ACTIVITÉS SUR LES POLYNÔMES

Activité 1

Résolution d'une équation du troisième degré à coefficients réels

I) Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes : (a) $x^3 - 3x + 2 = 0$; (b) $x^3 - 3x - 2 = 0$.

II) On se propose de résoudre algébriquement sur $\mathbb{C}$ l'équation (E) $x^3 + 3x + 2 = 0$.

1) Soient α, β, γ éléments de $\mathbb{C}$ et

$$\alpha_1 = \alpha + j\beta + j^2\gamma \text{ et } \alpha_2 = \alpha + j^2\beta + j\gamma, \text{ avec } j = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

Calculer sous forme développée réduite $\mathrm{A} = \alpha_1^3$ et $\mathrm{B} = \alpha_2^3$.

2) Si α, β, γ sont les racines complexes de l'équation (E) :

a) Montrer que l'on a

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \\ \alpha\beta\gamma = -2. \end{cases}$$

b) En développant $(\alpha + \beta + \gamma)^2$, montrer que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -6$.

c) En développant $(\alpha + \beta + \gamma)^3$, montrer que $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 12 - 3\mathrm{S}$, avec $\mathrm{S} = \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \beta^2\alpha + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta$.

d) En remplaçant γ par $-\alpha - \beta$ dans l'expression de S, montrer que $\mathrm{S} = -\alpha^3 - \beta^3 - \gamma^3$; en déduire que $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -6$.

3) On considère l'équation (E') $(x - \mathrm{A})(x - \mathrm{B}) = 0$.

a) À l'aide du 1) a), calculer A + B en utilisant les résultats du 2).

b) Montrer que $\alpha_1\alpha_2 = -9$ et en déduire la valeur de AB.

c) Montrer que (E') s'écrit $x^2 + 54x - 729 = 0$.

d) Résoudre l'équation (E') (les deux racines sont réelles et distinctes ; on appellera A la plus petite des deux).

e) Calculer α_1 et α_2, racines cubiques réelles respectives des nombres A et B trouvés ci-dessus.

4) On cherche donc (α, β, γ) solution du système linéaire

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + j\beta + j^2\gamma = \alpha_1 \\ \alpha + j^2\beta + j\gamma = \alpha_2. \end{cases}$$

Résoudre ce système (on trouvera α réel, et β et γ complexes non réels conjugués ; on exprimera β et γ sous la forme $aj + bj^2$ avec a et b réels).

III) En utilisant le changement de variable $\mathrm{X} = -x$, montrer que l'équation $x^3 + 3x - 2 = 0$ admet pour solutions les opposées des solutions de (E).

Commentaires :

• On s'intéresse à une résolution algébrique pour décomposer un polynôme unitaire de degré 3 à coefficients réels en produit de trois facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. On pourra montrer que par translation, on se ramène à l'équation $x^3 + px + q = 0$.

• Une équation de degré 3 est abordable par un élève dès lors qu'elle a une racine évidente, ou indiquée par l'énoncé.

• On peut prendre ensuite une résolution de l'équation générale $x^3 + px + q = 0$ avec p et q réels quelconques et faire chercher par l'élève le nombre de racines réelles possibles, sachant que si α est racine, son conjugué l'est aussi.

• On peut « faire sentir » que la détermination de A et B résout le problème en montrant que la permutation circulaire de α, β, γ dans α_1 et dans α_2 laisse A et B inchangés et que le système linéaire du II) 4) admet une seule solution.

• Si A et B ne sont pas réels, on choisit α_1 racine cubique de A et $\alpha_2 = \overline{\alpha_1}$; dans ce cas, α, β, γ sont des réels tous distincts.

• Si A et B sont réels et distincts on fait le choix du II) 3) e) et on obtient α réel, et β et γ complexes non réels conjugués.

• On peut chercher ce qui se passe lorsque A = B. Les racines sont réelles. Il y a une racine double et une racine simple lorsque p est différent de 0 ; lorsque $p = 0$, dans le cas où A = B, on a aussi $q = 0$ et 0 est racine triple.