Agrégation Interne
2009-2010
Dominique Castella

Série $n^0 4$

Espaces euclidiens et espaces hermitiens
Corrigé rapide

I *Soit $E = \mathbb{C}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes complexes. Pour $(P,Q) \in E^2$, on pose :*

$$f(P,Q) = \int_{-1}^{1} (1+t^2)\overline{P(t)}Q(t)\,dt$$

1) Montrer que f est un produit scalaire sur E.
2) Montrer qu'il existe une famille orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout n, $\deg P_n = n$.

1) Il est clair que f est une forme hermitienne et qu'elle est positive. Il suffit donc de voir qu'elle est définie : comme la fonction à valeurs réelles $t \mapsto (1+t^2)|P(t)|^2$ est continue et positive sur $[-1,1]$, $\int_{-1}^{1}(1+t^2)|P(t)|^2\,dt = 0$ implique que cette fonction est nulle sur cet intervalle. Le polynôme P ayant alors une infinité de racines est nul. La forme est bien définie positive et est donc un produit scalaire.

2) Il suffit d'orthonormaliser la base canonique...

II *Soit $l^2(\mathbb{C})$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes, telles que la série $(\sum |x_n|^2)$ soit convergente.*
1) Montrer que $l^2(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2) Montrer que si (x_n) et (y_n) appartiennent à $l^2(\mathbb{C})$, la série $(\sum \overline{x_n}y_n)$ est convergente.
3) Montrer que f définie par $f((x_n),(y_n)) = \sum_0^{+\infty} \overline{x_n}y_n$ est une forme hermitienne définie positive.
4) Vérifier que $l^2(\mathbb{C})$ est un espace de Hilbert.

1) et 2) : Comme $|x_n y_n| \leq 1/2(|x_n|^2 + |y_n|^2)$, la série de terme général $\overline{x_n}y_n$ est absolument convergente et donc convergente.
On a de plus : $(|x_n + y_n|^2) \leq (|x_n| + |y_n|)^2 \leq 2(|x_n|^2 + |y_n|^2)$ et la somme des séries est bien dans $l^2(\mathbb{C})$.
La série nulle étant dans l^2 et la stabilité par multiplication par un scalaire étant claire, $l^2(\mathbb{C})$ est bien un sous-espace vectoriel de l'espace des suites à valeurs complexes (et donc bien un espace-vectoriel).
3) Il est clair que les $f_N((x_n),(y_n)) = \sum_0^N \overline{x_n}y_n$ sont des formes hermitiennes. Pour vérifier la linéarité par rapport à la seconde variable, il suffit donc de passer à la limite, toutes les séries en question convergeant séparément. De même pour la condition sur $f(y,x)$ par continuité de la conjugaison...
Le fait que la forme soit définie positive est alors clair.

4) Il reste à voir que $l^2(\mathbb{C})$ est complet.
Soit alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $l^2(\mathbb{C})$: pour chaque n, $x_n = (x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\sum_k |x_n^k|^2 < +\infty$.
Comme $|x_n^k - x_m^k| \leq \|x_n - x_m\|$, pour tout k et tout couple (n,m) d'entiers, les suites $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes de Cauchy, et donc convergentes dans $\mathbb{C}$.
Soient donc, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $y_k = \lim_n x_n^k$ et $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Comme (x_n) est de Cauchy elle est bornée (dans l^2), et il existe donc $M \in \mathbb{R}+$, tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^N |x_n^k|^2 \leq \sum_{k=0}^\infty |x_n^k|^2 \leq M$.
En passant à la limite sur n on obtient donc, pour tout N, $\sum_{k=0}^N |y_k|^2 \leq M$.
La suite y est bien dans l^2 et il est facile de voir que (x_n) converge bien vers y dans l^2 :
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout couple (n,m) d'entiers supérieurs à N,

$$\sum_{k=0}^{A} |x_n^k - x_m^k|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x_n^k - x_m^k|^2 = \|x_n - x_m\| < \epsilon$$

(pour tout entier A) et en passant à la limite sur n dans la somme finie, on obtient : $\sum_{k=0}^A |y_k - x_m^k|^2 \leq \epsilon$ et ce, pour tout A. Il ne reste plus qu'à passer à la limite sur A...

III *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est normale si $A^*A = AA^*$ et un endomorphisme u d'un espace hermitien E est normal s'il commute avec son adjoint u^*.*
1) Montrer que si u est un endomorphisme normal de E, pour tout $(x,y) \in E^2$, $< u^*(x), u^*(y) >=< u(x), u(y) >$ et en déduire que $\ker u = \ker u^*$.
2) Que peut-on en déduire pour les valeurs propres et les sous-espaces propres de u^* ?
3) En déduire que les sous-espaces propres d'un endomorphisme normal sont deux à deux orthogonaux.
4) Montrer que si A est une matrice normale, il existe une matrice $P \in U_n$ telle que P^*AP soit diagonale.
5) Montrer que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est normale si et seulement s' il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A^* = Q(A)$.
6) Montrer que les endomorphismes hermitiens sont les endomorphismes normaux à valeurs propres réelles.
7) Caractériser de même les endomorphismes unitaires.

