Théorie du choix social

-

Episode 3

-

Une version cardinale de la Théorie

Olivier SICARD
IREM de la REUNION

Mars 2016

Table des matières

I Introduction

En théorie du choix social, il semble évident que puisque l'on se préoccupe de « choix », la façon dont on modélise les préférences joue un rôle crucial dans la théorie.

Jusqu'à présent dans les épisodes 1 et 2, nous avons représenté les préférences individuelles et collectives d'un point de vue ordinal en appliquant un préordre total sur l'ensemble des alternatives possibles. Cependant cette façon de représenter les préférences ne prend pas en compte la force avec laquelle une alternative peut en surclasser une autre. En effet, que l'alternative x soit largement ou légèrement préférée à l'alternative y, la traduction en terme de préordre sera dans les deux cas : xPy ou $o_{yx} = 1$ si l'on utilise la notation matricielle, pourtant nous avons tous connu des moments où, face à un choix, la réponse était évidente tellement l'une des options surclassait de loin toutes les autres, et inversement il nous est tous arrivé d'avoir des choix difficiles à faire, puisque nous étions plus ou moins indifférents aux alternatives proposées.

La question de la modélisation ordinale ou cardinale des choix a largement été discutée au cours des dernières décénies. Pour Pareto et ses disciples par exemple, l'observation des choix concrets de l'individu permettrait d'établir s'il préfère x à y, et y à z, mais non pas s'il préfère plus fortement x à y qu'il ne préfère y à z. D'ailleurs Arrow lui-même approuve entièrement cette analyse, et récuse donc le concept de cardinalité au profit de celui d'ordinalité pour arriver à son incontournable Théorème d'Impossibilité.

Ces dernières années pourtant plusieurs auteurs se sont intéressés à la théorie cardinale du choix social. Citons quelques exemples : Brams et Fishburn ont publié dans les années 80 leurs travaux sur le vote par approbation et ses propriétés, en 1984 Duncan publie "*Notes on Social Measurement : Historical and Critical*". Plus récemment en 2000, Smith travaille sur le range-voting, caractérisé par Pivato en 2013. Hillinger quant à lui publie en 2014 "Voting and the cardinal Agregation of Judgments" dans lequel il défend bec et ongles la théorie cardinale du choix social et plus particulièrement les méthodes 3-chotomiques et 5-chotomiques. Le vote 3-chotomique sera d'ailleurs caractérisé en 2013 par Alcantud et Laruelle.

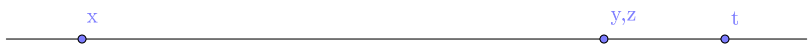
Nous allons dans ce troisième épisode nous affranchir de ces considérations pour nous demander uniquement ce que donne la théorie cardinale du choix social, c'est à dire si nous considérons que chaque individu est à même d'associer une intensité à ses préférences.

Nous commencerons par modéliser les préférences cardinales à l'aide de matrices et nous verrons que contrairement au cas ordinal, l'espace de ces matrices est un espace vectoriel que nous étudierons. Dans un second temps nous redéfinirons dans le contexte cardinal les propriétés démocratiques énoncées précédemment dans le contexte ordinal et pour finir, nous étudierons les fonctions de choix social linéaires (espace vectoriel oblige) et verrons quels sont les impacts des propriétés démocratiques nouvellement redéfinies sur ces fonctions de choix social particulières.

Cette étude nous amènera tout d'abord à caractériser la fonction somme dans le cadre cardinal de la théorie du choix social, ce qui nous permettra alors de reconsidérer le théorème d'impossibilité d'Arrow.

II Modélisation cardinale des préférences individuelles et collectives

Considérons un préordre total S sur X. Il est alors possible de ranger les éléments de X sur un axe. Admettons qu'un candidat surclasse tous les candidats à sa droite, et prenons l'exemple du préordre $xPyIzPt$. Il peut se représenter par :



La place des candidats x, y, z, t sur l'axe nous suggère que x est fortement préféré à y et z alors que ces deux derniers sont légèrement préférés à t.

Ce n'est pas tant la valeur que l'on pourrait attribuer aux quatre candidats x, y, z, t qui est important, mais plutôt l'écart entre ces valeurs qui est un indicateur de la force avec laquelle la préférence est ressentie par l'individu.

De plus, à l'instar d'une distance sur un axe, la force de préférence semble être additive, de sorte que la force de préférence entre x et t soit égale à la somme des forces de préférences entre x et y et entre y et t.

A la lumière de tout cela, il serait intéressant d'améliorer la structure préférentielle présentée dans le chapitre précédent pour qu'elle puisse prendre en compte la force d'une préférence.

II.1 Les matrices de préférences cardinales

Notons $X = (x_1, ..., x_p)$ un p-uplet d'alternatives, et définissons $K = (k_{ij}) \in M_p(\mathbb{R})$ "la matrice des préférences cardinales" ou "la matrice des écarts de préférences" d'un individu de la manière suivante :

1. $k_{ij} = 0$ si et seulement si $x_j I x_i$
2. $k_{ij} > 0$ si et seulement si $x_j P x_i$ avec la force k_{ij}
3. $k_{ij} < 0$ si et seulement si $x_i P x_j$ avec la force $-k_{ij}$
4. Les écarts relatifs sont sommables de sorte que $k_{ij} + k_{jq} = k_{iq}$

Le coefficient k_{ij} représente la force avec laquelle l'alternative x_j surclasse l'alternative x_i, autrement dit k_{ij} est l'écart de préférence entre les deux alternatives x_i et x_j.

Nous noterons $K_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de préférences cardinales.

