

# Exercices de mathématiques sur la fiabilité de tests d'hypothèses

Ce document propose, dans des situations concrètes, des exemples d'applications de notions figurant aux programmes de mathématiques des classes de premières et terminales, générale ou technologiques. Le fil conducteur est le test d'hypothèse.

La pandémie Covid-19 a mis en lumière les **tests d'hypothèses** (par exemple les tests sérologiques pour dépister les anticorps). Leurs caractéristiques sont : **sensibilité, spécificité, valeurs prédictives positives et négatives** (VPP et VPN). Les deux dernières, VPP et VPN, sont fonctions homographiques de la **prévalence** (proportion de personnes atteintes par une maladie dans une population). De nombreuses activités abordant ces sujets peuvent être proposées dans le cadre de la classe de mathématiques de lycée général et technologique.

*Sont mobilisés dans les 10 exercices proposés :*

- *Calculs de probabilités simples et conditionnelles, arbre de probabilité*
- *Proportions, fréquences, tri croisé*
- *Fonctions affines, homographiques*
- *Calcul littéral*
- *Inéquation du premier degré de la forme  $(ax+b) / (cx+d) \leq \text{Constante}$*
- *Exploiter un graphique, formuler des conjectures, interprétations,...*

*(Exercices guidés, avec prise d'initiatives,...)*

Liens utiles , sources :

- Sensibilité et spécificité sur Wikipédia : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Sensibilité\\_et\\_spécificité](https://fr.wikipedia.org/wiki/Sensibilité_et_spécificité)
- Valeur prédictive sur Wikipédia : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Valeur\\_prédictive](https://fr.wikipedia.org/wiki/Valeur_prédictive)
- Rapport de la Haute Autorité de Santé du 02/05/20 à télécharger sur <https://www.has-sante.fr>

Exercices préparés par :

Jean-Luc Sonntag – Professeur certifié de mathématiques au Lycée Roland Garros – La Réunion  
Contact : jean-luc.sonntag (at) ac-reunion.fr

# Exercices de mathématiques sur la fiabilité de tests d'hypothèses

## Introduction : contexte, définitions et hypothèses

### 1/ Tests sérologiques : (Extraits choisis d'un rapport de la Haute Autorité de Santé du 02/05/20)

Après avoir été infectés par un virus, la plupart des individus développent une réponse immunitaire par la production d'anticorps dirigés contre ce virus. **Des tests sérologiques permettent de déterminer si une personne a produit des anticorps.** Ces tests ont une place dans la surveillance épidémiologique et dans l'identification des personnes étant ou ayant été contact avec ce virus. Les données recueillies permettent d'alimenter des modèles mathématiques dont un des objectifs est d'anticiper la trajectoire de l'épidémie. Les tests sérologiques sont des tests d'hypothèses.

### 2/ Tests d'hypothèses - Vocabulaire, définitions

En statistiques, un **test** est une démarche consistant à valider ou à rejeter une hypothèse. On s'intéresse alors à différents indicateurs de ce test :

- La **sensibilité** (ou sélectivité) : c'est la probabilité que le test donne un résultat positif lorsque l'hypothèse est vérifiée.
- La **spécificité** : c'est la probabilité que le test donne un résultat négatif lorsque l'hypothèse n'est pas vérifiée.
- La **valeur prédictive positive** (VPP) : C'est la probabilité que l'hypothèse soit vérifiée lorsque le test est positif.
- La **valeur prédictive négative** (VPN) : C'est la probabilité que l'hypothèse ne soit pas vérifiée lorsque le test est négatif.

En épidémiologie, on appelle **prévalence** d'une maladie la proportion de personnes atteintes par cette maladie dans une population donnée. Dans cet article, **la prévalence désignera la proportion de personnes infectées par le SARS-CoV-2 dans une population.**

### 3/ Hypothèses :

Concernant les tests sérologiques de dépistages d'une infection par le virus SARS-CoV-2, les valeurs seuils minimales de sensibilité et de spécificité des tests sérologiques, évoqués dans le deuxième paragraphe, ont été fixées par la Haute Autorité de Santé à **90 % pour la sensibilité** et **98 % pour la spécificité.** (Source : Rapport de la HAS du 02/05/20)

Ce document ainsi que sa référence bibliographique sont téléchargeables sur [www.has-sante.fr](http://www.has-sante.fr)  
Haute Autorité de santé – Service communication information  
5 avenue du Stade de France – 93218 Saint-Denis la Plaine Cedex. Tél. : +33 (0)1 55 93 70 00  
© Haute Autorité de santé – mai 2020 – ISBN :

