ÉPREUVE D'INFORMATIQUE

(Sujet commun ENS : ULM et LYON)

Groupes C/S et M et I

DURÉE : 4 heures

Important

Les différentes parties du problème sont largement indépendantes. Il est *important* de commencer par lire très attentivement le préambule avant d'aborder le problème lui-même.

Il sera tout particulièrement tenu compte de la clarté et de la précision des réponses fournies par le candidat.

Préambule

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés des réseaux de Petri qui sont des outils fondamentaux pour la modélisation et la simulation des systèmes. Formellement un *réseau de Petri* est la donnée d'un quadruplet $\mathcal{P} = (P, T, Pre, Post)$ où

- P est un ensemble fini dont les éléments sont appelés les *places*;
- T est un ensemble fini dont les éléments sont appelés les *transitions*;
- Pre est une application de T dans $\mathcal{P}(P)$ qui associe à chaque transition $t \in T$ un ensemble (fini) $Pre(t)$ de places;
- $Post$ est une application de T dans $\mathcal{P}(P)$ qui associe à chaque transition $t \in T$ un ensemble (fini) $Post(t)$ de places.

Un marquage d'un tel réseau de Petri est une application M de P dans $\mathbb{N}$ qui associe à chaque place $p \in P$ un entier $M(p)$ appelé le nombre de *jetons* de la place p. Un réseau de Petri *marqué* est la donnée d'un réseau de Petri $\mathcal{P}$ et d'un marquage M_0 de ce réseau appelé *marquage initial*. On représente graphiquement un réseau de Petri marqué sous la forme suivante :

- les places de $\mathcal{P}$ sont représentées par des cercles;
- les transitions de $\mathcal{P}$ sont représentées par des rectangles;
- on trace une flèche allant de la place $p \in P$ vers la transition $t \in T$ lorsque $p \in Pre(t)$;
- on trace une flèche allant de la transition $t \in T$ vers la place $p \in P$ lorsque $p \in Post(t)$;
- on place à l'intérieur du cercle associé à la place p un nombre $M(p)$ de jetons représentés par des points gras (i.e. des $\bullet$).

Pour se fixer les idées, considérons le réseau de Petri $\mathcal{P}_1 = (P, T, Pre, Post)$ muni du marquage initial M que l'on définit en posant

- $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$,
- $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$,
- $Pre(t_1) = \{p_1, p_3, p_4\}$, $Pre(t_2) = \{p_2\}$, $Pre(t_3) = \{p_3, p_6\}$, $Pre(t_4) = \{p_4, p_5\}$,
- $Post(t_1) = \{p_2, p_4\}$, $Post(t_2) = \{p_1, p_3\}$, $Post(t_3) = \{p_5\}$, $Post(t_4) = \{p_3, p_4, p_6\}$,
- $M(p_1) = 1$, $M(p_2) = 0$, $M(p_3) = 1$, $M(p_4) = 1$, $M(p_5) = 0$, $M(p_6) = 1$.

Un tel réseau de Petri marqué se représente donc sous la forme graphique qui suit.

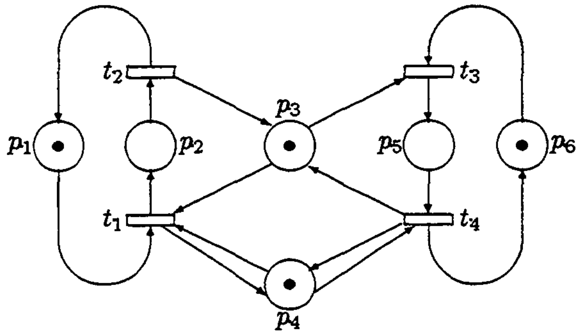

Figure 1 – Le réseau de Petri marqué $(\mathcal{P}_1, M)$.

La définition précédente n'est cependant pas complète. Un réseau de Petri est en effet un objet dynamique car son marquage peut évoluer selon des règles (dites de franchissement) que nous allons maintenant préciser.

Une transition t sera dite *habilitée* si chaque place précédant t (i.e. chaque place de $Pre(t)$) contient au moins un jeton. Quand une transition est habilitée, on peut décider de la *franchir*. Dans ce cas, la transition qu'on franchit se met à consommer et à émettre des jetons en suivant la règle suivante : un jeton est ôté de chacune des places de $Pre(t)$ et on met ensuite un jeton dans chacune des places de $Post(t)$. Formellement le marquage M du réseau est donc transformé en un nouveau marquage M' qui est donné par

$$\begin{cases} M'(q) = M(q) - 1 & \text{pour tout } q \in Pre(t) - Pos(t) \ , \\ M'(q) = M(q) + 1 & \text{pour tout } q \in Post(t) - Pre(t) \ , \\ M'(q) = M(q) & \text{sinon} \ . \end{cases} \quad (1)$$

On représente une telle transformation en utilisant la notation

$$M \xrightarrow{t} M'$$

qui signifie donc que le marquage M du réseau de Petri avec lequel on travaille s'est transformé en le marquage M' après franchissement de la transition t.