Faisons tout de suite quelques remarques :

— Remarque 1 : La notion de matrice des préférences cardinales généralise la notion de préordre en y intégrant la notion de force des préférences.
— Remarque 2 : Les propriétés 2, 3 et 4 nous assurent que $k_{ii} = k_{ij}+k_{ji} = k_{ij}-k_{ij} = 0$, ce qui implique que nous sommes forcément indifférents entre deux alternatives identiques.
— Remarque 3 : K est une matrice antisymétrique ($K^t = -K$).
En effet, par définition, pour $i \neq j$, $k_{ji} = -k_{ij}$, et la diagonale de la matrice K est nulle d'après la remarque 2.
— Remarque 4 : $O_p(\mathbb{R}) \nsubseteq K_p(\mathbb{R})$, mais leur intersection est non vide.
En effet $O_p(\mathbb{R}) \cap K_p(\mathbb{R}) = \{K \in K_p(\mathbb{R}) \mid \phi(K) = K\} = \{K \in K_p(\mathbb{R}) \mid k_{ij} \in \{-1, 0, 1\}\}$
— Remarque 5 : Notons que la matrice $\Phi(K) = O = (o_{ij}) \in O_p(\mathbb{R})$ est la matrice des préférences ordinales associées à la matrice K où Φ est la fonction définie dans l'épisode 2 par $\Phi : M_p(\mathbb{R}) \longrightarrow M_p(\mathbb{R})$ qui à toute matrice $M = (m_{ij})$ associe $\Phi(M)$ en posant :
  — $\Phi(M)_{ij} = 0 \Longleftrightarrow m_{ij} = 0$
  — $\Phi(M)_{ij} = 1 \Longleftrightarrow m_{ij} > 0$
  — $\Phi(M)_{ij} = -1 \Longleftrightarrow m_{ij} < 0$

Considérons un exemple :

Le préordre $xPyIzPt$ est associé à toutes les matrices de préférences cardinales du type

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a & -a-b \\ a & 0 & 0 & -b \\ a & 0 & 0 & -b \\ a+b & b & b & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } a > 0 \text{ et } b > 0$$

La matrice des préférences ordinales associée est

$$\phi(K) = O = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

II.2 Les espaces vectoriels $K_p(\mathbb{R})$ et $K_p(\mathbb{R})^n$

Nous allons maintenant voir que $K_p(\mathbb{R})$ munit des opérations classiques sur les matrices, à savoir la somme et le produit par un scalaire, possède une structure d'espace vectoriel ce qui lui donne un avantage non négligeable sur $O_p(\mathbb{R})$. Il sera ensuite aisé de construire l'espace vectoriel des profils cardinaux $K_p(\mathbb{R})^n$

II.2.1 $K_p(\mathbb{R})$ - dimension et base canonique

Nous allons montrer que $(K_p(\mathbb{R}), +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $M_p(\mathbb{R})$. En effet, $K_p(\mathbb{R}) \subset M_p(\mathbb{R})$, $K_p(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, car $0 \in K_p(\mathbb{R})$ et soient K et K' deux matrices de $K_p(\mathbb{R})$, ainsi qu'un réel λ, la matrice $\lambda K + K'$ est bien antisymétrique car l'ensemble des matrices antisymétriques est un espace vectoriel contenant $K_p(\mathbb{R})$, de plus $(\lambda k_{xy} + k'_{xy}) + (\lambda k_{yz} + k'_{yz}) = \lambda(k_{xy} + k_{yz}) + k'_{xy} + k'_{yz} = \lambda k_{xz} + k'_{xz}$, donc $K_p(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire.

De plus, si l'on note $(a_1, ..., a_p)$ le p-uplet des alternatives, nous allons voir qu'il y a équivalence entre fournir la matrice des préférences cardinales sur l'ensemble des alternatives et fournir la liste des notes attribuées à chaque alternative, quitte à supposer que la note de l'alternative a_p est nulle.

Plus précisément, en notant θ_i la note attribuée à a_i et k_{ij} la force de préférence de j par rapport à i, nous allons montrer le théorème suivant :

<u>Théorème :</u>
La fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\} & \to & K_p(\mathbb{R}) \\ & \vec{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_{p-1}, 0) & \mapsto & \varphi(\vec{\theta}) = K = (k_{ij}) = (\theta_j - \theta_i) \end{array}$$

est une isomorphisme d'espace vectoriel.

<u>Preuve :</u>

Prouvons déjà que la fonction φ et bien définie, c'est à dire que $\varphi(\vec{\theta}) \in K_p(\mathbb{R})$.

— $k_{ii} = \theta_i - \theta_i = 0$
— $k_{ji} = \theta_i - \theta_j = -(\theta_i - \theta_j) = -k_{ij}$
— $k_{xy} + k_{yz} = \theta_y - \theta_x + \theta_z - \theta_y = \theta_z - \theta_x = k_{xz}$

Donc $\varphi(\vec{\theta})$ appartient bien à $K_p(\mathbb{R})$.

De plus φ est clairement linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda\vec{N} + \vec{M}) &= (\lambda(N_j - N_i) + M_j - M_i) \\ &= \lambda(N_j - N_i) + (M_j - M_i) \\ &= \lambda\varphi(\vec{N}) + \varphi(\vec{M}) \end{aligned}$$

Il reste à voir que φ est inversible, pour cela nous allons tout simplement exhiber φ^{-1}.

