 + X_2)$, $E(Y)$, $V(Y)$.
4. Déterminer pour tout réel z, $F_Z(z)$ et $f_Z(z)$. Reconnaître la loi de Z et en déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.
5. (a) Montrer que pour tout réel t, on a : $F_T(t) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda}\right)^2 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$. Exprimer pour tout réel t, $f_T(t)$.
   (b) Justifier l'existence de $E(T)$ et $V(T)$. Montrer que $E(T) = \frac{3}{2\lambda}$ et $V(T) = \frac{5}{4\lambda^2}$.
   (on pourra utiliser des changements de variables affine).
6. On note r le coefficient de corrélation linéaire de Z et T. Montrer que $r = 1/\sqrt{5}$.
7. (a) Préciser $Y(\Omega)$ et $|Y|(\Omega)$.
   (b) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X_2$.
   (c) Montrer que pour tout réel y, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t)\,dt$ est convergente et qu'elle vaut $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$.
   (on distinguera les deux cas : $y \geq 0$ et $y < 0$)
   (d) Etablir que la fonction $y \mapsto \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$; on admet que c'est une densité de la variable aléatoire Y.
   (e) Déterminer pour tout y réel, $f_{|Y|}(y)$. Reconnaître la loi de $|Y| = T - Z$.

Partie II. Loi géométrique

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q=1-p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $1/p$).
on pose : $Y=X_1-X_2$, $T=\max(X_1,X_2)$ et $Z=\min(X_1,X_2)$. On rappelle que $T+Z=X_1+X_2$ et $T-Z=|X_1-X_2|=|Y|$.

1. (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1\leq k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.
   (b) Calculer $E(X_1+X_2)$, $V(X_1+X_2)$, $E(X_1-X_2)$, $V(X_1-X_2)$.
   (c) Etablir la relation : $P([X_1=X_2])=\frac{p}{1+q}$
2. (a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$. En déduire $E(Z)$, $V(Z)$ et $E(T)$.
   (b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$.Justifier l'égalité : $[Z=k]\cup[T=k]=[X_1=k]\cup[X_2=k]$. En déduire la relation suivante : $P(T=k)=2P(X_1=k)-P(Z=k)$.
   (c) Etablir la formule : $V(T)=\frac{q\left(2q^2+q+2\right)}{\left(1-q^2\right)^2}$.
3. (a) Préciser $(T-Z)(\Omega)$. Exprimer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'évènement $[Z=j]\cap[Z=T]$ en fonction des évènements $[X_1=j]$ et $[X_2=j]$. En déduire pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $P([Z=j]\cap[Z=T])$
   (b) Montrer que pour tout couple (j,l) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : $P([Z=j]\cap[T-Z=l])=2p^2q^{2j+l-2}$
   (c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, $P([X_1-X_2=k])=\frac{pq^{|k|}}{1+q}$ (on distinguera trois cas : $k=0$, $k>0$ et $k<0$).
   (d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1-X_2|$.
   (e) Etablir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes.
4. (a) A l'aide du résultat de la question 10.e, calculer $Cov(Z,T)$. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?
   (b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.
   (c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z,T).
   (d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z=j]$.
   (e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z=j]$. Calculer $E(D_j)$.

Partie III. Convergences

Dans les questions 1 à 4, λ désigne un paramètre réel strictement positif, inconnu.
pour n élément de $\mathbb{N}^*$, on considère un n-échantillon $(X_1,X_2,...,X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ.
On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$ et $J_n=\lambda S_n$.

1. Calculer pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $E(S_n)$, $V(S_n)$, $E(J_n)$ et $V(J_n)$.
2. On admet qu'une densité f_{J_n} de J_n est donnée par $f_{J_n}(x)=\begin{cases}\frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leq 0\end{cases}$.
   (a) A l'aide du théorème de transfert, établir pour tout n supérieur ou égal à 3, l'existernce de $E\left(\frac{1}{J_n}\right)$ et de $E\left(\frac{1}{J_n^2}\right)$, et donner leur valeurs respectives.
   (b) On pose pour tout n supérieur ou égal à 3 : $\widehat{\lambda_n}=\frac{n}{S_n}$. Justifier que $\widehat{\lambda_n}$ est un estimateur de λ. Est-il sans biais? Calculer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, du risque quadratique associé à $\widehat{\lambda_n}$ en λ.
3. Dans cette question, on veut déterminer un intervalle de confiance du paramètre λ au risque α. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha)=1-\frac{\alpha}{2}$.
   (a) Enoncer le théorème de la limite centrée. En déduire que la variable aléatoire N_n définie par $N_n=\lambda\frac{S_n}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.
   (b) En déduire que pour n assez grand, on a approximativement : $P([-u_\alpha\leq N_n\leq u_\alpha])=1-\alpha$.
   (c) Montrer que pour n assez grand, l'intervalle $\left[\left(1-\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n},\left(1+\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]$ est un intervalle de confiance de λ au risque α. On note λ_0 la réalisation de $\widehat{\lambda_n}$ sur le n-échantillon.
4. Avec le n-échantillon $(X_1,X_2,...,X_n)$, on construit un nouvel intervalle de confiance de λ au risque β $(\beta\neq\alpha)$, tel que la longueur de cet intervalle soit k $(k>1)$ fois plus petite que celle obtenue avec le risque α.
   (a) Justifier l'existence de la fonction réciproque Φ^{-1} de Φ. Quel est le domaine de définition de Φ^{-1} ?
   (b) Etablir l'égalité $\beta=2\Phi\left(\frac{1}{k}\Phi^{-1}(\alpha/2)\right)$. En déduire que $\beta>\alpha$. Ce dernier résultat était-il prévisible ?

Dans les questions 5 à 7, on suppose que $\lambda=1$.

5. On pose pour tou n de $\mathbb{N}^*$: $T_n=\max(X_1,X_2,...,X_n)$.
   Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, on pose : $g_n(x)=\int_0^x F_{T_n}(t)\,dt$ et $h_n(x)=\int_0^x tf_{T_n}(t)\,dt$
   (a) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $F_n(x)$ et $g_n(x)$.
   (b) Déterminer pour tout réel t, l'expression de $F_{T_n}(t)$ en fonction de t.
   Etablir pour tout n supérieur ou égal à 2, la relation : $g_{n-1}(x)-g_n(x)=\frac{1}{n}F_{T_n}(x)$

(c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, l'expression de $g_n(x)$ en fonction de $x, F_{T_1}(X), F_{T_2}(x), ..., F_{T_n}(x)$.

(d) Montrer que $F_{T_n}(x) - 1$ est équivalent à $-ne^{-x}$, lorsque x tend vers $+\infty$.

(e) Déduire des questions c) et d) l'existence de $E(T_n)$ et montrer que $E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

6. On veut étudier dans cette question la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(G_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $G_n = T_n - E(T_n)$.
On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\gamma_n = -\ln n + E(T_n)$ et on admet sans démonstration que la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ est convergente ; on note γ sa limite.

(a) Montrer que pour tout x réel et n assez grand, on a : $F_{G_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n$.

(b) En déduire que pour tout x réel, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{G_n}(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}$

(c) Montrer que la fonction $F_G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_G(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire G à densité. Conclure.

7. (a) Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante. Déterminer la loi de la variable alétoire Y définie par $Y = F_X(X)$.

(b) Ecrire une fonction Pascal d'en-tête `Gumbel` qui permet de simuler la variable aléatoire G. On supposera que la constante γ est définie en langage Pascal par une constante `gamma`. On rappelle que la fonction Pascal `random` permet de simuler la loi uniforme sur $]0, 1[$.