Écriture binaire des entiers naturels par la monnaie

Dans un premier temps, a été essayée la version «pièces de monnaie» des £eibits. Elle présente des avantages et des inconvénients par rapport à la version «billets de banque».

Une fois l'impression 3D des pièces réalisée, on se retrouve avec ces pièces :

Il s'agit des pièces de 32 £eibits, de 16 £eibits, de 8 £eibits, de 4 £eibits, de 2 £eibits et d'1 £eibit[1].

La question est de savoir comment, par exemple, on peut représenter 25 en binaire. Autrement dit, comment constituer 25 £eibits avec ces pièces ?

L'énoncé (abordable dès le CP) est le suivant :

> Je dispose de ces pièces de monnaie (un seul exemplaire de chaque). Je voudrais m'en servir pour acheter un objet valant 25 £eibits. Le commerçant ne rend pas la monnaie. Comment faire l'appoint ?

L'exercice (ou plutôt, le jeu) est accessible dès le CP, sans avoir à citer explicitement le binaire. La solution vient[2] en général assez vite :

En effet 16+8+1=25. Et il n'y a pas d'autre[3] manière de faire 25 £eibits avec ces pièces, que les trois pièces ci-dessus.

---

1 Le nom de l'unité (fictive évidemment) monétaire a été choisi pour rendre hommage à Leibniz et en même temps pour suggérer qu'il s'agit d'une monnaie (par le £ à la place du L) et qu'on est en binaire (avec la fin « bit »)

2 L'algorithme utilisé s'appelle «algorithme glouton» : On commence par constater que 32 font plus que 25 (on n'a donc pas besoin de la pièce de 32) et on commence par prendre la plus grande pièce (d'où le nom de « glouton ») qui rentre dans 25 ; c'est 16 £eibits. Puis on recommence avec les 25-16=9 £eibits restants.

3 On s'en convainc par la manipulation des pièces, la preuve de cette unicité de l'écriture pouvant se faire plus tard (par exemple par d'autres activités sur le binaire) en institutionnalisant par la trace écrite la raisonnement. L'activité est donc une bonne illustration du triptyque manipulation → verbalisation → abstraction de la « méthode Singapour ».

Et où est la représentation binaire de 25 là-dedans ?

Si on dispose à nouveau toutes les pièces dans l'ordre décroissant de valeur, mais en retournant celles qui n'ont pas été utilisées dans le jeu, on obtient ceci :

En regardant d'un peu loin, on peut voir ceci :

C'est la représentation binaire de 25 si on code le blanc par la valeur 1 et le gris par la valeur 0 :

011001

Pour obtenir cet effet on a gardé le substrat après impression 3D : Ce substrat est gris et se distingue bien, par la couleur, du côté pile de la pièce.

Les avantages des pièces sur les billets sont donc ceux-ci :

- facilité à distinguer par la couleur les 1 des 0
- implication plus grande de l'enfant lorsqu'il s'agit de manipuler des objets 3D
- activité accessible aux aveugles qui peuvent lire les valeurs monétaires par le toucher

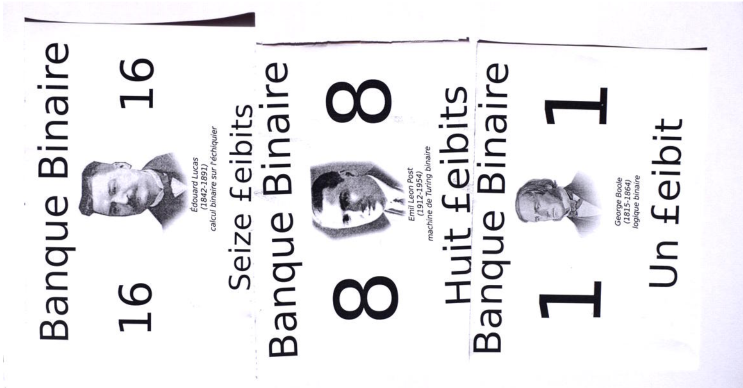
Les avantages des billets sur les pièces sont les suivants :

