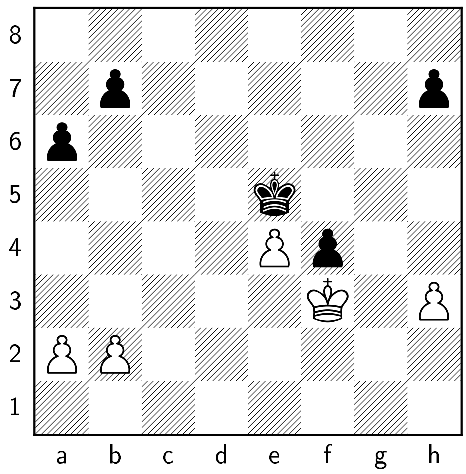
Des infinitésimaux sur l'échiquer

Alain Busser
IREMI 974

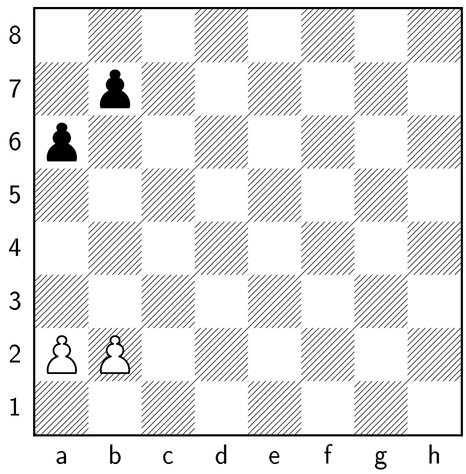
22 avril 2023

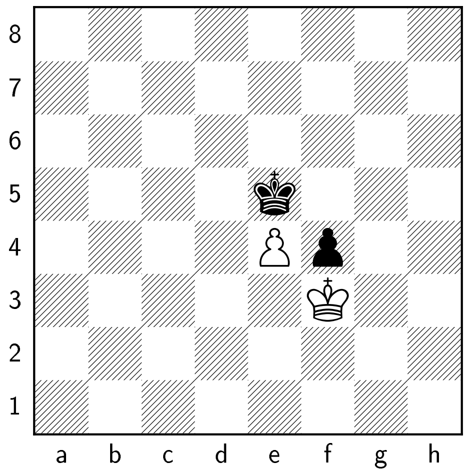
0.1 Une partie réelle

En 1929, à Brno en Tchécoslovaquie, une partie d'échecs a été jouée entre Messieurs Šveta et Sika, qui a mené à cette position intéressante :

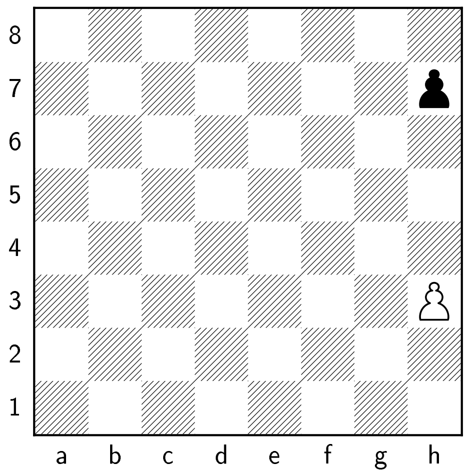


L'intérêt de cette position, du moins du point de vue conwayien, est que, vu qu'aucun des deux joueurs n'a intérêt à déplacer latéralement un de ses rois, et que les pions ne peuvent pas bouger latéralement, le jeu est la somme de ces trois jeux :