Dans le réseau de Petri marqué donné par la figure 1, les transitions habilitées sont les transitions t_1 et t_3. On peut par exemple faire évoluer le marquage de $\mathcal{P}_1$ en franchissant la transition t_1. Dans ce cas, cela revient à supprimer les jetons qui se trouvaient dans p_1, p_3 et p_4, puis à placer un nouveau jeton dans p_2 et p_4. Le marquage initial M se transforme alors en un marquage M' qui va donc être donné par

$$M'(p_1) = 0,\ M'(p_2) = 1,\ M'(p_3) = 0 \ ,$$
$$M'(p_4) = 1,\ M'(p_5) = 0,\ M'(p_6) = 1 \ .$$

Le nouveau réseau de Petri marqué que l'on obtient alors est donné ci-après.

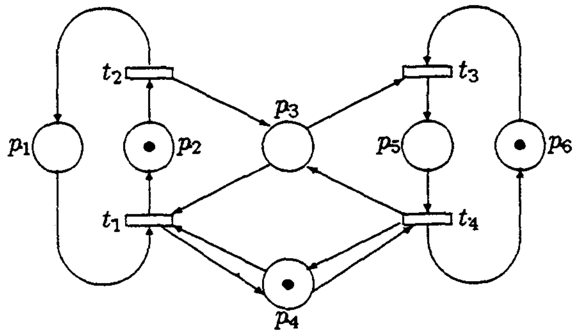

Figure 2 – Le réseau de Petri marqué $(\mathcal{P}_1, M')$.

On dira qu'un marquage M' d'un réseau de Petri donné est *accessible* à partir d'un autre marquage M du même réseau de Petri s'il existe une suite de transitions dont le franchissement successif permet de passer du marquage M au marquage M'.

Partie I : Modélisation par réseaux de Petri

Les réseaux de Petri sont des outils de modélisation. Il est malheureusement difficile de donner une définition mathématique de ce dernier concept. On dira cependant que le fonctionnement d'un système réel (atelier de production, réseau informatique, file d'attente, etc) est modélisé par un réseau de Petri si la dynamique de ce dernier rend bien compte des contraintes de fonctionnement du système qu'il est censé modéliser.

Pour illustrer notre propos, considérons un atelier où l'on produit deux types d'objets dont la fabrication nécessite d'utiliser la même machine. Les spécificités de cet atelier sont les suivantes :

- la fabrication d'un objet du premier type se fait en deux étapes successives T_1 et T_2;
- la fabrication d'un objet du second type se fait en deux étapes successives T_3 et T_4;
- la machine sert à effectuer les étapes T_1 et T_4, mais elle ne peut bien entendu pas participer à la production de deux objets en même temps;
- un ingénieur contrôle la production en choisissant le type d'objet à produire; il ne peut lancer une nouvelle production que lorque la production d'un objet vient de se terminer.

On peut en fait modéliser le fonctionnement de cet atelier par le réseau de Petri de la figure 1. La présence d'un jeton en p_1 (resp. p_2, p_5 ou p_6) signifie que la tâche T_1 (resp. T_2, T_4 ou T_3) est prête à être exécutée. La présence d'un jeton en p_3 signifie quant à elle que l'ingénieur a la possibilité de lancer une nouvelle production. La présence d'un jeton en p_4 signifie enfin que la machine est prête à être utilisée.

La dynamique du réseau marqué donné par la figure 1 rend alors compte du fonctionnement de notre atelier. Le marquage initial donné par cette figure signifie simplement que l'ingénieur peut lancer une production, que la machine est prête à être utilisée et que les étapes T_1 et T_3 sont aussi prêtes à être effectuées. Pour démarrer la production, il faut que l'ingénieur choisisse le type d'objet à produire, ce qui va se traduire par le franchissement de la transition t_1 ou

t_3. S'il choisit de fabriquer des objets du premier type, la situation à laquelle on aboutit est représentée par le marquage décrit par la figure 2. Dans ce cas, la seule transition habilitée est t_2 ce qui signifie exactement qu'on est en train de produire un objet du premier type et qu'il faut terminer cette production (en terminant l'étape T_2) avant de lancer une nouvelle production. Dès que cette transition sera franchie, on repassera dans l'état de l'atelier décrit par la figure 1 où l'on pourra donc lancer une nouvelle production.

Question 1

On considère un atelier de production où l'on fabrique un produit P en quatre étapes de la manière suivante :

- on commence la fabrication du produit par l'étape 1;
- une fois l'étape 1 terminée, on peut lancer de manière indépendante les étapes 2 et 3;
- l'étape 4 (qui termine la fabrication de notre produit) ne peut démarrer que quand les étapes 2 et 3 ont été terminées toutes les deux.

Une fois l'étape 4 terminée, on revient à l'étape initiale (1) pour recommencer un nouveau cycle de production. Dessinez un réseau de Petri marqué dont la dynamique rend compte des contraintes de fonctionnement d'un tel atelier. Dessinez les marquages qu'on peut atteindre par franchissements successifs de transitions à partir du marquage initial d'un tel réseau de Petri.

Question 2

–On considère un atelier formé de 3 machines M_1, M_2 et M_3 qui fabriquent trois produits P_1, P_2 et P_3. On suppose que

- pour fabriquer le produit P_1, il est nécessaire de se servir de la machine M_2, puis de la machine M_3 ;
- pour fabriquer le produit P_2, il est nécessaire de se servir de la machine M_1, puis de la machine M_2 et enfin de la machine M_3 ;
- pour fabriquer le produit P_3, il est nécessaire de se servir de la machine M_1, puis de la machine M_2 .