Posons $\begin{array}{llll} \psi & : K_p(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\} \\ & (k_{ij}) & \mapsto & (k_{p1}, ..., k_{pp}) \end{array}$ et montrons que $\psi = \varphi^{-1}$

$\varphi \circ \psi(k_{ij}) = \varphi(k_{p1}, ..., k_{pp}) = (k_{pj} - k_{pi}) = (k_{ij})$

et

$$\begin{array}{rcl} \psi \circ \varphi(\theta_1, ..., \theta_{p-1}, 0) & = & \psi((\theta_j - \theta_i)) \\ & = & (\theta_1 - \theta_p, ..., \theta_{p-1} - \theta_p, \theta_p - \theta_p) \\ & = & (\theta_1, ..., \theta_{p-1}, 0) \end{array}$$

Conclusion $\psi = \varphi^{-1}$ et φ est bien un isomorphisme d'espaces vectoriels, ce qui clôt notre preuve.■

Il en découle que $K_p(\mathbb{R})$ est de dimension $p-1$ avec comme base canonique les $\varphi(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) = E_j = \begin{pmatrix} 0 & & 1 & & \\ & \ddots & 1 & & \\ -1 & -1 & \ddots & -1 & -1 \\ & & 1 & \ddots & \\ & & 1 & & 0 \end{pmatrix}$

II.2.2 L'espace vectoriel des profils cardinaux $K_p(\mathbb{R})^n$

Les matrices de préférences cardinales étant maintenant définies, appelons "profil cardinal" le n-uplet $\pi = (K_1, ..., K_n) \in K_p(\mathbb{R})^n$, où K_i est la matrice des préférences cardinales du votant v_i.

- Remarque 1 : A tout profil cardinal π nous appellerons "profil ordinal associé à π" le n-uplet $\pi' = \Phi(\pi) = (\Phi(K_1), ..., \Phi(K_n)) \in O_p(\mathbb{R})^n$.
- Remarque 2 : $K_p(\mathbb{R})^n$ est un espace vectoriel de dimension $n(p-1)$, un élément de $K_p(\mathbb{R})^n$ peut alors s'écrire $(\theta_1^1, \theta_2^1, ..., \theta_{p-1}^1, ..., \theta_1^n, ..., \theta_{p-1}^n)$, θ_j^i étant la note qu'attribue le candidat v_i à l'alternative a_j
- Remarque 3 : Tous les votants attribuent au candidat a_p la note 0. Attention, cela ne signifie aucunement que cette alternative est considérée unanimement comme étant la plus mauvaise par tous les votants : n'oublions pas que les notes θ_j^i peuvent prendre des valeurs négatives.

II.2.3 Méthode d'agrégation cardinale arrowienne

Puisque nous possédons deux types de matrices de préférences (ordinales et cardinales), il nous faut distinguer deux classes de méthodes d'agrégation :

— Nous savons déjà que f est une méthode d'agrégation ordinale arrowienne lorsque le domaine de définition de f est inclus dans $O_p(\mathbb{R})^n$ et que son espace d'arrivée est $O_p(\mathbb{R})$.
— De la même façon nous dirons que f est une méthode d'agrégation cardinale arrowienne lorsque le domaine de définition de f est inclus dans $K_p(\mathbb{R})^n$ et que son espace d'arrivée est $K_p(\mathbb{R})$.

III Version cardinale des propriétés démocratiques des fonctions de choix social

La théorie ordinale du choix social ne prend pas en compte la force avec laquelle les préférences se manifestent, dès lors aucune des propriétés démocratiques des fonctions de choix social ordinales n'a à se soucier de la notion de force des préférences ! Maintenant que nous avons présenté la notion de préférences cardinales, il semble indispensable d'adapter les principes démocratiques étudiés dans le chapitre précédent à la théorie cardinale du choix social.

Nous allons détailler l'un après l'autre les principes suivants : (U), (P), (I), (D), (DF), (N), (A), (MS).

III.1 Le principe d'Universalité (U)

Nous savons qu'une fonction d'agrégation f vérifie le principe d'universalité si les votants ne sont en aucun cas restreints dans le classement des candidats. Autrement dit, dans le cas qui nous concerne, le domaine de définition de la fonction f doit être l'ensemble de tous les profils cardinaux $K_p(\mathbb{R})^n$.

III.2 Le principe d'Unanimité - ou de Pareto faible (P)

Considérons deux candidats a et b. Si tous les votants sont d'accord pour classer le candidat b devant le candidat a, alors b sera effectivement classé devant a au final après agrégation.

Plus précisément avec la notation matricielle, en posant $K_i = (k^i_{xy})$ la matrice des préférences cardinales associée au votant v_i et $K = (k_{xy})$ la matrice des préférences cardinales agrégée, on obtient : f vérifie le principe de Pareto faible lorsque $(\forall v_i \in V,\, k^i_{ab} > 0) \Rightarrow k_{ab} > 0$.

III.3 Le principe d'indifférence aux alternatives non pertinentes (I)

Rappelons nous que ce principe permet de ne pas s'inquiéter des alternatives oubliées (car non pertinentes à priori) : Il ne faut pas que l'ajout ou le retrait d'une alternative change l'ordre ou la force de préférence entre les autres alternatives.

Une fonction d'agrégation cardinale f vérifie l'indifférence aux alternatives non pertinentes si pour tout duo (x, y) de candidats, la préférence cardinale collective restreinte à ce duo ne dépend que des préférences cardinales individuelles sur ce duo et non pas des préférences individuelles par rapport aux autres candidats.

Autrement dit : Si l'on note $K_{|x,y}$ la matrice des préférences cardinales restreinte à (x, y) et $\pi_{|x,y} = (K^1_{|x,y}, ..., K^n_{|x,y})$, alors une fonction d'agrégation cardinale f vérifie le principe d'indifférence aux alternatives non pertinentes si $f(\pi_{|x,y}) = f(\pi)_{|x,y}$, par abus de notation, nous pouvons alors écrire $f(k^1_{xy}, ..., k^n_{xy}) = k_{xy}$.