## Caractéristiques d'un test : sensibilité, spécificité, valeurs prédictives, faux positifs...

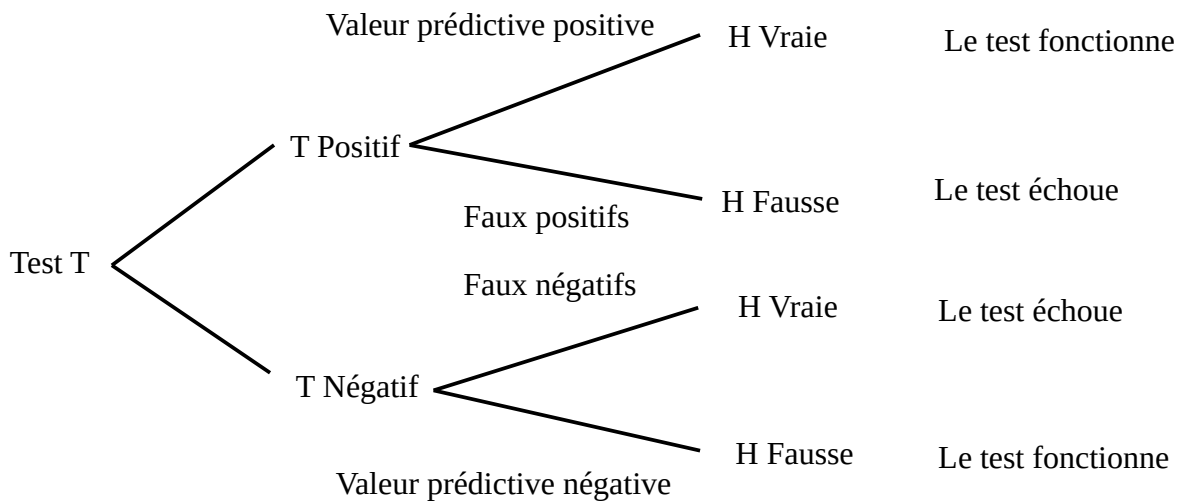
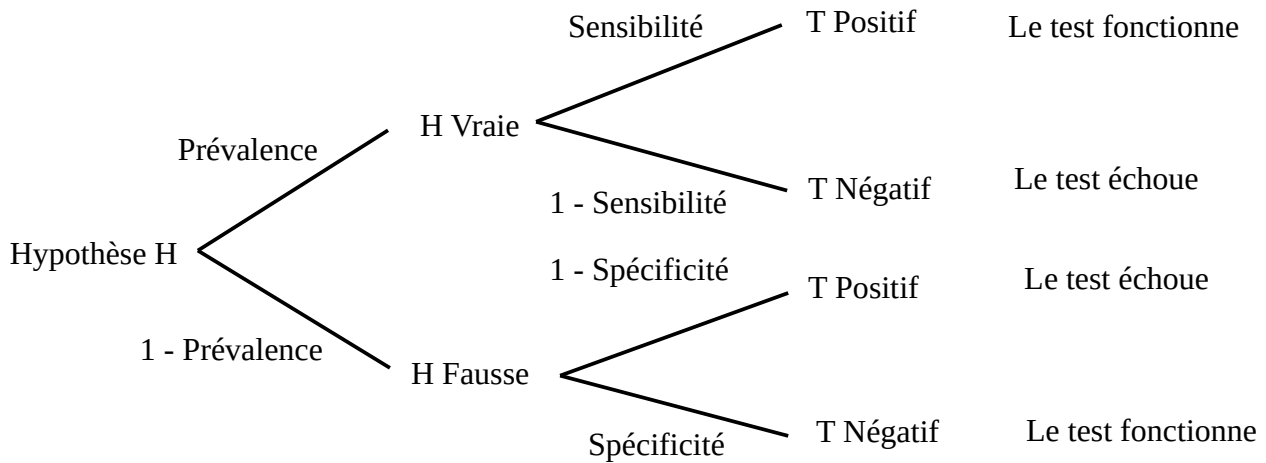


Illustration sur un exemple :

**Hypothèse :** « Cette personne est grippée » (Vrai ou faux)

**Test :** On cherche à savoir si la personne est grippée, ou pas.

**Prévalence :** C'est la proportion de personnes grippées dans la population.

**Sensibilité du test :** On teste une personnes grippée et le test est positif. Le test fonctionne. La sensibilité est la proportion de personnes avec un test positif parmi des personnes grippées.

**Spécificité du test :** On teste une personne non grippée et le test est négatif. Le test fonctionne. La spécificité est la proportion de personnes avec un test négatif parmi des personnes non grippées.

**Valeur prédictive positive (VPP) :** Le test est positif et la personne est grippée. Le test fonctionne. La VPP est la proportion de personnes grippées parmi celles qui ont un test positif.

**Valeur prédictive négative (VPN) :** Le test est négatif et la personne est n'est pas grippée. Le test fonctionne. La VPN est la proportion de personnes non grippées parmi celles qui ont un test négatif.

**Faux test positif :** Le résultat du test est positif. Pourtant la personne n'est pas grippée ! Le test échoue.

**Faux test négatif :** Le résultat du test est négatif. Pourtant la personne est grippée ! Le test échoue.

Note : cet exercice peut être donné sans préambule. L'énoncé donne toutes les informations utiles à son traitement (Prérequis : calcul littéral, inéquation du premier degré, notion de fonctions, probabilité d'évènement contraires)

## « Taux de Faux Positifs » d'un test sérologique en fonction de la prévalence

Dans cet exercice, la « **prévalence** » désigne la proportion de personnes infectées par un virus dans une population.

On note  $x$  la prévalence (par exemple  $x = 0,03$  lorsque 3 % de la population ont été infectés par le virus)

La valeur de  $x$  est encadrée par 0 et 1. On a  $x \in [0; 1]$

On choisit une personne au hasard dans une population. Cette personne passe un test sérologique permettant de déterminer si elle a produit des anticorps en réponse immunitaire après avoir été infectée par le virus.

**La valeur prédictive positive du test (VPP) est la probabilité conditionnelle que la personne ait produit des anticorps sachant que le résultat du test est positif.**

Une entreprise de l'industrie pharmaceutique produit et commercialise des test sérologiques.

Son laboratoire a rédigé une notice jointe à tout contrat de vente. Cette notice indique que la VPP en

fonction de la prévalence  $x$  est donnée par la fonction  $f$  définie pour  $x \in [0; 1]$  par :  $f(x) = \frac{45x}{44x+1}$

1/ Dans cette question, on suppose que la prévalence  $x$  est égale à 0,05. Cela signifie que 5 % de la population ont été infectés par le virus.

Calculer  $f(0,05)$ . Puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2/ Compléter le tableau de valeurs des VPP ci-dessous : (On arrondira les valeurs au 1/1000)

$x$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
$f(x)$										

3/ On appelle « **Taux de faux positifs** » la proportion de personnes testées positives mais **n'ayant PAS produit d'anticorps** en réponse immunitaire après avoir été infectée par le virus.

On note  $g$  la fonction définie pour  $x \in [0; 1]$  qui donne le « **Taux de faux positifs** » en fonction de la prévalence  $x$ .

$$\text{On a : } g(x) = 1 - f(x) = 1 - \frac{45x}{44x+1}$$

Car si  $E$  est un évènement et  $p(E)$  la probabilité que l'évènement se réalise, alors  $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$

a. Montrer qu'on peut aussi exprimer  $g(x)$  sous la forme :  $g(x) = \frac{1-x}{44x+1}$

b. Calculer  $g(0,05)$  puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4/ a. Sachant que  $44x + 1$  est toujours positif pour  $x \in [0; 1]$ , résoudre l'inéquation  $\frac{1-x}{44x+1} \leq 0,1$

b. En déduire un encadrement de la prévalence  $x$  dans lequel **le taux de faux positif est inférieur à 10 %**.