1) Par définition de l'adjoint, si u est normal, on a, pour tout couple $(x,y) \in E^2$, $< u(x), u(y) >=< x, u^*(u(y)) >=< x, u(u^*(y)) >=< u^*(x), u^*(y) >$.
$x \in \ker u$ équivaut à $< u(x), u(x) >= 0$ puisque la forme est définie, et donc bien à $< u^*(x), u^*(x) >= 0$, soit encore à $x \in \ker u^*$.
2) Comme $(u - \lambda Id)^* = u^* - \overline{\lambda} Id$, on a $\ker(u - \lambda Id) = \ker(u^* - \overline{\lambda} Id)$ et λ est donc valeur propre de u si et seulement si $\overline{\lambda}$ est valeur propre de u^*, les sous-espaces propres étant les mêmes.
3) Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u, et x et y deux vecteurs propres associés à ces deux valeurs propres, on a : $\overline{\lambda} < x, y >=< u(x), y >=< x, u^*(y) >= \overline{\mu} < x, y >$, d'après 2), et finalement donc forcément $< x, y >= 0$.
4) Soit u un endomorphisme dont la matrice dans une base orthonormale d'un espace hermitien E de dimension n est A, u est normal (la matrice de u^* étant dans ces conditions A^*).
On va montrer par récurrence sur n qu'il existe une base orthonormale de vecteurs propres de u :
Pour $n = 1$ il n'y a rien à montrer.
Pour un n donné, u admet au moins une valeur propre λ ; soit x un vecteur propre associé et

F l'orthogonal de x.
Pour tout $y \in F$, $< u(y), x >=< y, u^*(x) >= \overline{\lambda} < x, y >= 0$ et F est donc stable par u. Il est clair sur la définition que la restriction v de u à F est encore un endomorphisme normal de l'espace hermitien F, ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence à v. Mais une base orthonormale de vecteurs propres de v est une famille orthonormale de vecteurs propres de u et en la recollant avec un vecteur unitaire colinéaire à x, on obtient bien la base cherchée...
5) Si A^* est un polynôme en A, A^* commute bien avec A et A est donc une matrice normale.
Réciproquement, si A est normale il existe donc P unitaire et D diagonale telles que
$P^{-1}AP = P^*AP = D$ et donc aussi $P^*A^*P = D^*$.
Si l'on trouve un polynôme Q tel que $Q(D) = D^*$ on aura aussi $Q(A) = A^*$.
Mais ceci revient à trouver un polynôme tel que $Q(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$, pour les valeurs propres distinctes λ_i, $1 \leq i \leq k$ de A et on sait que ceci est possible (Polynômes d'interpollation de Lagrange).
6) Si u est hermitien, il est donc normal et l'on sait que ses valeurs propres sont réelles. Réciproquement si (e_i) est une base orthonormale de vecteurs propres de u, associés aux valeurs propres λ_i, non nécessairement distinctes, on a $u(e_i) = \lambda_i e_i = \overline{\lambda_i} e_i = u^*(e_i)$ puisque les λ_i sont réels, soit $u = u^*$.
7) Si u est unitaire il est bien normal et ses valeurs propres sont de module 1.
Réciproquement, comme ci dessus, $\overline{\lambda_i} = \lambda^{-1}$ implique que $u^*(e_i) = u^{-1}(e_i)$ pour les éléments d'une base orthonormale de vecteurs propres et donc bien $u^* = u^{-1}$.

IV *Soient Φ_1 et Φ_2 deux formes bilinéaires symétriques définies sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, E. On supposera de plus que Φ_2 est non dégénérée.*
Si $\mathcal{B}$ est une base de E, et M_1, M_2 sont les matrices respectives de Φ_1 et Φ_2 dans cette base, on appellera $f_{\mathcal{B}}$ l'application linéaire de E dans E de matrice $M_2^{-1}M_1$, par rapport à $\mathcal{B}$.
1) Montrer que si $\mathcal{C}$ est une autre base de E, on obtient le même endomorphisme (soit $f_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{C}}$). On notera donc f cet endomorphisme.
2) Montrer que s'il existe une base orthogonale à la fois pour Φ_1 et Φ_2, l'endomorphisme f est diagonalisable.
3) En déduire que si M et N sont deux matrices symétriques réelles et si M est de plus définie positive, MN est diagonalisable.

1) Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, la matrice de $f_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{C}$ est $P^{-1}M_2^{-1}M_1P$ et celle de $f_{\mathcal{C}}$ est par définition $(P^*M_2P)^{-1}P^*M_1P$. Ces deux matrices étant égales on a bien $f_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{C}}$.
2) Dans une telle base les matrices de Φ_1 et Φ_2 sont diagonales et la matrice de f l'est donc aussi.
3) Prenons Pour Φ_1 et Φ_2 deux forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ de matrices (dans la base canonique) respectivement N et M^{-1}. Φ_2 étant un produit scalaire, il existe une base orthonormale pour Φ_2 et orthogonale pour Φ_1 et d'après 2) f dont la matrice dans la base canonique est MN est diagonalisable.

V *Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel euclidien et $u \in L(E)$ un opérateur symétrique.*
1) Soit $f : E - \{0\} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{<u(x),x>}{\|x\|^2}$.
a) Montrer que f est différentiable et calculer df_x pour $x \in \mathcal{E} - \{0\}$.
b) Montrer qu'il existe $x_0 \in S = \{x \in \mathcal{E} / \|x\| = 1\}$ tel que :
$\forall x \in S \ f(x) \geq f(x_0)$.
c) En déduire que x_0 est un vecteur propre de u.
d) Montrer, par récurrence sur la dimension de $\mathcal{E}$, que u est diagonalisable dans une base

orthonormale.

1)a) Il est clair que f est bien différentiable car elle se décompose en produit somme et composées d'application linéaires, bilinéaires et de l'application $z \mapsto 1/z$.
Un calcul élémentaire (utilisant ces décompositions) donne alors que, pour $x \in E$, $x \neq 0$, et $h \in E$, $df_x(h) = \frac{2<u(x),h><x,x>-2<x,h><u(x),x>}{<x,x>^2}$.
b) La fonction f étant constante sur les droites vectorielles, il suffit de montrer qu'elle admet un minimum sur la sphère S, ce qui est clair puisque elle est continue et que S est compacte.
c) La différentielle de f en x_0 est donc nulle. Or la différentielle en un point x est nulle si et seulement si :
$\forall h \in E, < u(x), h >< x, x >=< x, h >< u(x), x >$.
En considérant les h orthogonaux à x, on obtient alors que la différentielle est nulle en x si et seulement si $u(x)$ appartient à l'orthogonal de l'orthogonal de x, c'est à dire à la droite engendrée par x puisque la forme est non dégénérée.
Il s'ensuit alors que puisque la différentielle de f s'annule en x_0, x_0 est un vecteur propre de u.
d) On procède alors par récurrence sur n, comme à l'exercice III, question 4, en considérant l'orthogonal d'un vecteur propre et la restriction de u à cet orthogonal...

VI *a) Soit H une matrice hermitienne à valeurs propres positives.*
Montrer qu'il existe une unique matrice hermitienne S, à valeurs propres positives, telle que $S^2 = H$.
b) Soit $A \in Gl_n(\mathbb{C})$.
Montrer qu'il existe un unique couple (R, U), où R est une matrice hermitienne positive et U une matrice unitaire, tel que $A = RU$.
Que peut-on dire si A est réelle ?
c) En déduire qu'il existe un unique couple (R, Θ), où R est une matrice hermitienne positive et Θ une matrice hermitienne, tel que $A = Re^{i\Theta}$ (décomposition polaire).
d) Généraliser à une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{C})$.

VII *Soient a et b deux endomorphismes d'un espace hermitien E. On note λ (resp. μ) la plus grande valeur propre de l'endomorphisme (hermitien) aa^* (resp. bb^*).*
a) Montrer que $\forall y \in E$, $\|a(y)\| \leq |\lambda| \|y\|$.
b) En déduire que si ρ est une valeur propre de ab, on a : $|\rho| \leq \lambda\mu$.

VIII *Soit E un espace hermitien. On considère un endomorphisme u de E vérifiant : $\forall x \in E, \quad < u(x), x >= 0$.*
Montrer que $u = 0$.
Ce résultat est-il vrai dans le cas euclidien ?

IX *1) Soient x et y deux vecteurs non nuls de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.*
Montrer qu'il existe une réflexion (ou symétrie vectorielle orthogonale hyperplane) S, telle que $S(x) = \frac{\|x\|y}{\|y\|}$.
2) En déduire les résultats suivants :
a) Soit $A \in Gl_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice orthogonale O et une matrice triangulaire supérieure T, à diagonale strictement positive, telles que $A = OT$, et une telle décomposition est unique.
b) Soient $A \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale et $r = \dim\ker(A - I)$. A peut s'écrire comme le produit d'au plus $n - r$ réflexions.