III.4 Le principe de non dictature (D)

Soit v_J un votant, ayant pour matrice de préférences cardinales K_J. f est appelée une dictature si pour tout profil cardinal π, et pour tout couple d'alternatives (x, y), $k^J_{xy} > 0 \Rightarrow f(\pi)_{xy} = k^J_{xy}$. Cela signifie que le votant-dictateur v_J dicte à l'ensemble des votants ses préférences strictes.

Nous dirons que la méthode d'agrégation f vérifie le principe de non dictature si f n'est pas une dictature.

III.5 Le principe de non dictature forte (DF)

Soit v_J un votant, considérons la projection p_J qui à tout profil $\pi = (K_1, .., K_n)$ associe $f(\pi) = K_J$. Cela signifie que le votant-dictateur v_J dicte à l'ensemble des votants non seulement ses préférences strictes mais aussi ses indifférences.

Nous dirons qu'une méthode d'agrégation f vérifie le principe de non dictature forte si f n'est pas une projection.

Théorème : Soit f une dictature Arrowienne associée au votant v_J, si v_J n'est pas totalement indifférent à toutes les alternatives ($K_J \neq 0$), alors v_J dicte aussi ses indifférences et dans ce cas f est une dictature forte.

Preuve :

Dans cette preuve nous noterons $K = f(\pi)$ la matrice des préférences agrégées.

— Dans le cas de deux alternatives (que nous noterons x et y), puisque $K_J \neq 0$, alors $k^J_{xy} \neq 0$, v_J n'est donc jamais indifférent et le problème ne se pose pas.
— Supposons maintenant qu'il y ait au moins trois alternatives, Si v_J n'est jamais indifférent alors $K = K_J$, sinon il existe au moins un couple d'alternatives (x, y) pour lequel $k^J_{xy} = 0$ est puisque $K_J \neq 0$, il existe une autre alternative z pour laquelle $k^J_{xz} > 0$.

  Remarquons déjà que $k^J_{yz} = k^J_{xz}$, en effet $k^J_{yz} = k^J_{yx} + k^J_{xz} = 0 + k^J_{xz} = k^J_{xz}$.
  Puisque v_J est un dictateur, après agrégation $k_{yz} = k_{xz} > 0$, on en déduit que $k_{xy} = k_{xz} + k_{zy} = 0$ (sinon f ne serait pas Arrowienne).
  Conclusion v_J dicte aussi ses indifférences et f est une dictature forte.■

III.6 Le principe de neutralité (N)

La neutralité stipule qu'aucun candidat ne peut être favorisé d'aucune manière que ce soit par la méthode d'agrégation. Nous avons déjà vu que d'un point de vue ordinal cela signifie que si chaque votant permute deux candidats dans ses préférences individuelles, au final cette permutation s'applique aussi après agrégation.

Nous avions donné une définition matricielle de la neutralité : Une fonction d'agrégation ordinale f est neutre si pour tout profil ordinal $\pi = (O_1, ..., O_n) \in O_p(\mathbb{R})^n$ et pour toute matrice de permutation σ des candidats, $f(\sigma^{-1}\pi\sigma) = \sigma^{-1} f(\pi)\sigma$; où $\sigma^{-1}\pi\sigma = (\sigma^{-1}O_1\sigma, ..., \sigma^{-1}O_n\sigma)$

Une autre façon de le présenter est de considérer deux profils π et π' et un couple d'alternative (x, y), si pour tout votant v_i, $o'^i_{xy} = -o^i_{xy}$ alors après agrégation $o'_{xy} = -o_{xy}$

Généralisons le principe de neutralité aux fonctions de choix cardinales de la façon suivante : considérons deux profils cardinaux π et π', un couple d'alternatives (x, y) et λ un réel, si pour tout votant v_i, $k'^i_{xy} = \lambda.k^i_{xy}$ alors après agrégation $k'_{xy} = \lambda.k_{xy}$

Si par exemple, après une annonce politique, tous les votants préfèrent deux fois plus qu'avant le candidat x au candidat y, alors au final x est toujours préféré à y, mais deux fois plus qu'avant.

Remarquons que si f est neutre, alors $f(\lambda.\pi) = \lambda.f(\pi)$.

III.7 Le principe d'anonymat (A)

La propriété d'anonymat ne souffre aucune modification entre la théorie ordinale et la théorie cardinale du choix social, puisqu'elle ne s'intéresse qu'à l'ordre dans lequel on considère les votants et délaisse totalement la manière dont ils votent.

Nous dirons qu'une fonction d'agrégation cardinale f est anonyme, si pour tout profil cardinal $\pi = (K_1, ..., K_n)$ et pour toute permutation $\sigma \in S_n$, $f(K_{\sigma_1}, ..., K_{\sigma_n}) = f(\pi)$.

III.8 La monotonie stricte (MS)

Si au moins un votant améliore strictement la force de sa préférence en faveur de y par rapport à x, pendant que les autres votants conservent leur préférence entre x et y, alors nous dirons que f est strictement monotone si la force de préférence agrégée entre y et x s'est strictement améliorée en faveur de y.

Plus précisément, considérons π et π' deux profils, et posons $K = f(\pi)$ puis $K' = f(\pi')$. Si pour tout votant v_i, $k'^i_{xy} \geq k^i_{xy}$ et que pour au moins un votant v_J, $k'^J_{xy} > k^J_{xy}$, alors après agrégation $k'_{xy} > k_{xy}$

IV Les fonctions de choix social linéaires

Maintenant que les bases de la théorie cardinale du choix social sont posées, intéressons nous aux fonctions de choix social linéaires. Mais pourquoi se limiter seulement aux applications linéaires ? Plusieurs arguments nous y incitent :

IV.1 Pourquoi les fonctions de choix social linéaires ?