5/ Pour quelles prévalences  $x$  le taux de faux positif est inférieur à 1 % ?

(Toute trace de recherche sera prise en compte)

## Probabilités : Fiabilité de tests sérologiques en fonction de la prévalence

La prévalence désigne la proportion de personnes infectées par un virus dans une population.

On note  $x$  la prévalence (par exemple  $x = 0,03$  lorsque 3 % de la population ont été infectés par le virus)

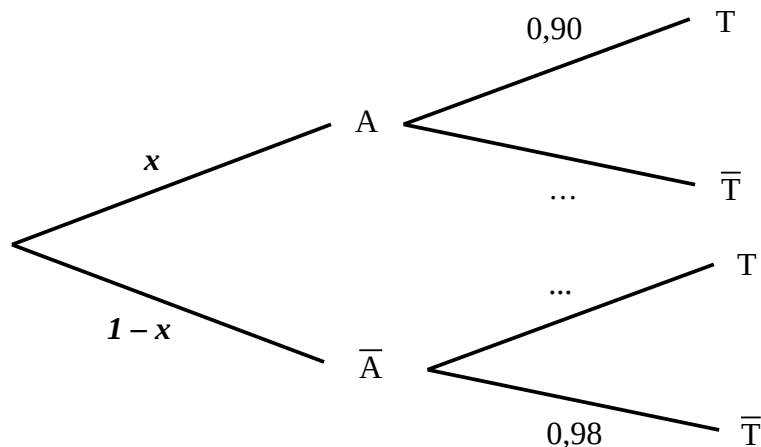
La valeur de  $x$  est encadrée par 0 et 1. On a  $x \in [0; 1]$

On choisit une personne au hasard dans une population. Cette personne passe un test sérologique permettant de déterminer si elle a produit des anticorps en réponse immunitaire après avoir été infectée par le virus.

On note  $T$  le caractère : « le Test sérologique de dépistage d'anticorps est positif » et  $\bar{T}$  le caractère contraire.

On note  $A$  le caractère : « la personne testée est porteuse d'Anticorps » et  $\bar{A}$  le caractère contraire.

L'arbre ci-dessous indique les probabilités sur chaque branche :



La probabilité de  $T$  sachant  $A$  vaut  $0,90$  car la sensibilité du test est fixée à  $90\%$ .

La probabilité de  $\bar{T}$  sachant  $\bar{A}$  vaut  $0,98$  car la spécificité du test est fixée à  $98\%$ .

- 1/ a. On note  $p(T \cap A)$  la probabilité que  $T \cap A$  se réalise. Exprimer  $p(T \cap A)$  en fonction de  $x$
- b. On note  $p(T \cap \bar{A})$  la probabilité que  $T \cap \bar{A}$  se réalise. Exprimer  $p(T \cap \bar{A})$  en fonction de  $x$
- c. On note  $p(T)$  la probabilité que  $T$  se réalise. Montrer que  $p(T) = 0,88x + 0,02$
- d. En déduire que  $p(\bar{T}) = 0,98 - 0,88x$

2/ On rappelle que la valeur prédictive positive du test (VPP) est la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $T$ .

Montrer que l'expression de la VPP en fonction de  $x$  peut s'écrire sous la forme :  $VPP = \frac{45x}{44x+1}$

3/ On rappelle que la valeur prédictive négative du test (VPN) est la probabilité conditionnelle de  $\bar{A}$  sachant  $\bar{T}$

Montrer que l'expression de la VPN en fonction de  $x$  peut s'écrire sous la forme :  $VPN = \frac{49(1-x)}{49-44x}$

4/ Compléter le tableau de valeurs des VPP et VPN ci-dessous : (On arrondira les résultats au  $1/1000$ )

$x$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
VPP										
VPN										

5/ Dresser le tableau de variation de la VPP en fonction de  $x$  pour  $x \in [0; 1]$

6/ Dresser le tableau de variation de la VPN en fonction de  $x$  pour  $x \in [0; 1]$

7/ Que peut-on dire de la VPP lorsque la prévalence est faible ? Interpréter dans le contexte.

Note : cet exercice peut être donné sans préambule. L'énoncé donne toutes les informations utiles à son traitement  
(Prérequis : Probabilité conditionnelle, notions de fonction)

## Fiabilité d'un test sérologique performant avec une prévalence très faible

Le 3 mai 2020, le groupe pharmaceutique suisse Roche affirme dans un communiqué de presse avoir développé le test sérologique Elecsys® Anti-SARS-CoV-2 pour détecter les anticorps SARS-CoV-2 avec une sensibilité de 100% et une spécificité de 99.8%. Le test a été approuvé pour être commercialisé aux USA et dans l'Union Européenne (Label CE).

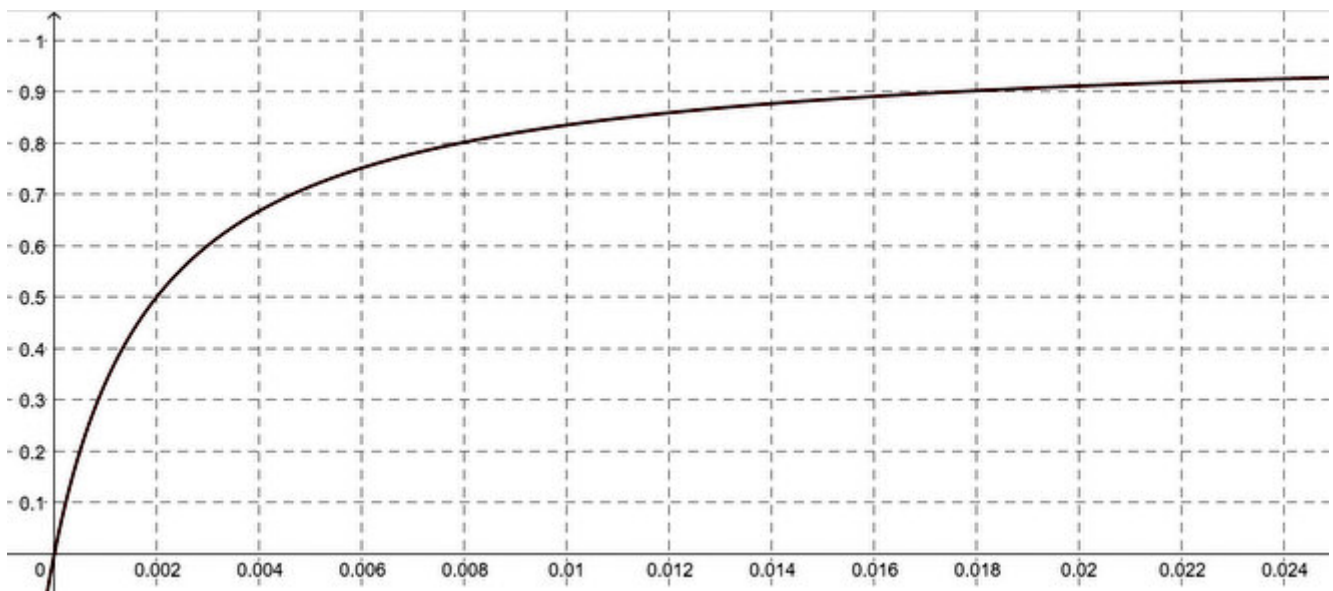
On choisit une personne au hasard. Cette personne passe le test sérologique du groupe Roche afin de déterminer si elle a produit des anticorps en réponse immunitaire après avoir été infectée par le virus SARS-CoV-2.