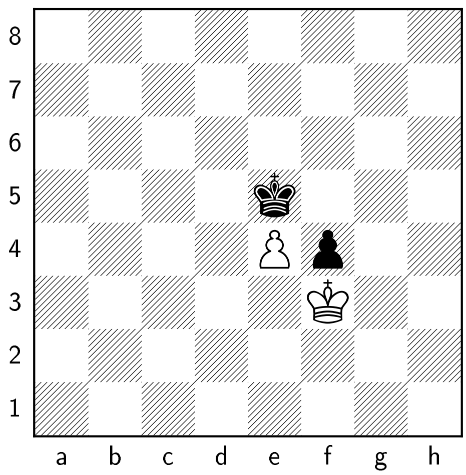




et



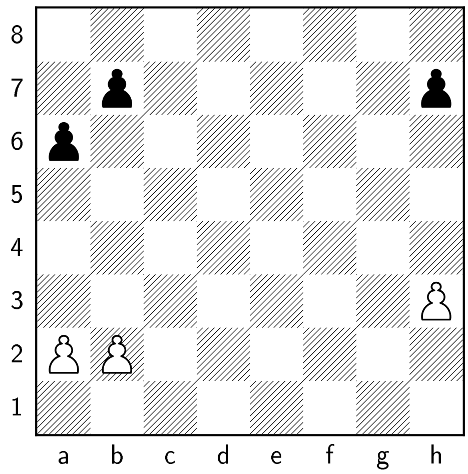
Or le terme central



est connu aux échecs sous le nom de *trébuchet* : les pions sont bloqués (chacun par le roi adverse) et aucun des rois ne peut bouger sans cesser de protéger son pion car alors il se mettrait en échec (à cause du pion adverse) et cela lui est interdit.

Donc le premier joueur qui bouge un de ses rois, perd le jeu car alors son adversaire a le champ libre pour mener son roi et son pion vers la ligne adverse, ce qui aboutit (après promotion du pion à dame) à une finale roi+dame contre roi, que l'on sait être gagnante pour celui qui a la dame.

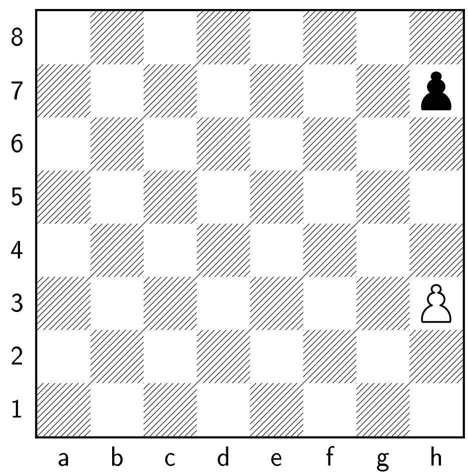
Donc, dans ce trébuchet, le premier qui bouge son roi a perdu le jeu. Mais cela est précisément la définition donnée par Conway du nombre 0 : tout se passe comme s'il n'y avait pas de roi sur l'échiquier, et le premier qui ne peut plus bouger de pion a perdu le jeu (car alors, il sera obligé de se suicider dans le trébuchet). La partie Šveta contre Sika (Brno 1929) est donc équivalente à ce jeu à la Conway :



où le premier qui ne peut plus bouger un pion a perdu. C'est ce qui a permis à Noam Elkies de représenter sur un échiquier toutes sortes de jeux (entiers, fractions, infinitésimaux,...) sur l'échiquier.

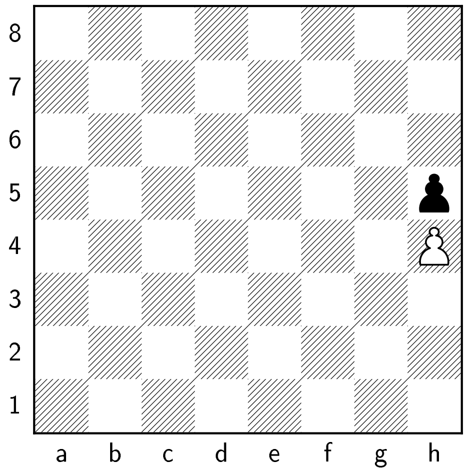
0.2 Nimbers

Commençons par la dernière colonne :