Premièrement, les espaces d'arrivé et de départ de nos fonctions de choix social étant des espaces vectoriels, il est mathématiquement naturel de considérer les morphismes d'espaces vectoriels qui les relient, à savoir les applications linéaires.

Deuxièmement, une méthode d'agrégation f cardinale de $K_p(\mathbb{R})^n$ dans $K_p(\mathbb{R})$ est dite linéaire si et seulement si pour tout couple de profils (π, π') et pour tout réel λ :

i $f(\lambda\pi) = \lambda f(\pi)$

ii $f(\pi + \pi') = f(\pi) + f(\pi')$

Or le principe de Neutralité est indispensable à toute bonne fonction de choix social, et nous avons vu précédemment que si f est neutre, alors $f(\lambda\pi) = \lambda f(\pi)$, ce qui signifie que toute bonne fonction de choix social doit être au minimum à "moitié" linéaire (dans le sens où elle vérifie (i)) sous peine de ne pas être une fonction Neutre.

Dernier point, voyons ce qu'apporte la propriété (ii) aux fonctions de choix social.

La propriété caractéristique $f(\pi + \pi') = f(\pi) + f(\pi')$ stipule que l'on peut sommer et agréger les profils dans l'ordre que l'on veut sans en changer le résultat. En conséquence si des votants se mettent d'accord pour que chacune de leur matrice de préférence soit la somme de deux matrices créant alors deux profils π et π' alors il revient au même d'agréger séparément les deux profils puis de sommer les matrices agrégées ou de sommer les deux profils puis d'agréger la somme. Voici deux applications concrètes de cette propriété :

— Application 1 : Découpage en critère.
Imaginons qu'un groupe de votants se mettent d'accord pour que chacun de ces deux profils soit associé à un point de vue ou un critère particulier, et que la somme des deux profils corresponde au profil associé aux deux critères simultanément. Alors il revient au même d'agréger le profil global associé aux deux critères simultanément ou d'agréger critère par critère puis de sommer les matrices.

— Application 2 : Les bureaux de vote.
Imaginons deux groupes de votants ne pouvant pas voter en même temps au même endroit. Le groupe G vote chez lui on décide alors que dans ce cas les autres votants du groupe G' étant absents ils votent blanc, on obtient le profil suivant : $\pi = (K_1, ..., K_x, 0, ..., 0)$. De même le groupe G' vote chez lui on décide alors que dans ce cas les autres votants du groupe G étant absents ils votent blanc, on obtient le profil suivant : $\pi = (0, ..., 0, K_{x+1}, ..., K_n)$. Alors il revient au même d'agréger les résultats des deux groupes puis de sommer les matrices de préférences globales que d'agréger directement le profil $\pi + \pi'$.

Finalement, même si rien n'est mathématiquement établi et démontré, les applications linéaires semblent être démocratiquement intéressantes en théorie du choix social.

Considérons donc f une application linéaire de $K_p(\mathbb{R})^n$ dans $K_p(\mathbb{R})$, et posons $\pi = (\theta_1^1, ..., \theta_{p-1}^1, ..., \theta_1^n, ..., \theta_{p-1}^n)$, θ_j^i correspondant à la note que le votant v_i attribue à l'alternative a_j. La matrice $\Lambda = (\lambda_{j,k}^i)$ associée à f possède $p-1$ colonnes et $n(p-1)$ lignes. $\lambda_{j,k}^i$ est le coefficient de la matrice Λ se trouvant à la ligne $i \times j$ et à la colonne k, de sorte que :

$$\begin{aligned} f(\pi) = \pi \times \Lambda &= \left(\sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{j,k}^{i} \theta_j^i \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{j,1}^{i} \theta_j^i, ..., \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{j,p-1}^{i} \theta_j^i \right) \end{aligned}$$

où $\sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{j,k}^{i} \theta_j^i$ est la note obtenue par l'alternative a_k comme une combinaison linéaire particulière des notes de tous les votants par rapport à toutes les alternatives.

Étudions ces applications linéaires plus en détails.

IV.2 Propriétés démocratiques des fonctions de choix social linéaires

Les fonctions de choix social linéaires sont elles des fonctions démocratiquement viables ? Nous allons voir que dès le départ les fonctions de choix social linéaires possèdent quelques avantages non négligeables : en effet elles sont toutes Arrowiennes et Universelles. Nous verrons ensuite que sous certaines contraintes sur les $\lambda_{j,k}^{i}$ elles peuvent vérifier toutes les propriétés démocratiques décrites plus haut.

IV.2.1 Premier avantage : Pas de cycle possible

Dans les épisodes précédents, nous avons vu lors de l'étude du théorème d'impossibilité d'Arrow que le plus dur n'était pas d'élaborer une méthode d'agrégation vérifiant les propriétés ordinales (U), (I), (D) et (P) mais qu'alors cette méthode n'était pas "Arrowienne" dans le sens où son espace d'arrivée n'était pas $O_p(\mathbb{R})$ entre autre car $f(\pi)$ pouvait contenir des cycles.

Dans le cas qui nous concerne, il est clair que $f(\pi) \in K_p(\mathbb{R})$, les méthodes d'agrégation cardinales linéaires sont donc Arrowiennes et nous assurent l'obtention d'un préordre total après agrégation.

IV.2.2 Deuxième avantage : l'Universalité (U)

Les applications linéaires sont totalement définies sur l'ensemble $K_p(\mathbb{R})^n$, aucun profil n'est exclu au départ, les fonctions de choix social linéaires vérifient donc le principe d'Universalité (U).