La valeur **prédictive positive du test** (VPP) est la probabilité conditionnelle que la personne ait développé des anticorps sachant que le résultat du test est positif.

La **prévalence** désigne ici la proportion de personnes infectées par le SARS-CoV-2 dans une population.

Si on note  $x$  la prévalence et  $f(x)$  la VPP du test sérologique, alors pour  $x \in [0; 1]$ , on a  $f(x) = \frac{500x}{499x+1}$

Le graphique ci-dessous représente les variations de  $f(x)$  en fonction de  $x$  pour de petites valeurs de la prévalence :



1/ a. Calculer  $f(0,022)$  puis vérifier le résultat avec le graphique ci-dessus.

b. Interpréter le résultat dans le contexte. Formuler une interprétation explicite et précise.

2/ a. Calculer  $f(0,002)$  puis vérifier le résultat avec le graphique ci-dessus.

b. Interpréter le résultat dans le contexte. Formuler une interprétation explicite et précise.

3/ A L'île de La Réunion, en mai 2020, on estime que la proportion de personnes infectées par le SARS-CoV-2 dans la population est inférieure à 0,002 (soit moins de 0,2 % de la population infectée par le virus).

Le test sérologique du groupe pharmaceutique Roche peut-il être jugé fiable à La Réunion en mai 2020 ?

Justifier votre réponse.

Note : cet exercice peut être donné sans préambule. L'énoncé donne toutes les informations utiles à son traitement

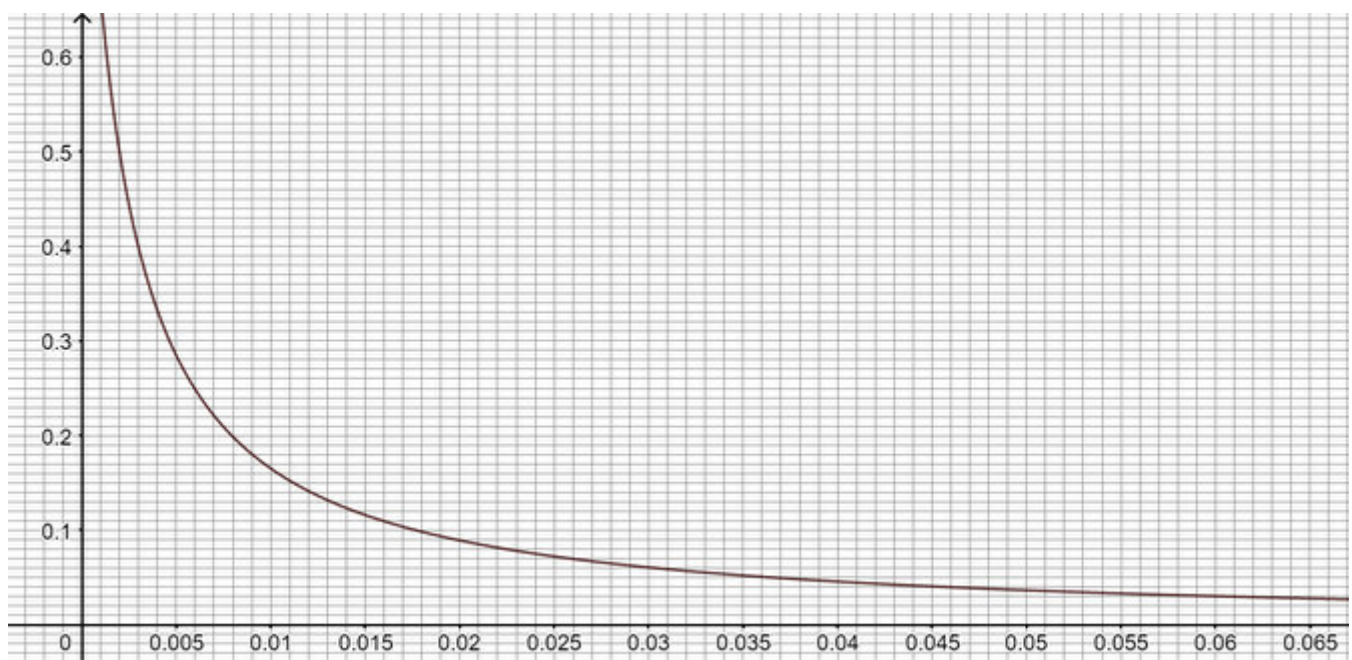
## Taux de « Faux Positifs » d'un test sérologique en fonction de la prévalence

Après avoir été infectés par un virus, la plupart des individus développent une réponse immunitaire par la production d'anticorps dirigés contre ce virus. Dans cet exercice, la « **prévalence** » désigne la proportion de personnes infectées par le virus SARS-CoV-2 dans une population. Par exemple lorsque 15 % de la population ont été infectés par ce virus, la prévalence vaut 0,15 (ou 15/100).