On notera que l'ordre d'utilisation des machines pour fabriquer un produit donné est imposé. On impose de même l'ordre de passage des produits sur une machine donnée :

- la machine M_1 ne peut fonctionner qu'en commençant par fabriquer le produit P_2, puis le produit P_3 ;
- la machine M_2 ne peut fonctionner qu'en commençant par fabriquer le produit P_1, puis le produit P_2 et enfin le produit P_3 ;
- la machine M_3 ne peut fonctionner qu'en commençant par fabriquer le produit P_1, puis le produit P_2 .

Dessinez un réseau de Petri marqué dont la dynamique rend compte des contraintes de fonctionnement de l'atelier que l'on vient de décrire.

Partie II : Systèmes d'addition de vecteurs et réseaux de Petri

Graphes

Un graphe orienté G est la donnée d'un ensemble non nécessairement fini S de sommets et d'une famille A d'arcs. Chaque arc a de A possède une extrémité initiale $i(a) \in S$ et une extrémité finale $t(a) \in S$. On notera bien qu'il est tout à fait possible de disposer de plusieurs arcs entre deux sommets d'un graphe. On appelle *chemin* de longueur $n \geq 0$ dans G toute suite

$$\pi = a_1,\ a_2,\ \dots\ ,\ a_n$$

de n arcs tels que l'extrémité finale de l'arc a_i soit l'extrémité initiale de l'arc a_{i+1} pour tout $i \in [1, n-1]$. On dit alors que le sommet $i(a_1)$ est l'extrémité initiale du chemin π et que le sommet $t(a_n)$ est son extrémité terminale ou que le chemin π va de $i(a_1)$ à $t(a_n)$.

On représente classiquement un graphe sous la forme d'un graphique où les sommets sont représentés par des cercles et où chaque arc est représenté par une flèche qui relie les cercles associés à ses deux extrémités. On trouvera ci-dessous un exemple de représentation graphique d'un graphe (les étiquettes sont les noms des arcs).

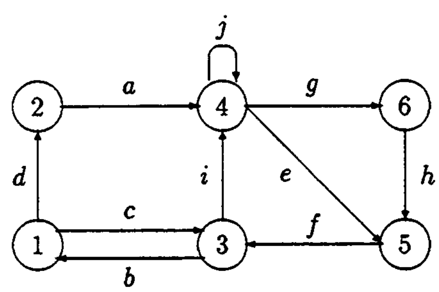

Figure 3 – La représentation graphique d'un graphe.

La suite d, a, j, e, f, i, e est un exemple de chemin de longueur 7 de ce graphe.

Arbres

Rappelons maintenant qu'un *arbre* est la donnée d'un graphe orienté $\mathcal{A} = (S, A)$ (où S est un ensemble non nécessairement fini) et d'un sommet $r \in S$ distingué (appelé la *racine* de l'arbre $\mathcal{A}$) tel que les propriétés suivantes soient vérifiées :

1. il n'y a pas d'arc ayant la racine comme extrémité finale;
2. chaque sommet distinct de la racine est l'extrémité finale d'un arc et d'un seul;
3. pour tout sommet s de S, il existe un chemin dans $\mathcal{A}$ qui va de la racine à s.

Les *fils* d'un sommet s d'un arbre $\mathcal{A}$ sont les sommets t de $\mathcal{A}$ qui sont les extrémités terminales des arcs issus de s.

Question 3

On dit qu'un arbre $\mathcal{A}$ possède un chemin infini s'il existe une suite infinie $(s_n)_{n \geq 0}$ de sommets de S telle qu'il existe un arc de l'arbre d'extrémité initiale s_n et d'extrémité finale s_{n+1} pour tout entier $n \geq 0$. Un arbre est également dit *localement fini* si chaque sommet n'a qu'un nombre fini de fils.

Montrez alors que tout arbre localement fini possède nécessairement un chemin constitué d'un nombre infini de sommets distincts.

Question 4

On pose $\mathcal{Z} = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ et on étend l'ordre usuel $\leq$ de $\mathbb{Z}$ à $\mathcal{Z}$ en posant $n \leq +\infty$ pour tout $n \in \mathcal{Z}$. On appelle alors *ordre naturel* sur $\mathcal{Z}^n$ l'ordre noté $\preceq$ qui est défini composante par composante, i.e. l'ordre défini par

$$(x_1, \ldots, x_n) \preceq (y_1, \ldots, y_n) \iff \forall\, i \in [1, n],\ x_i \leq y_i\,. \tag{2}$$

On désigne par $\mathcal{N}$ le sous-ensemble de $\mathcal{Z}$ défini par $\mathcal{N} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Montrez qu'on peut toujours extraire une suite croissante au sens large (pour l'ordre naturel) de toute suite infinie d'éléments de $\mathcal{N}^n$.

Question 5

Un *système d'addition de vecteurs avec états* est la donnée d'un graphe orienté (S, A) à nombre fini de sommets et d'une application v de A dans $\mathbb{Z}^m$. La représentation graphique d'un tel objet consiste simplement à prendre celle du graphe orienté sous-jacent (S, A) et à indiquer sur chaque arc $a \in A$ sa valeur $v(a)$ comme dans l'exemple donné ci-dessous.