IV.2.3 Le principe d'Indifférence aux alternatives non pertinentes (I)

Nous allons montrer que :

$$\boxed{f \text{ vérifie (I) si et seulement si } f(\pi) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_1^i \theta_1^i, ..., \sum_{i=1}^{n} \lambda_{p-1}^i \theta_{p-1}^i \right)}$$

<u>Preuve :</u>

Dans le sens direct, lorsque f vérifie (I), la préférence collective pour le couple (x, y) est une combinaison linéaire des préférences individuelles pour ce même couple et ne fait pas intervenir les préférences individuelles pour les autres couples. Or dans le cas qui nous concerne la note agrégée de l'alternative a_k est $\displaystyle\sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{j,k}^i \theta_j^i$, et c'est aussi la valeur de la préférence entre l'alternative a_k et l'alternative a_p (en effet rappelons nous qu'il y a un isomorphisme entre les notes et les forces de préférences quitte à poser la note associée à l'alternative a_p comme étant toujours nulle).

Pour que cette préférence ne dépende que des alternatives a_k et a_p, il faut et il suffit qu'elle ne fasse pas intervenir les θ_j^i avec $j \neq k$. Au final la note agrégée de l'alternative a_k devient $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_{k,k}^i \theta_k^i$ que nous noterons par abus $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_k^i \theta_k^i$, ce qui clôt la preuve dans le sens direct.

La réciproque est évidente puisque le calcul de la note agrégée associée à l'alternative a_k ne fait intervenir que les notes de l'alternative a_k pour chacun des votants.■

Dès lors nous ne considèrerons uniquement que les applications linéaires vérifiant (I), à savoir les applications linéaires de la forme :

$$f(\pi) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_1^i \theta_1^i, ..., \sum_{i=1}^{n} \lambda_{p-1}^i \theta_{p-1}^i \right)$$

IV.2.4 Le principe de neutralité (N)

Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème :
Soit f une fonction de choix social linéaire vérifiant (I),
f vérifie (N) si et seulement si $f(\pi) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i \theta_1^i, ..., \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \theta_{p-1}^i\right)$
C'est à dire que la matrice agrégée des préférences cardinales s'écrit alors : $f(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i K^i$

Preuve :

Supposons que f soit neutre, la neutralité cardinale stipule en particulier que si pour tout i, $k_{xy}'^i = -k_{xy}^i$, alors après agrégation $k_{xy}' = -k_{xy}$.

Or $k_{xy} = \theta_y - \theta_x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_y^i \theta_y^i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_x^i \theta_x^i$
et $k_{xy}' = \theta_y' - \theta_x' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_y^i \theta_y'^i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_x^i \theta_x'^i$.

Donc

$$k_{xy}' = -k_{xy} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_y^i \theta_y^i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_x^i \theta_x^i = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_y^i \theta_y'^i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_x^i \theta_x'^i$$

Cette égalité devant se vérifier pour tous les profils, elle doit se vérifier en particulier pour les profils π et π' suivant :

— Profil π
  $\theta_x^i = 0$ pour tout les votants v_i,
  $\theta_y^i = 0$ pour tout votant $v_i \neq v_J$
  $\theta_y^J = 1$.
— Profil π'
  $\theta_x'^i = 0$ pour tout les votants $v_i \neq v_J$,
  $\theta_y'^i = 0$ pour tout votant v_i
  $\theta_x'^J = 1$.

Remarquons premièrement que les autres notes n'ont que peu d'intérêt puisque nous nous plaçons dans le cas où les méthodes d'agrégations linéaires vérifient le principe d'indépendance aux alternatives non pertinentes.

De plus $k_{xy}^i = k_{xy}'^i = 0$ pour tout $i \neq J$ et $k_{xy}^J = 1$ tandis que $k_{xy}'^J = -1$ Donc les profils π et π' vérifient bien que pour tout i, $k_{xy}'^i = -k_{xy}^i$.

Puisque f est neutre, il faut que $k_{xy}' = -k_{xy}$, ce qui équivaut dans notre cas à $\lambda_y^J = \lambda_x^J$

Au final pour J fixé, tous les λ_x^J sont égaux ; nous les noterons λ^J, et dans ce cas $f(\pi) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i \theta_1^i, ..., \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \theta_{p-1}^i\right)$, ce qui revient à écrire en utilisant les notations matricielles que $f(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i K^i$.

Réciproquement, si $f(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i K^i$, considérons alors deux alternatives x et y ainsi qu'un réel λ pour lesquels $k'^i_{xy} = \lambda k^i_{xy}$ pour tout votant v_i.

Nous obtenons, $k'_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i k'^i_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \lambda k^i_{xy} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda^i k^i_{xy} = \lambda k_{xy}$ et f vérifie donc le principe de neutralité.■

Dès lors nous ne considèrerons uniquement que les applications linéaires vérifiant (I) et (N), à savoir les applications linéaires de la forme :

$$f(\pi) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i \theta_1^i, ..., \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \theta_{p-1}^i \right)$$

IV.2.5 Le principe d'Unanimité (P)

Les applications de choix social linéaires vérifient-elles le principe d'Unanimité ? Il est clair que l'application nulle ne le vérifie pas : en effet, si $f(\pi) = 0$, cela signifie que l'application rend après agrégation toutes les alternatives indifférentes. Considérons alors deux alternatives x et y pour lesquelles tous les votants préfèrent strictement y à x alors au final y et x seront quand même considérées comme indifférentes. Ceci contredit le principe d'Unanimité.

Supposons donc maintenant que $f \neq 0$, nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème : Soit f une application de choix social linéaire non nulle vérifiant (I) et (N), f vérifie (P) si et seulement si f est positive dans le sens où $\lambda^i \geqslant 0$.