Des tests sérologiques permettent de déterminer si le système immunitaire d'une personne a produit des anticorps contre ce virus. Le 3 mai 2020, le groupe pharmaceutique suisse Roche annonce avoir développé le test sérologique Elecsys® pour détecter les anticorps SARS-CoV-2 avec une sensibilité de 100% et une spécificité de 99,8%. Toutefois, dans des proportions variables, le test peut donner des résultats inexacts appelés « *Faux positifs* ».

On appelle **taux de « Faux positifs »** la proportion de personnes **testées positives mais n'ayant PAS produit d'anticorps**.

Le graphique ci-dessous montre les variations du « *Taux de Faux positifs* » du test sérologique Elecsys® en fonction de la prévalence :



L'axe des abscisses est gradué de 0 à 0,065 pour la prévalence (En pourcentages : 0 à 6,5 %)

L'axe des ordonnées est gradué de 0 à 0,6 pour le taux de « Faux positifs » (En pourcentages : 0 à 60%)

Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par la lecture de ce graphique.

1/ Quelle est la prévalence correspondant à un taux de « Faux positifs » de 10 % ?

2/ Quelle est le taux de « Faux positifs » pour une prévalence de 0,5 % ?

3/ On veut utiliser le test Elecsys® dans un contexte où le taux de « Faux positifs » est inférieur à 5 %. Quelles valeurs de la prévalence permettent de ne pas dépasser ce taux d'échec ?

## Lecture graphique : Fiabilité de tests sérologiques en fonction de la prévalence

La prévalence désigne la proportion de personnes infectées par un virus dans une population.  
Par exemple la prévalence est égale à 0,15 lorsque 15 % de la population ont été infectés par le virus.  
La prévalence est encadrée par 0 et 1.

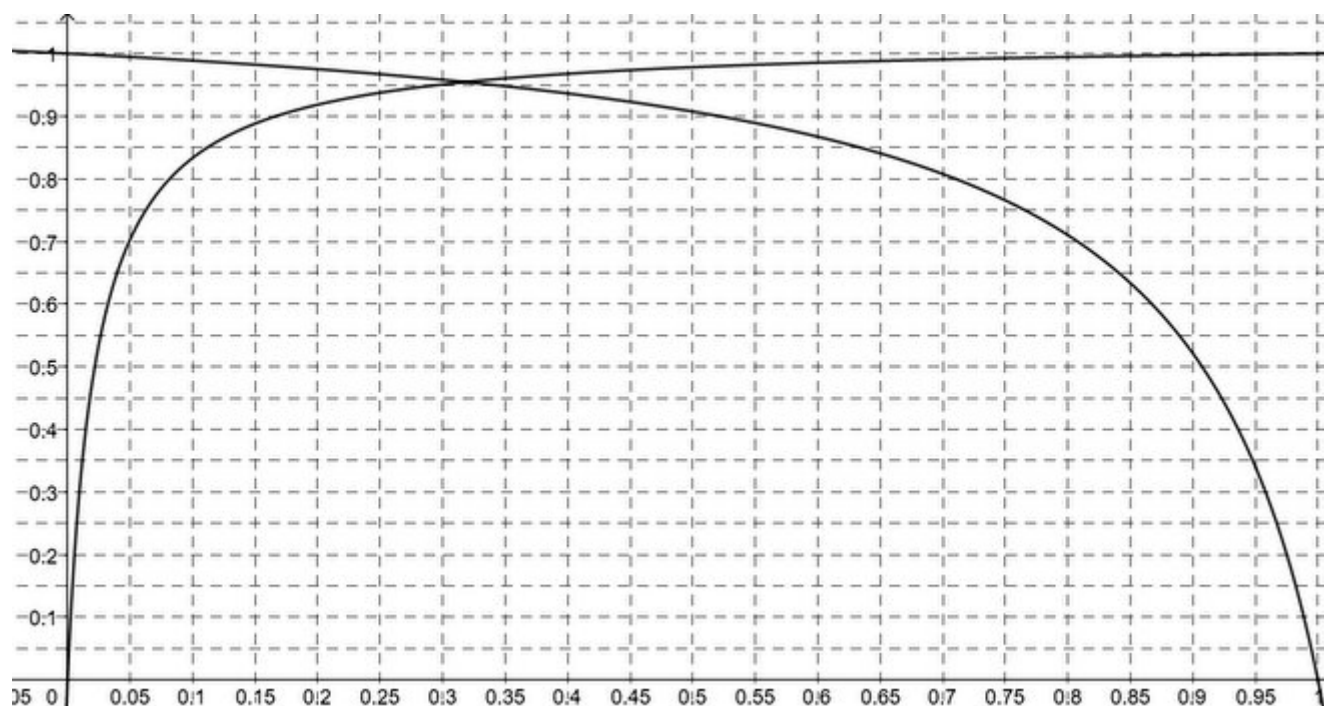
On choisit une personne au hasard dans une population. Cette personne passe un test sérologique permettant de déterminer si elle a produit des anticorps en réponse immunitaire après avoir été infectée par le virus.

On note T le caractère : « le Test sérologique de dépistage d'anticorps est positif » et  $\bar{T}$  le caractère contraire.  
On note A le caractère : « la personne testée est porteuse d'Anticorps » et  $\bar{A}$  le caractère contraire.

La valeur prédictive positive du test (VPP) est la probabilité conditionnelle de A sachant T  
La VPP est une fonction strictement croissante de la prévalence.

La valeur prédictive négative du test (VPN) est la probabilité conditionnelle de  $\bar{A}$  sachant  $\bar{T}$   
La VPN est une fonction strictement décroissante de la prévalence.

Les deux graphiques ci-dessus représentent les variations de la VPP et de la VPN en fonction de la prévalence.



Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par la lecture graphique.

- 1/ a. Quelle est la valeur de la VPP pour une prévalence de 5 % ?  
b. Interpréter la réponse précédente dans le contexte de l'exercice. Formuler une interprétation explicite.
- 2/ a. Quelle est la valeur de la VPN pour une prévalence de 5 % ?  
b. Interpréter la réponse précédente dans le contexte de l'exercice. Formuler une interprétation explicite.
- 3/ a. Pour quelle valeur de la prévalence a-t-on une VPP supérieure à 0,9 ?  
b. Interpréter la réponse précédente dans le contexte de l'exercice. Formuler une interprétation explicite.