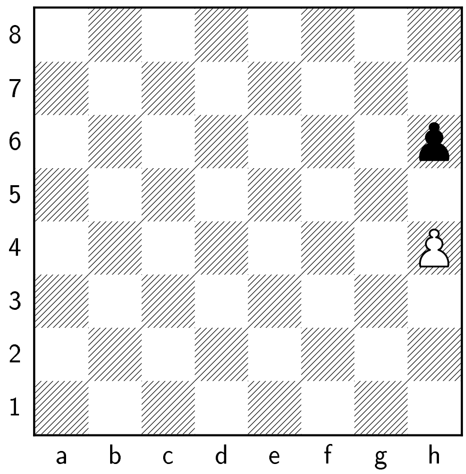
0.2.1 Zéro

La position ci-dessous vaut 0 puisque les deux pions sont bloqués :

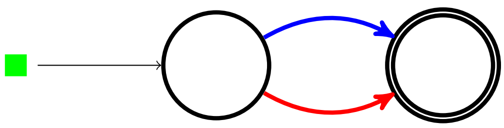


0.2.2 Étoile

Donc la position ci-dessous, dans laquelle le prochain qui joue arrive à la position précédente (zéro) est l'étoile de Conway :

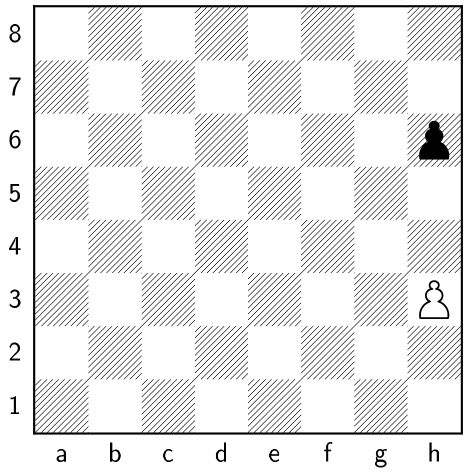


En assimilant les **bl**eus aux **bl**ancs, et les **r**ouges aux noi**r**s, la position ci-dessus se dessine ainsi :

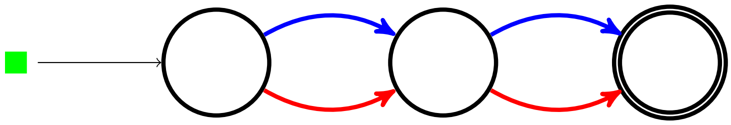


0.2.3 Zéro de retour

Du coup la position ci-dessous est aussi égale à zéro puisque le prochain qui joue perd le jeu en offrant l'étoile à son adversaire :

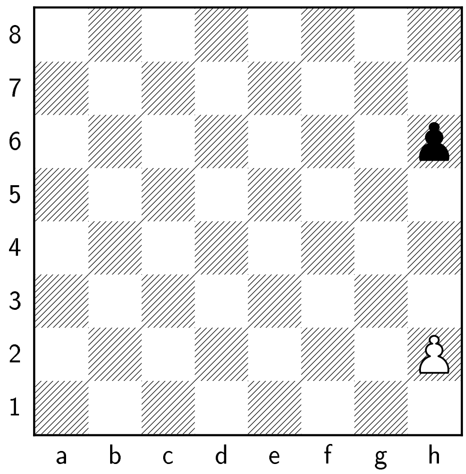


elle se représente ainsi :

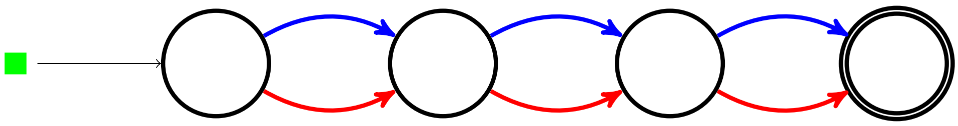


0.2.4 L'étoile de retour

Il semble que le processus se répète avec la position ci-dessous :



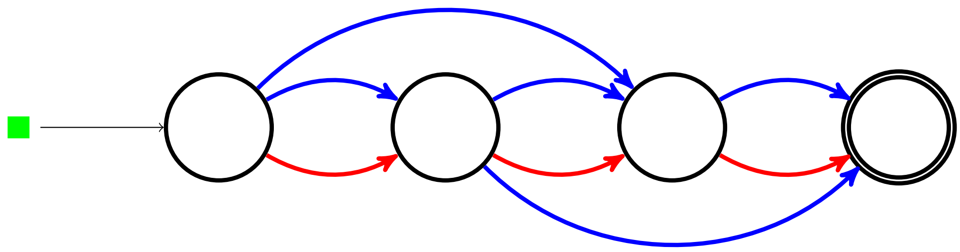
qui ressemble à l'étoile :