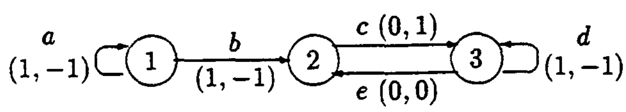

Figure 4 – Un système d'addition de vecteurs avec états.

Une *configuration* d'un tel système d'addition de vecteurs avec états $\mathcal{S} = (S, A, v)$ est la donnée d'un couple (q, x) où q est un sommet de S et où x est un vecteur de $\mathbb{N}^m$. On dit qu'une configuration (q_y, y) est *accessible* à partir d'une configuration (q_x, x) si et seulement si on peut trouver un chemin $a_1, \ldots, a_n$ dans (S, A) qui va de q_x à q_y et tel que l'on ait d'une part

$$y = x + v(a_1) + v(a_2) + \ldots + v(a_n)$$

et d'autre part

$$v(a_1) + v(a_2) + \ldots + v(a_i) \in \mathbb{N}^m$$

pour tout i compris entre 1 et n.

Montrez qu'on peut associer à chaque réseau de Petri $\mathcal{P}$ un système d'addition de vecteurs avec états $\mathcal{S} = (S, A, v)$ de manière à ce que :

- à chaque marquage M de $\mathcal{P}$ correspond bijectivement une configuration $(q, x(M))$ de $\mathcal{S}$ où q est un sommet fixé dans S;
- M' est un marquage de $\mathcal{P}$ accessible à partir du marquage M si et seulement la configuration $(q, x(M'))$ de $\mathcal{S}$ est accessible à partir de la configuration $(q, x(M))$.

Question 6

On considère à nouveau $\mathcal{Z} = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ et on étend l'addition de $\mathbb{Z}$ à $\mathcal{Z}$ en posant $n + (+\infty) = +\infty$ pour tout $n \in \mathcal{Z}$. On appellera alors *configuration généralisée* d'un système d'addition de vecteurs avec états (S, A, v) où v est une application de A dans $\mathbb{Z}^m$ tout couple de la forme (q, x) où q est un sommet de S et où x est un vecteur de $\mathcal{N}^m$.

Donnons nous maintenant (S, A, v) un système d'addition de vecteurs avec états dont on fixera une configuration (q, x) que l'on appellera *configuration initiale.* L'*arbre de Karp et Miller* associé à un tel objet est alors un arbre dont chaque sommet (resp. arc) est étiqueté par une configuration généralisée (resp. un arc) du système d'addition de vecteurs avec états associé. On construit récursivement cet arbre $\mathcal{K}$ à l'aide des règles suivantes :

1. la racine de $\mathcal{K}$ est étiquetée par la configuration initiale (q_0, x) du système d'addition de vecteurs avec états considéré;
2. pour tout sommet $\sigma = (q, y)$ déjà construit de $\mathcal{K}$, les propriétés suivantes sont vérifiées :
   (a) si l'étiquette de σ est identique à l'étiquette d'un ancêtre de σ (i.e. d'un sommet à partir duquel on peut atteindre σ par un chemin dans $\mathcal{K}$), σ n'a pas de fils;
   (b) si l'étiquette de σ n'est égale à aucune étiquette d'un ancêtre de σ dans $\mathcal{K}$, σ possède un fils $\sigma(a)$ pour chaque arc $a \in A$ d'extrémité initiale q tel que $y + v(a) \geq 0$. L'arc qui joint σ à $\sigma(a)$ dans $\mathcal{K}$ est étiqueté par a et $\sigma(a)$ est étiqueté par la configuration généralisée $(p, (z_1, \ldots, z_m))$ où p est l'extrémité terminale de a et où chaque coordonnée z_i est définie de la manière suivante :
      i. s'il existe dans $\mathcal{K}$ un ancêtre de $\sigma(a)$ dont l'étiquette est (p, z') avec $z' \preceq y + v(a)$ et $z'_i < (y + v(a))_i$, alors $z_i = +\infty$;
      ii. si la situation précédente n'est pas vérifiée, alors z_i est la i-ième composante $(y + v(a))_i$ du vecteur $y + v(a)$.

a) Construisez l'arbre de Karp et Miller associé au système d'addition de vecteurs avec états donné par la figure 4 muni de la configuration initiale $(1, (1, 1))$.

b) Montrez que l'arbre de Karp et Miller associé à un système d'addition de vecteurs avec états muni d'une configuration initiale est toujours fini.

Partie III : Automates à multiplicités

Semi-anneaux

Un *semi-anneau* est un ensemble K muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ (l'addition et le produit) qui vérifient les propriétés suivantes :

- la loi $+$ est associative, commutative et possède un élément neutre noté 0_K;
- la loi $\times$ est associative et possède un élément neutre noté 1_K;
- la loi $\times$ est distributive à droite et à gauche par rapport à la loi $+$;
- l'élément 0_K est absorbant pour $\times$, i.e. $k \times 0_K = 0_K \times k = 0_K$ pour tout élément $k \in K$.

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels muni des opérations usuelles d'addition et de produit est un exemple typique de semi-anneau à produit commutatif.

Lorsque K est un semi-anneau, on peut considérer l'ensemble $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K. On définit alors l'addition et le produit de deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(K)$ en reprenant les formules ordinaires, i.e. en posant

$$\begin{cases} (M+N)_{i,j} & = & M_{i,j} + N_{i,j} \ , \\ (M\,N)_{i,j} & = & \sum_{k=1}^{n} M_{i,k}\, N_{k,j} \end{cases}$$

pour tout $i, j \in [1, n]$ et pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(K)$. On admettra que l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et à coefficients dans K muni de cette addition et de ce produit forme un semi-anneau.