Preuve :

Montrons le sens direct :

Si tous les votants préfèrent strictement y à x, alors $\theta_y^i > \theta_x^i$ pour tout votant v_i. f vérifie le principe d'Unanimité si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} \lambda^i \theta_y^i > \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \theta_x^i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \left(\theta_y^i - \theta_x^i \right) > 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda^i . k^i_{xy} > 0$. Supposons qu'il existe au moins un $\lambda^i < 0$, sans perdre de généralité nous pouvons considérer qe $\lambda^n < 0$; et dans ce cas $\dfrac{-1}{\lambda^n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\lambda^i.k_{xy}^i > k_{xy}^n$ ce qui est absurde car les valeurs des forces de préférences n'ont pas de borne supérieure : chaque votant est libre de donner la note qu'il veut.

Réciproquement, si f est positive, alors il est clair que
$(\theta_y^i > \theta_x^i$ pour tout votant $v_i) \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda^i\theta_y^i > \sum_{i=1}^{n}\lambda^i\theta_x^i$
■

IV.2.6 Le principe de non dictature (D) et de non dictature forte (DF)

Les dictatures fortes sont des projections du type $f(\pi) = K_J$ et à ce titre sont bien des applications linéaires (toutes les projections sont linéaires). Toute autre application linéaire différente de ce type de projection vérifie le principe de non dictature forte (DF).

Concernant les dictatures, montrons que si f est une dictature linéaire, alors f est une dictature forte, c'est à dire que (D)=(DF) pour les méthodes d'agrégations linéaires.

Nous savons que dans le cadre des préférences cardinales, si f est une dictature associée au votant v_J, $K_J \neq 0 \Longrightarrow f(\pi) = K_J$, il reste à voir que $f(\pi) = 0$ si $K_J = 0$.

Pour cela considérons un profil π dans lequel la matrice des préférences du votant v_J est $K_J \neq 0$ et un deuxième profil π' dans lequel la matrice des préférences du votant v_J est $K'_J = 0$, puis posons $\pi'' = \pi + \pi'$ un troisième profil. Dans $\pi'', K''_J = K_J + K'_J = K_J$.

Puisque $K_J \neq 0$, $f(\pi) = K_J$, de même $f(\pi'') = K''_J = K_J$.

Comme f est linéaire, $K_J = f(\pi'') = f(\pi + \pi') = f(\pi) + f(\pi') = K_J + f(\pi')$, ainsi $f(\pi') = 0$, et f est bien une dictature forte.■

IV.2.7 Le principe d'anonymat (A)

Nous allons montrer le résultat suivant :

<u>Théorème :</u> f vérifie (A) si et seulement si $f(\pi) = \left(\lambda_1\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\theta_1^i, ..., \lambda_{p-1}\sum_{i=1}^{n}\theta_{p-1}^i\right)$.

<u>Preuve :</u>
Dans le sens direct, notons

$\pi = (\theta_1^1, ..., \theta_{p-1}^1, ..., \theta_1^i, ..., \theta_{p-1}^i, ..., \theta_1^j, ..., \theta_{p-1}^j, ..., \theta_1^n, ..., \theta_{p-1}^n)$ et $\pi' = (\theta_1^1, ..., \theta_{p-1}^1, ..., \theta_1^j, ..., \theta_{p-1}^j, ..., \theta_1^i, ..., \theta_{p-1}^i, ..., \theta_1^n, ..., \theta_{p-1}^n)$ le profil obtenu en permutant les notes des votants v_i et v_j.

Puisque f est anonyme, $f(\pi) = f(\pi')$, en particulier la note obtenue par l'alternative a sera la même pour les deux profils après agrégation, c'est à dire que :

$\lambda_a^1\theta_a^1 + \lambda_a^2\theta_a^2 + ... + \lambda_a^i\theta_a^i + ... + \lambda_a^j\theta_a^j + ... + \lambda_a^n\theta_a^n = \lambda_a^1\theta_a^1 + \lambda_a^2\theta_a^2 + ... + \lambda_a^i\theta_a^j + ... + \lambda_a^j\theta_a^i + ... + \lambda_a^n\theta_a^n$

Après simplification on obtient : $\lambda_a^i\theta_a^i + \lambda_a^j\theta_a^j = \lambda_a^j\theta_a^i + \lambda_a^i\theta_a^j \iff (\lambda_a^j - \lambda_a^i)(\theta_a^j - \theta_a^i) = 0$

Cette égalité étant vraie pour n'importe quel profil la seule possibilité est $\lambda_a^j = \lambda_a^i$.

Cette égalité étant vraie pour n'importe quel couple (v_i, v_j) de votants nous obtenons l'égalité de tous les λ_a^i, nous les noterons tous égaux à λ_a, et au final nous obtenons bien $f(\pi) = \left(\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \theta_1^i, ..., \lambda_{p-1} \sum_{i=1}^{n} \theta_{p-1}^i\right)$

Réciproquement si $f(\pi) = \left(\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \theta_1^i, ..., \lambda_{p-1} \sum_{i=1}^{n} \theta_{p-1}^i\right)$, la note agrégée du candidat a est $\theta_a = \lambda_a \sum_{i=1}^{n} \theta_a^i$ sera toujours la même indépendamment de l'ordre dans lequel les θ_a^i seront sommées ce qui fait de f une fonction d'agrégation anonyme.■

IV.3 Quasi-caractérisation de la fonction somme

Dès l'introduction des méthodes d'agrégations cardinales, nous avons pris le parti de considérer uniquement les applications linéaires puisqu'elles possèdent deux avantages non négligeables : elle sont Arrowiennes et elles vérifient le principe d'Universalité (U).