- impression plus rapide en 2D qu'en 3D
- coût presque nul[4]
- sensation de plus grande valeur monétaire colportée par les billets[5]
- apport culturel plus grand en ajoutant, par les visages représentés, des éléments biographiques
- plus grande facilité à vidéoprojeter les billets que les pièces
- intégration plus aisée dans les livres et polycopiés
- libération de l'espace « pièces » pour les valeurs inférieures au £eibit (représentation binaire des nombres non entiers)

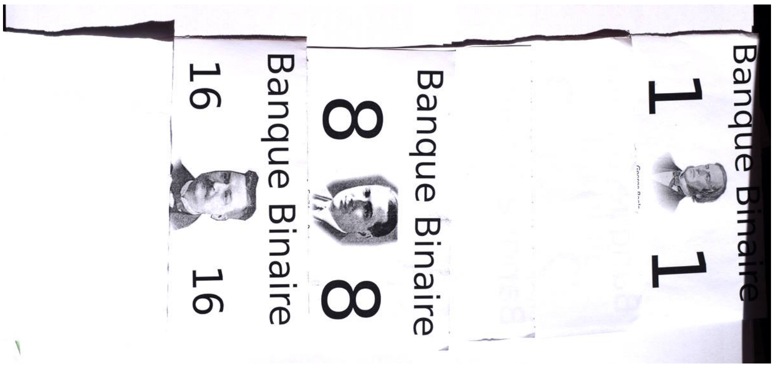
4 Paradoxe : fabriquer des fausses pièces revient plus cher que les valeurs monétaires affichées. Typiquement pour fabriquer un objet qui ressemble à une pièce d'un centime, en prototypage cela revient à pas loin d'un euro soit beaucoup plus que si on avait pris une pièce d'un centime !

5 Les enfants ont l'habitude de jouer à des transactions commerciales avec des jeux comme Monopoly© où les billets sont associés à l'idée de richesse.

Pour représenter 25 £eibits avec des billets, on fait ceci :



Pour trouver, à partir de 16+8+1=25, l'écriture binaire de 25, il faut savoir où placer les 0. Pour cela, on peut ajouter, mais en les retournant, les billets non utilisés dans cette représentation binaire. On obtient ceci (dans l'ordre décroissant des valeurs) :



En mettant un zéro pour chaque billet retourné et un 1 pour chaque billet utilisé, on obtient la représentation binaire de 25 sous la forme 011001 ; mais pour cela il faut voir que entre 8 et 1 il y a 2 billets retournés (4 et 2) ce qui ne saute pas aux yeux.

Une solution à ce problème pourrait être de peindre en noir le verso de chaque billet mais cela augmenterait le coût de fabrication des billets. En attendant, on peut imaginer d'autres activités que la simple représentation binaire des entiers :

- calcul d'une somme à partir des billets (dès le CP, on peut donner à un enfant des billets au hasard puis lui demander combien de £eibits il y a en tout)
- addition binaire avec deux liasses de billets (on représente chaque terme, on regroupe les billets retenus puis on effectue des groupements-échanges pour simplifier la somme)
- Soustraction avec des problèmes de rendu de monnaie (je veux acheter un objet à 25 £eibits, je n'ai qu'un billet de 32 £eibits sur moi, comment le commerçant va-t-il me rendre la monnaie ?)
- comparaison des entiers écrits en binaire (on donne à chaque enfant quelques billets extraits d'une liasse ; qui est le plus riche des deux enfants?)

Et puis, comme évoqué, si les billets sont utilisés pour représenter des nombres entiers en £eibits, les pièces deviennent disponibles pour représenter des nombres inférieurs au £eibit, en bref, des nombres non entiers. Mais ceci est une autre histoire...