Séries formelles

Soit A un alphabet et soit K un semi-anneau. Une *série formelle* sur A et à coefficients dans K est simplement une application S de l'ensemble A^* des mots sur A dans K. On désignera par $K << A >>$ l'ensemble de ces séries formelles. L'image dans K d'un mot $w \in A^*$ par la série S sera systématiquement notée $(S|w)$ dans la suite. On représente classiquement une série formelle générique S sous la forme sommatoire suivante

$$S = \sum_{w \in A^*} (S|w)\, w \ .$$

Lorsque les coefficients $(S|w)$ sont explicitement donnés, on ne fait apparaitre dans la représentation précédente que les termes non nuls (i.e. distincts de 0_K). On peut considérer à titre d'exemple, la série formelle S de $\mathbb{N} << a, b >>$ donnée par

$$S = \sum_{i,j,k=0}^{+\infty} 2^{i+j+k}\, a^i\, b^j\, a^k \ .$$

Cette série n'est donc qu'une représentation de l'application S définie par

$$(S|w) = \begin{cases} 2^{i+j+k} & \text{si } w = a^i\, b^j\, a^k, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout mot w de $\{a, b\}^*$.

On peut munir l'ensemble $K << A >>$ des séries formelles d'une structure de semi-anneau en définissant la somme $S + T$ de deux séries formelles S et T par l'identité

$$S + T = \sum_{w \in A^*} \Big((S|w) + (T|w) \Big)\, w$$

et le produit $S\,T$ de deux séries formelles S et T par

$$S\,T = \sum_{w \in A^*} \Big(\sum_{uv=w} (S|u) \times (T|v) \Big)\, w.$$

On admettra que $K << A >>$ muni de la somme et du produit ainsi défini est bien un semi-anneau. On peut définir de même la multiplication $k\,S$ d'une série formelle S de $K << A >>$ par une constante $k \in K$ qui est la série formelle définie par

$$k\,S = \sum_{w \in A^*} \Big(k\,(S|w) \Big)\, w\,.$$

Automates à multiplicités

On se donne un semi-anneau K dont les opérations d'addition et de produit sont respectivement notées $+$ et $\times$ et dont les éléments neutres correspondants sont notés 0_K et 1_K. Un *K-automate* (ou *automate à multiplicités dans K*) d'ordre n sur l'alphabet A est alors la donnée d'un triplet (I, M, T) défini de la manière suivante :

- I est un vecteur de K^n, appelé vecteur *initial*, qu'on identifiera à une matrice ligne de taille $1 \times n$;
- M est un famille $M = (M_a)_{a \in A}$ de matrices carrées d'ordre n de $\mathcal{M}_n(K)$, appelées matrices de *transition*;
- T est un vecteur de K^n, appelé vecteur *terminal*, qu'on identifiera à une matrice colonne de taille $n \times 1$.

On représente un tel K-automate sous la forme d'un graphe $\mathcal{G}_A$ à n sommets dont les arcs sont étiquetés par des lettres de l'alphabet A pondérées par des scalaires de K [1] et qui est défini de la manière suivante :

- les n sommets de $\mathcal{G}_A$ sont identifiés aux n entiers de l'intervalle $[1, n]$;
- on relie le sommet i au sommet j par un arc étiqueté par une lettre $a \in A$ si et seulement si $(M_a)_{i,j} \neq 0_K$ auquel cas on pondère l'arc en question par le scalaire $(M_a)_{i,j}$ de K (appelé *multiplicité* de l'arc sous-jacent);
- pour tout $i \in [1, n]$, on dessine une flèche indexée par I_i qui pointe vers i lorsque $I_i \neq 0_K$;
- pour tout $i \in [1, n]$, on dessine une flèche indexée par T_i qui est issue de i lorsque $T_i \neq 0_K$.

La représentation graphique typique d'une paire de sommets d'un K-automate selon le principe que nous venons de présenter est donnée ci-dessous. [2]

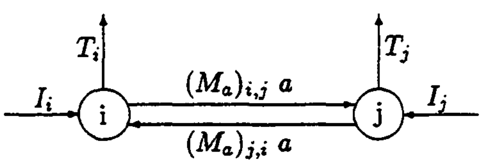

Figure 5 – Etiquettes des flèches d'un K-automate.

Pour se fixer les idées, prenons $K = (\mathbb{N}, +, \times)$. On considère alors le $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{A}_2 = (I, (M_a, M_b), T)$ d'ordre 2 sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ qui est défini en posant

[1] Formellement les arcs sont donc étiquetés par des couples de $K \times A$.

[2] Nous n'avons représenté sur ce graphique qu'une seule flèche entre les sommets i et j qui est indexée par une lettre a. Il y a bien entendu génériquement autant de flèches de même nature que de lettres de l'alphabet A.

- $I = (1, 0)$,
- $M_a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M_b = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,
- $T = (0, 5)$.

Celui-ci se représente alors graphiquement de la manière suivante.