Supposons maintenant que notre méthode d'agrégation linéaire vérifie aussi (I), (N), (A) et (P) ;

- puisque f vérifie (I), $f(\pi) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_1^i\theta_1^i, ..., \sum_{i=1}^{n} \lambda_{p-1}^i\theta_{p-1}^i\right)$
- puisqu'elle vérifie (N) alors pour toute alternative j, $\lambda_j^i = \lambda^i$
- puisqu'elle vérifie (A) alors pour tout votant i, $\lambda_j^i = \lambda_j$,
- au final il existe un unique $\lambda = \lambda_j^i$ pour tout votant i et tout alternative j.

Dans ces conditions nous obtenons : $f(\pi) = \lambda \sum_{i=1}^{n} K_i$.

Cependant f vérifie aussi (P), donc $\lambda \geq 0$.

Or λ ne peut pas être nul car sinon f serait l'application nulle est f ne vérifierait pas (P). Au final $\lambda > 0$

Nous pouvons donc écrire le théorème suivant :

> Théorème :
> Une fonction d'agrégation linéaire f vérifie (I), (N), (A) et (P) si et seulement si il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $f(\pi) = \lambda \sum_{i=1}^{n} K_i$

f est donc la composée d'une dilatation de rapport $\lambda > 0$ et de la fonction somme. Remarquons maintenant deux points importants :

- Premièrement, la matrice des préférences ordinales associée à $f(\pi)$ est la même pour n'importe quelle valeur de λ : $\Phi(f(\pi)) = \Phi(\lambda \sum_{i=1}^{n} K_i)$ ne dépend pas de λ. Autrement dit la valeur de λ n'influence aucunement le classement ordinal final des alternatives.
- Deuxièmement si l'on considère le profil $\pi = (0, ..., 0, K^J, 0..., 0)$ où tous les votants sauf le votant v_J sont indifférents à toutes les alternatives. Dans ces conditions, il est assez raisonnable de penser que $f(\pi) = K_J$ ce qui serait équivalent à dire que $\lambda K_J = K_J \Leftrightarrow \lambda = 1$. En rajoutant cette propriété à f on obtient alors une caractérisation de la fonction somme.

IV.4 Le théorème d'impossibilité d'Arrow en théorie cardinale du choix social

Dans le cadre ordinal de la théorie du choix social, le théorème d'Arrow nous affirme que pour un nombre fini de votants et au moins trois alternatives, il n'existe aucune fonction d'agrégation Arrowienne vérifiant les quatre principes (U),(I),(D),(P).

Dans le cadre cardinal, la fonction somme vérifie (I) et (P) puisque ce sont deux des propriétés qui la caractérisent, elle vérifie aussi (D) puisque la fonction somme n'est pas une dictature, enfin en tant qu'application linéaire, la fonction somme vérifie l'universalité (U) et reste Arrowienne !

Le théorème d'Arrow n'est donc pas valable dans le cadre de la théorie cardinale du choix social, la fonction somme en est un contre-exemple.

V Conclusion

Si les deux théories se ressemblent et traitent du même sujet, le fossé entre la théorie ordinale et la théorie cardinale du choix social est en fait immense puisque le théorème d'impossibilité d'Arrow (épine centrale de la théorie ordinale du choix social) est balayé d'un revers en théorie cardinale du choix social. Comprenons que ce résultat n'est en fait qu'une manifestation du fait que chaque théorie conceptualise de manière diamétralement opposée la notion de préférence.

Dans le cas Ordinal l'investissement demandé aux votants pour établir leurs préférences est plutôt faible, puisqu'ils ont juste à préciser s'ils préfèrent une alternative par rapport à une autre ou s'ils y sont indifférents. La contre partie de cette apparente facilité à voter étant d'une part la multitude des paradoxes inhérents à la théorie que Condorcet et Bordas ont été les premiers à mettre en évidence, et d'autre part le théorème d'impossibilité d'Arrow interdisant à toute méthode d'agrégation ordinale d'être démocratiquement acceptable.

Dans le cas Cardinal, la fonction somme semble démocratiquement très solide puisqu'elle vérifie toutes les propriétés démocratiques que nous avons cité dans cet article, et elle en vérifie bien d'autres encore. Cependant le prix à payer pour le votant est très lourd car il doit être capable non seulement de savoir s'il préfère l'alternative "a" à l'alternative "b" mais surtout il doit pouvoir associer une force à cette préférence, et ce point est clairement plus délicat à traiter. Posons nous la question : "Serions nous capable de fournir notre matrice de préférences cardinales pour les prochaines élections présidentielles ?" J'en suis personnellement incapable. Serait-il alors souhaitable alors de demander à toute une population sa matrice des préférences cardinales pour élire notre prochain Président de la République ? Et quand bien même nous y arriverions un autre problème crucial se poserait alors : nos échelles de notations étant propres à chacun d'entre nous, il serait impossible de sommer nos matrices de préférences cardinales car le résultat n'aurait alors aucun sens.

En conclusion, chacune des deux théories semble avoir ses points forts et ses faiblesses sans qu'aucune des deux ne soit parfaite ! Peut-être faudrait-il trouver un compromis entre les deux théories pour obtenir une théorie du choix social tendant vers un maximum de Démocratie.

VI Bibliographie

- Alancud JCR, Laruelle A (2013) *Dis&approval voting : a characterization*, Social choice and Welfare vol 43 - p 1.
- Alos-Ferre C (2006) *A simple characterization of approval voting*, Social choice and Welfare vol 27 - p 621.
- Arrow K.(1963) *Social choice and individual values.* John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney.
- Brams, S. J. and Fishburn, P. C. (1983) *Approval Voting*, Boston, Birkhauser.

— Duncan, O. D. (1984), *Notes on Social Measurement : Historical and critical*, New York, Russell Sage Foundation.
— Hillinger, C. (2004) *Voting and the cardinal Agregation of judgements*. on line at http ://epub.ub.uni-muenchen.de/353/
— Smith, W. D. (2000), Range voting.