Note : cet exercice peut être donné sans préambule. L'énoncé donne toutes les informations utiles à son traitement (Prérequis : Propriété d'un arbre de probabilité. Calculs de probabilités simples et conditionnelles.)

## Probabilités : Fiabilité de tests sérologiques avec une prévalence de 5 %

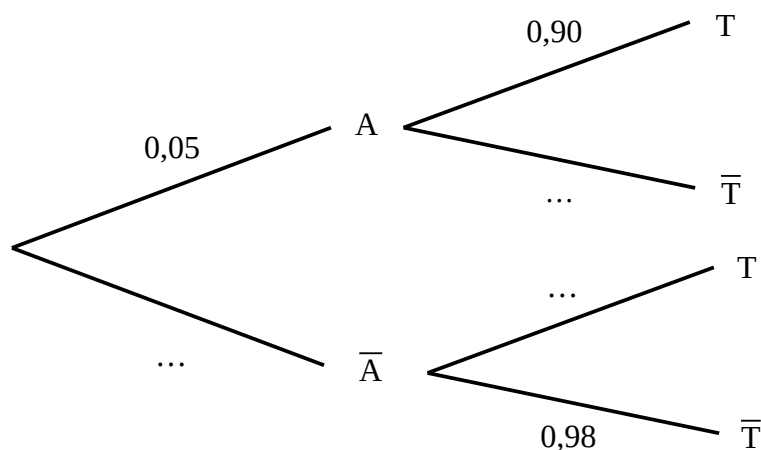
On choisit une personne au hasard dans une population. Cette personne passe un test sérologique permettant de déterminer si elle a produit des anticorps en réponse immunitaire après avoir été infectée par un virus.

- On note T le caractère : « le Test sérologique de dépistage d'anticorps est positif » et  $\bar{T}$  le caractère contraire.
- On note A le caractère : « la personne testée est porteuse d'Anticorps » et  $\bar{A}$  le caractère contraire.

Dans cet exercice, on suppose que :

- La prévalence de la maladie s'élève à 0,05 (C'est à dire que la proportion de personnes infectées par le virus dans la population est évaluée à 5 %)
- La sensibilité du test sérologique est de 90 %. C'est la probabilité de T sachant A.
- La spécificité du test sérologique est de 98 %. C'est probabilité de  $\bar{T}$  sachant  $\bar{A}$ .

L'arbre ci-dessous indique les probabilités sur chaque branche :



La probabilité de A vaut 0,05 car la prévalence de la maladie est évaluée à 5 %

1/ Compléter l'arbre ci-dessus en indiquant les trois probabilités manquantes.

- On note  $p(T \cap A)$  la probabilité que  $T \cap A$  se réalise. Calculer  $p(T \cap A)$ .
- On note  $p(T \cap \bar{A})$  la probabilité que  $T \cap \bar{A}$  se réalise. Calculer  $p(T \cap \bar{A})$ .
- On note  $p(T)$  la probabilité que T se réalise. Montrer que  $p(T) = 0,064$
- En déduire que  $p(\bar{T}) = 0,936$

3/ La valeur prédictive positive du test (VPP) est la probabilité conditionnelle de A sachant T.

- Montrer que la VPP est égale à environ 0,703
- Interpréter le résultat dans le contexte.

4/ La valeur prédictive négative du test (VPN) est la probabilité conditionnelle de  $\bar{A}$  sachant  $\bar{T}$ .

- Calculer la VPN (Donner un arrondi au 1/1000 du résultat).
- Interpréter le résultat dans le contexte.

5/ Selon vous, ce test sérologique est-il fiable ? Justifiez votre réponse.

Note : cet exercice peut être donné sans préambule. L'énoncé donne toutes les informations utiles à son traitement (Prérequis : Propriété d'un arbre de probabilité. Calculs de probabilités simples et conditionnelles.)

## Fiabilité d'un test sérologique performant avec une prévalence très faible

Le 3 mai 2020, le groupe pharmaceutique suisse Roche affirme dans un communiqué de presse avoir développé le test sérologique Elecsys® Anti-SARS-CoV-2 pour détecter les anticorps SARS-CoV-2 avec une sensibilité de 100% et une spécificité de 99.8%. Le test a été approuvé pour être commercialisé aux USA et dans l'Union Européenne (Label CE).

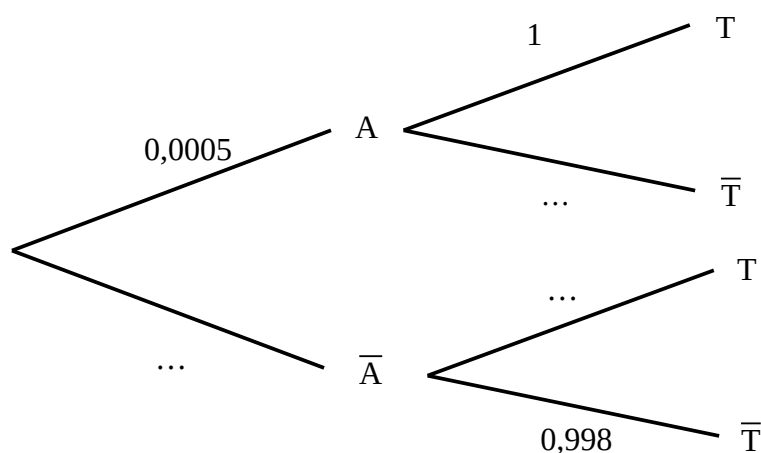
On choisit une personne au hasard dans une population de La Réunion. Cette personne passe le test sérologique du groupe Roche afin de déterminer si elle a produit des anticorps en réponse immunitaire après avoir été infectée par le virus SARS-CoV-2.

- On note T le caractère : « le Test sérologique de dépistage d'anticorps est positif » et  $\bar{T}$  le caractère contraire.
- On note A le caractère : « la personne testée est porteuse d'Anticorps » et  $\bar{A}$  le caractère contraire.

Dans cet exercice, on suppose que :

- La prévalence de la maladie s'élève à 0,0005. C'est la proportion de personnes infectées dans la population, elle est évaluée à 0,05 %. C'est la prévalence officielle à La Réunion en mai 2020.
- La sensibilité du test sérologique est de 100 %. C'est la probabilité de T sachant A.
- La spécificité du test sérologique est de 99,8 %. C'est probabilité de  $\bar{T}$  sachant  $\bar{A}$ .