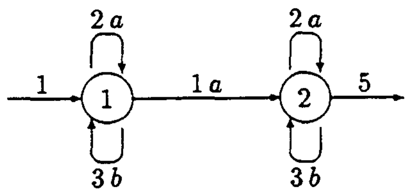

Figure 6 – Le $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{A}_2$.

Si $\mathcal{A} = (I, M, T)$ est un K-automate, on associe à chaque mot $w = a_1 \ldots a_k$ de A^* l'élément

$$(\mathcal{A}|w) = I\, M_{a_1} \ldots M_{a_k} T$$

de K appelé *comportement* de $\mathcal{A}$ sur le mot w (avec la convention que le produit $M_{a_1} \ldots M_{a_k}$ qui intervient dans la formule précédente vaut l'identité lorsque l'indice k est nul). On associe par ce biais à tout automate $\mathcal{A}$ la série formelle $S_{\mathcal{A}}$ de $K \ll A \gg$ définie par

$$S_{\mathcal{A}} = \sum_{w \in A^*} (\mathcal{A}|w)\, w\ .$$

On dit alors que $S_{\mathcal{A}}$ est la série *reconnue* par l'automate $\mathcal{A}$. Une série formelle S de $K \ll A \gg$ est *K-reconnaissable* s'il existe un K-automate qui la reconnait, i.e. s'il existe un K-automate $\mathcal{A}$ tel que $S = S_{\mathcal{A}}$.

Question 7

On reprend l'exemple de la figure 6. Vérifiez que la série formelle $S_{\mathcal{A}_2}$ reconnue par le $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{A}_2$ est égale à

$$S_{\mathcal{A}_2} = \sum_{w \in \{a,b\}^*} 5\, |w|_a\, 2^{|w|_a - 1}\, 3^{|w|_b}\, w$$

où $|w|_a$ et $|w|_b$ représentent respectivement le nombre d'occurences de a et de b dans un mot w.

Question 8

Quel semi-anneau faut-il prendre pour rendre compte de la théorie classique des automates dans le cadre du formalisme des automates à multiplicités ?

Question 9

On considère l'ensemble $\mathcal{M} = \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. On munit $\mathcal{M}$ des opérations d'addition et de produit notées respectivement $\oplus$ et $\otimes$ qui sont définies par :

$$\begin{cases} x \oplus y &= \max(x, y) , \\ x \otimes y &= x + y \end{cases}$$

pour tout $x, y \in \mathcal{M}$ (le symbole $+$ désigne ici l'addition usuelle des entiers naturels étendue à $\mathcal{M}$ en posant $x + (-\infty) = -\infty$ pour tout $x \in \mathcal{M}$; on étend de même l'ordre naturel de $\mathbb{N}$ à $\mathcal{M}$ en posant $-\infty \leq x$ pour tout $x \in \mathcal{M}$). On admettra que $(\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$ est un semi-anneau dont les éléments neutres sont $0_{\mathcal{M}} = -\infty$ et $1_{\mathcal{M}} = 0$.

a) Donnez une interprétation simple du comportement d'un $\mathcal{M}$-automate sur un mot donné.

b) On considère le $\mathcal{M}$-automate défini par le graphe donné ci-dessous.

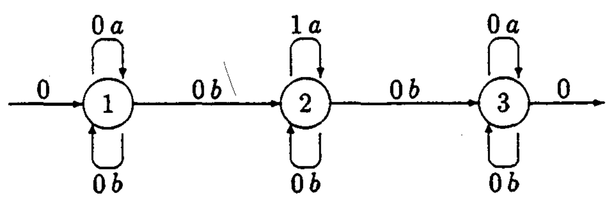

Figure 7 – Un $\mathcal{M}$-automate.

Donnez une expression explicite de la série formelle reconnue par ce $\mathcal{M}$-automate.

N.B. Les multiplicités des arcs de l'automate précédent sont les entiers 0 et 1 qu'il ne faut pas confondre avec les éléments neutres $0_{\mathcal{M}}$ et $1_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$.

Question 10

On introduit une nouvelle opération sur les séries formelles de $K \ll A \gg$ appelée *étoile* et notée $*$. Cette opération est restreinte aux séries propres de $K \ll A \gg$, i.e. aux séries S de $K \ll A \gg$ dont le coefficient constant $(S|\lambda)$ (où λ désigne ici le mot vide de A^*) vaut 0_K. Si S est une telle série, on définit alors S^* en posant

$$S^* = \sum_{w \in A^*} \Big(\sum_{\substack{u_1 \dots u_n = w \\ n \geq 0,\, u_i \in A^*}} (S|u_1) \dots (S|u_n) \Big) w$$

où la somme qui intervient dans cette définition est prise sur toutes les décompositions de w en produit de n mots u_i (ceux-ci pouvant être vides). Montrez qu'on peut définir S^* de manière équivalente en posant

$$S^* = \sum_{n=0}^{+\infty} S^n$$

lorsque S est une série propre (on montrera qu'on peut bien donner un sens à la somme infinie qui apparaît dans cette dernière identité).

Question 11

Une série est dite *K-rationnelle* si on peut l'obtenir à partir des lettres de A en n'utilisant que les opérations d'addition, de multiplication, de multiplication par un scalaire de K et d'étoile restreinte aux séries propres.

a) Montrez que la série reconnue par le $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{A}_2$ de la figure 6 est $\mathbb{N}$-rationnelle.

b) Montrez que la série reconnue par le $\mathcal{M}$-automate de la figure 7 est $\mathcal{M}$-rationnelle.

Question 12

Montrez que toute série K-rationnelle est K-reconnaissable.

Indication : on pourra adapter une preuve classique du fait qu'un langage rationnel est toujours reconnu par un automate fini. On précisera systématiquement l'interprétation graphique des différentes constructions que l'on pourra être amené à faire.

Question 13

Soit $S_{\mathcal{A}}$ la série formelle reconnue par le K-automate $\mathcal{A} = (I, M, T)$. Montrez alors que l'on peut toujours écrire

$$S_{\mathcal{A}} = I\,(M_{\mathcal{A}})^{*}\,T$$

où $M_{\mathcal{A}}$ est une série formelle à coefficients matriciels que l'on précisera. En déduire que toute série K-reconnaissable est K-rationnelle.

Indication : on pourra faire une récurrence sur l'ordre de l'automate.

Partie IV : Jeux de Tetris

Un *jeu de Tetris* est la donnée d'un quintuplet $\mathcal{T} = (P, E, \mathcal{E}, h, b)$ où

- P est un ensemble fini dont les éléments sont appelés des *pièces*;
- E est un ensemble fini dont les éléments sont appelés des *emplacements*;
- $\mathcal{E}$ est une application de P dans l'ensemble des parties non vides de E qui associe à chaque pièce $p \in P$ l'ensemble $\mathcal{E}(p)$ des emplacements qu'elle occupe;
- h est une application de $P \times E$ dans $\mathcal{M}$ qui associe à chaque pièce p et à chaque emplacement s la valeur $h(p, s)$ du *contour haut* de la pièce p sur le emplacement s; cette valeur est égale à $-\infty$ si et seulement si $s \notin \mathcal{E}(p)$;
- b est une application de $P \times E$ dans $\mathcal{M}$ qui associe à chaque pièce p et à chaque emplacement s la valeur $b(p, s) \leq h(p, s)$ du *contour bas* de la pièce p sur le emplacement s; cette valeur est égale à $-\infty$ si et seulement si $s \notin \mathcal{E}(p)$; on suppose également par convention que

$$\min_{s \in \mathcal{E}(p)} b(p, s) = 0$$

pour toute pièce p de P.

Nous allons maintenant préciser la représentation intuitive de la notion que nous venons de définir. Si l'on numérote les emplacements d'un jeu de Tetris de 1 à s, on identifiera le i-ième emplacement à la partie $[i, i+1] \times \mathbb{R}^+$ du plan euclidien comme dans le dessin qui suit.

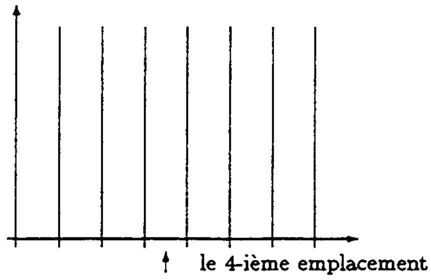

Figure 8 – Les emplacements d'un jeu de Tetris.

Une pièce p est alors un objet géométrique (non nécessairement connexe) qui peut occuper toute partie du plan euclidien formée de l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tels que

$$\begin{cases} [x] \in \mathcal{E}(p), \\ b(p, [x]) + l \leq y \leq h(p, [x]) + l \end{cases}$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x et où l est une constante de $\mathbb{N}$. Nous avons représenté ci-dessous dans un jeu de Tetris à 4 emplacements une position possible (correspondant à $l = 1$) d'une pièce p dont les contours haut et bas sont donnés par

$$\begin{cases} b(p,1) = 1, & b(p,2) = -\infty, & b(p,3) = 0, & b(p,4) = 0, \\ h(p,1) = 2 & h(p,2) = -\infty, & h(p,3) = 3, & h(p,4) = 2. \end{cases}$$

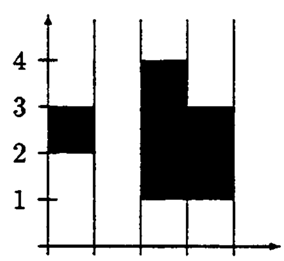

Figure 9 – Une pièce d'un jeu de Tetris.

Il faut donc imaginer une pièce d'un jeu de Tetris comme un objet géométrique d'un seul tenant qui peut coulisser le long de l'axe des y sans jamais passer sous l'axe des x.

Si un jeu de Tetris $\mathcal{T}$ est donné, nous pouvons maintenant associer à chaque mot $w = a_1 \ldots a_n$ sur l'alphabet P des pièces, l'empilement $e(w)$ qui est l'objet géométrique que l'on obtient si on empile la pièce a_i au dessus de la pièce a_{i-1} pour tout $i \in [2, n]$ sans laisser d'espace entre les différentes pièces, ni d'espace entre l'axe des x et l'empilement considéré. Autrement dit, cela revient à laisser tomber du haut vers le bas les pièces de w les unes après les autres. Pour bien se fixer les idées, considérons le jeu de Tetris à deux emplacements et à trois pièces notées a, b et c définies par la représentation qui suit.