L'arbre ci-dessous indique les probabilités sur chaque branche :



La probabilité de A vaut 0,0005 car à La Réunion en mai 2020, la prévalence de la maladie est évaluée à 0,05%. (Environ 450 cas pour 870 000 habitants donne une proportion proche de 0,0005)

1/ Compléter l'arbre ci-dessus en indiquant les trois probabilités manquantes.

2/ a. On note  $p(T \cap A)$  la probabilité que  $T \cap A$  se réalise. Calculer  $p(T \cap A)$ .

b. On note  $p(T \cap \bar{A})$  la probabilité que  $T \cap \bar{A}$  se réalise. Calculer  $p(T \cap \bar{A})$ .

c. On note  $p(T)$  la probabilité que T se réalise. Montrer que  $p(T) = 0,0025$  arrondi au 1/10 000.

d. En déduire que  $p(\bar{T}) = 0,9975$  arrondi au 1/10 000.

3/ La valeur prédictive positive du test (VPP) est la probabilité conditionnelle de A sachant T.

a. Montrer que la VPP est égale à 0,2

b. Interpréter le résultat dans le contexte.

4/ On appelle « Taux de Faux Positifs » la probabilité conditionnelle de  $\bar{A}$  sachant T.

a. Calculer le « Taux de Faux Positifs » de ce test sérologique du groupe Roche (Arrondi au 1/10 000).

b. Interpréter le résultat dans le contexte.

5/ Selon vous, ce test sérologique est-il fiable à La Réunion en mai 2020 ? Justifiez votre réponse.

Note : cet exercice peut être donné sans préambule. L'énoncé donne toutes les informations utiles à son traitement (Prérequis : Propriété d'un arbre de probabilité. Calculs de probabilités simples et conditionnelles.)

## Probabilités : Fiabilité de tests sérologiques avec une prévalence de 1%

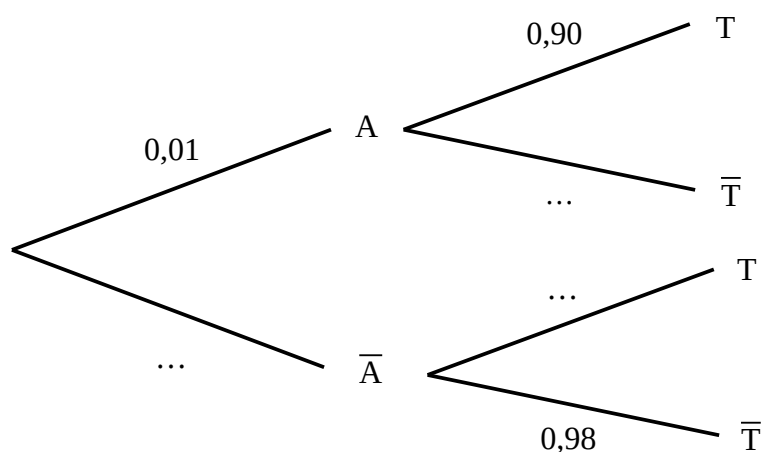
On choisit une personne au hasard dans une population. Cette personne passe un test sérologique permettant de déterminer si elle a produit des anticorps en réponse immunitaire après avoir été infectée par un virus.

- On note T le caractère : « le Test sérologique de dépistage d'anticorps est positif » et  $\bar{T}$  le caractère contraire.
- On note A le caractère : « la personne testée est porteuse d'Anticorps » et  $\bar{A}$  le caractère contraire.

Dans cet exercice, on suppose que :

- La prévalence de la maladie s'élève à 0,01 (C'est à dire que la proportion de personnes infectées par le virus dans la population est évaluée à 1 %)
- La sensibilité du test sérologique est de 90 %. C'est la probabilité de T sachant A.
- La spécificité du test sérologique est de 98 %. C'est probabilité de  $\bar{T}$  sachant  $\bar{A}$ .

L'arbre ci-dessous indique les probabilités sur chaque branche :



La probabilité de A vaut 0,01 car la prévalence de la maladie est évaluée à 1 %

1/ Compléter l'arbre ci-dessus en indiquant les trois probabilités manquantes.

2/ a. On note  $p(T \cap A)$  la probabilité que  $T \cap A$  se réalise. Calculer  $p(T \cap A)$ .

b. On note  $p(T \cap \bar{A})$  la probabilité que  $T \cap \bar{A}$  se réalise. Calculer  $p(T \cap \bar{A})$ .

c. On note  $p(T)$  la probabilité que T se réalise. Montrer que  $p(T) = 0,029$

d. En déduire que  $p(\bar{T}) = 0,971$

3/ La valeur prédictive positive du test (VPP) est la probabilité conditionnelle de A sachant T.

a. Montrer que la VPP est égale à environ 0,313

b. Interpréter le résultat dans le contexte.

4/ La valeur prédictive négative du test (VPN) est la probabilité conditionnelle de  $\bar{A}$  sachant  $\bar{T}$ .

a. Calculer la VPN (Donner un arrondi au 1/1000 du résultat).

b. Interpréter le résultat dans le contexte.

5/ Selon vous, ce test sérologique est-il fiable ? Justifiez votre réponse.

Note : cet exercice peut être donné sans préambule. L'énoncé donne toutes les informations utiles à son traitement (Prérequis : Propriété d'un arbre de probabilité. Calculs de probabilités simples et conditionnelles.)

**Exercice à prise d'initiative**

## Probabilités : Fiabilité de tests sérologiques avec une prévalence de 15%

(Écrire toutes les recherches effectuées – Toute trace de recherche est prise en compte)

### Données, hypothèses et notations

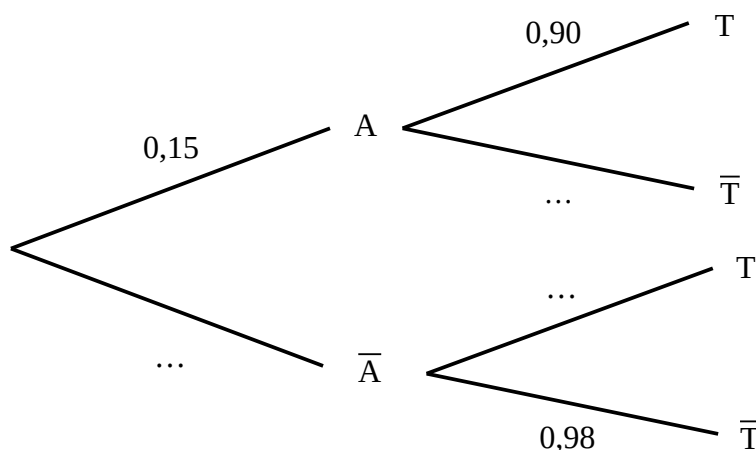
On choisit une personne au hasard dans une population. Cette personne passe un test sérologique permettant de déterminer si elle a produit des anticorps en réponse immunitaire après avoir été infectée par un virus.

- On note T le caractère : « le Test sérologique de dépistage d'anticorps est positif » et  $\bar{T}$  le caractère contraire.
- On note A le caractère : « la personne testée est porteuse d'Anticorps » et  $\bar{A}$  le caractère contraire.

Dans cet exercice, on suppose que :

- La prévalence de la maladie s'élève à 0,15 (C'est à dire que la proportion de personnes infectées par le virus dans la population est évaluée à 15 %)
- La sensibilité du test sérologique s'élève à 90 %. C'est la probabilité de T sachant A.
- La spécificité du test sérologique est de 98 %. C'est la probabilité de  $\bar{T}$  sachant  $\bar{A}$ .

L'arbre ci-dessous indique les probabilités sur chaque branche :



La probabilité de A vaut 0,15 car la prévalence de la maladie est évaluée à 1%

**La valeur prédictive positive du test (VPP) est la probabilité conditionnelle de A sachant T.**

Questions :

Quelle est, en pourcentage, la valeur prédictive positive (VPP) de ce test ?

Que signifie ce résultat dans le contexte ?

*Note : cet exercice peut être donné sans préambule. L'énoncé donne toutes les informations utiles à son traitement*

## Fiabilité d'un test sérologique performant avec une prévalence très faible

Le 3 mai 2020, le groupe pharmaceutique suisse Roche affirme dans un communiqué de presse avoir développé le test sérologique Elecsys® Anti-SARS-CoV-2 pour détecter les anticorps SARS-CoV-2.

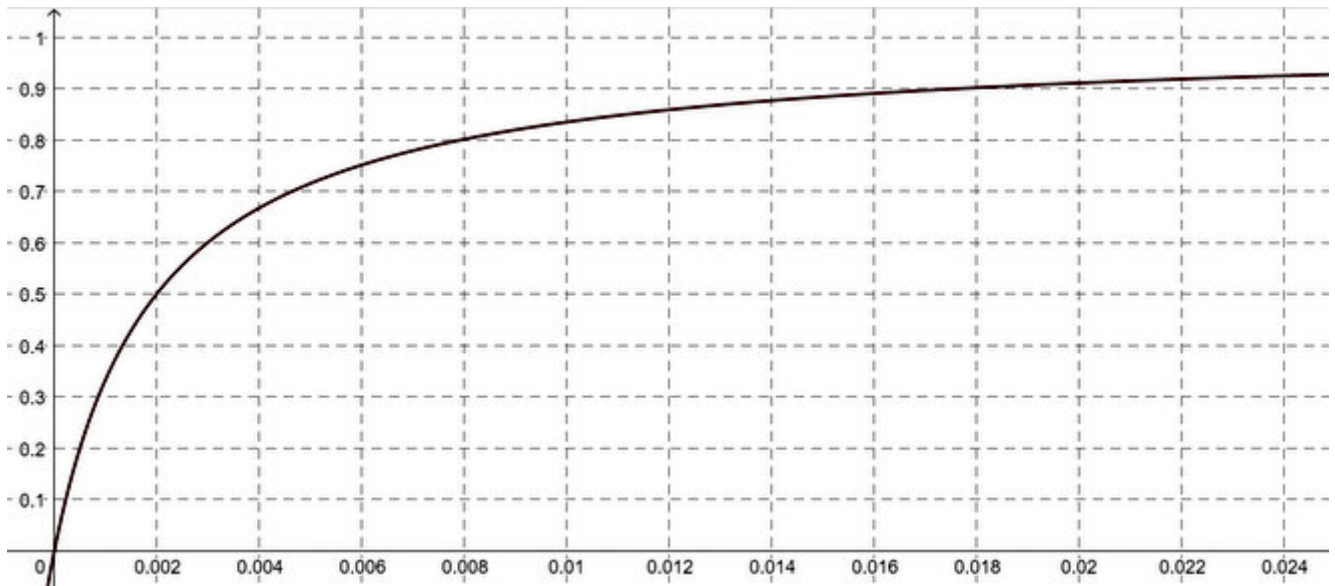
On choisit une personne au hasard dans une population. Cette personne passe le test sérologique du groupe Roche afin de déterminer si elle a produit des anticorps en réponse immunitaire après avoir été infectée par le virus SARS-CoV-2.

La valeur **prédictive positive du test** (VPP) est la probabilité conditionnelle que la personne ait développé des anticorps sachant que le résultat du test est positif.

La **prévalence** désigne la proportion de personnes infectées par le SARS-CoV-2 dans une population. Une prévalence de 0,02 signifie que 2 % de la population ont été infectés par le virus.

Si on note  $x$  la prévalence et  $f(x)$  la VPP du test sérologique, alors pour  $x \in [0; 1]$ , on a  $f(x) = \frac{500x}{499x+1}$

Le graphique ci-dessous représente les variations de  $f(x)$  en fonction de  $x$  pour de petites valeurs de la prévalence  $x$  :



- 1/ Quelle est approximativement la valeur prédictive positive du test pour une prévalence de 0,018 ?
- 2/ Quelle est approximativement la prévalence lorsque la valeur prédictive positive de ce test vaut 50 % ?
- 3/ On remarque que  $499x+1$  est toujours strictement positif lorsque  $x \in [0; 1]$ .  
Résoudre l'inéquation du premier degré  $\frac{500x}{499x+1} \geq 0,95$
- 4/ Interpréter le résultat de la question 3/ dans le contexte de l'exercice. Formuler une interprétation explicite en faisant référence à la prévalence (en%) et à la valeur prédictive positive du test.