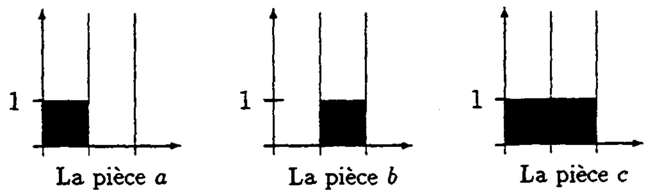

Figure 10 – Un jeu de Tetris.

Les mots $a\,b\,a\,c\,b$ et $b\,a\,a\,c\,b$ correspondent alors au même empilement donné ci-dessous.

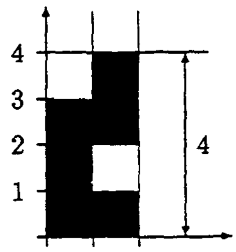

Figure 11 – Un empilement.

On peut donc maintenant associer à chaque mot $w \in P^*$ l'entier naturel $h_{\mathcal{T}}(w)$ qui est la hauteur maximale de l'empilement correspondant à w. Cette grandeur est mise en évidence sur la figure 11 où on voit donc que $h_{\mathcal{T}}(aabcb) = 4$.

Question 14

Soit $\mathcal{T}$ un jeu de Tetris. Montrez que la série formelle $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ définie par

$$\mathcal{H}_{\mathcal{T}} = \sum_{w \in P^*} h_{\mathcal{T}}(w)\, w$$

est une série $\mathcal{M}$-reconnaissable.

Indication : on pourra associer à chaque mot w sur l'alphabet des pièces le vecteur $h(w)$ d'ordre E dont l'entrée d'indice $i \in E$ est égale à la hauteur de l'empilement associé à w relativement à l'emplacement i. On a ainsi $h(aabcb) = (3, 4)$ si l'on reprend l'exemple du jeu de Tetris des figures 10 et 11.

Question 15

Un réseau de Petri *temporisé* est la donnée d'un réseau de Petri $(P, T, Pre, Post, M)$ et du couple $\tau = (\tau_P, \tau_T)$ où

- $\tau_P = (\tau_p)_{p \in P}$ est un vecteur de $\mathbb{N}^P$, appelé vecteur des temps de séjour,
- $\tau_T = (\tau_t)_{t \in T}$ est un vecteur de $\mathbb{N}^T$, appelé vecteur des temps de franchissement.

On munit maintenant le réseau de Petri d'une dynamique où on fait intervenir le temps. On supposera qu'on travaille ici avec un temps discret dont les différents instants peuvent être identifiés aux entiers naturels de $\mathbb{N}$. On commence donc à faire fonctionner le réseau à l'instant 0. Si une transition t est habilitée à l'instant i et que l'on décide de la franchir, le mécanisme de franchissement se déroule quant à lui selon le schéma temporel décrit ci-dessous :

1. à l'instant i, le franchissement de la transition t commence et on enlève un jeton dans chacune des places de $Pre(t)$;
2. un jeton est ensuite placé dans chacune des places de $Post(t)$ à l'instant $i + \tau_t$;
3. si un jeton a été placé dans une place p de $Post(t)$ par la transition t à l'instant $i + \tau_t$, il ne pourra être utilisé pour habiliter d'autres transitions qu'à partir de l'instant $i + \tau_t + \tau_p$.

Considérons maintenant un réseau de Petri marqué et temporisé $\mathcal{P} = (P, T, Pre, Post, M, \tau)$ tel que chaque place contienne toujours au plus un jeton au fur et à mesure de l'évolution du réseau. On associe alors à chaque mot w sur l'alphabet des transitions de $\mathcal{P}$ et à chaque place p de P les deux entiers $d(w, p)$ et $f(w, p)$ définis par

- $d(w, p)$ est l'instant auquel un jeton, arrivé en place p sous l'action des franchissements successifs des transitions de w, redevient disponible pour habiliter de nouvelles transitions;
- $f(w, p)$ est le dernier instant de présence d'un jeton dans la place p sous l'action des franchissements successifs des transitions de w.

On peut maintenant associer à chaque mot w sur l'alphabet des transitions de $\mathcal{P}$ le vecteur $T_{\mathcal{P}}(w)$ de $\mathcal{M}^P$ indexé par les places de P et dont la composante correspondant à la place p est définie par

$$T_{\mathcal{P}}(w)_p = \begin{cases} d(w, p) & \text{si } M(w)_p = 1, \\ f(w, p) & \text{si } M(w)_p = 0, \end{cases}$$

où $M(w)$ désigne le marquage obtenu à partir du marquage initial M de $\mathcal{P}$ par activation successive des transitions de w.

Montrez qu'on peut construire alors un jeu de Tetris $\mathcal{T}$ dont les pièces sont les transitions de P, dont les emplacements sont les places de T et tel que

$$\max_{p \in P} (\, T_{\mathcal{P}}(w)_p \,) = h_{\mathcal{T}}(w)$$

pour tout mot w sur l'alphabet P.

Explicitez ce jeu de Tetris dans le cas du réseau de Petri donné par la figure 1 et muni de la temporisation définie par

- $\tau_T(t_1) = 1$, $\tau_T(t_2) = 2$, $\tau_T(t_3) = 2$, $\tau_T(t_4) = 1$,
- $\tau_P(p_1) = 1$, $\tau_P(p_2) = 0$, $\tau_P(p_3) = 0$, $\tau_P(p_4) = 2$, $\tau_P(p_5) = 0$, $\tau_P(p_6) = 0$.