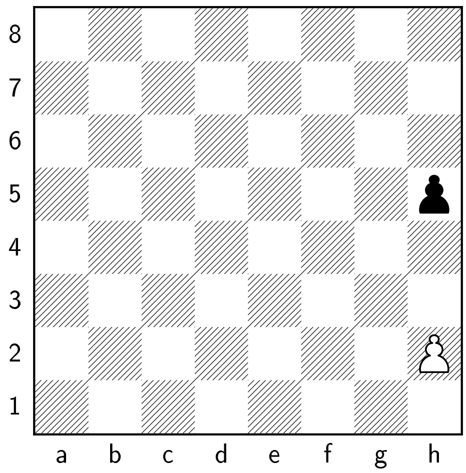
mais en fait c'est plus compliqué que cela, comme on le verra dans la partie suivante.

0.3 infiniment petits positifs

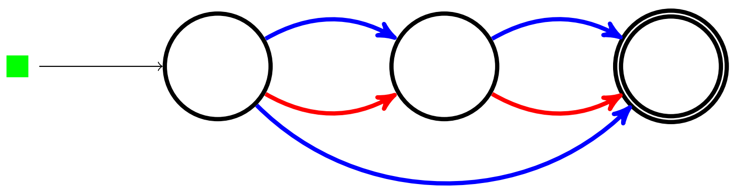
Dans la position ci-dessus, il y a une asymétrie. Le pion blanc en h2 n'ayant jamais bougé, peut avancer d'une case pour gagner, mais peut aussi avancer de deux cases. La représentation correcte sous forme d'un graphe est donc plutôt celle-ci :



On commence par regarder la valeur de la position intermédiaire ci-dessous :



dont la représentation en forme de graphe est :

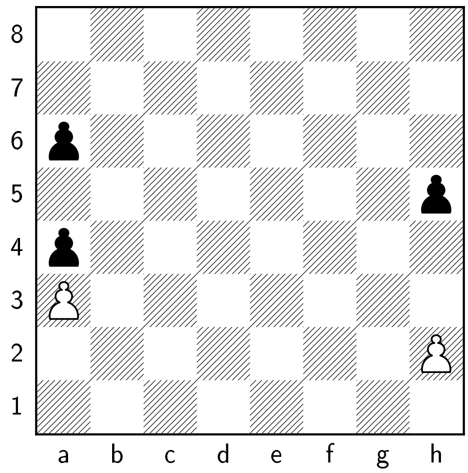


Il s'agit là d'un infinitésimal positif nommé *up* et noté $\uparrow$.

Que $\uparrow$ est positif signifie que

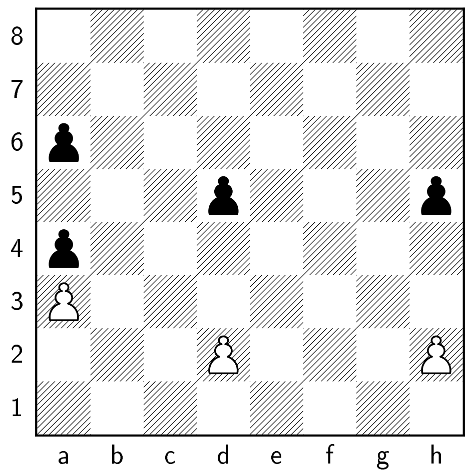
- si c'est aux blancs de jouer, ils ont une stratégie gagnante (aller directement en h4 et bloquer le pion noir),
- si c'est aux noirs de jouer, les blancs ont quand même une stratégie gagnante (bloquer le pion noir, entre-temps allé en h4, en allant en h3).

Par contre, le jeu suivant est négatif (ce sont les noirs qui gagnent, que ce soit à eux de jouer, ou pas) :

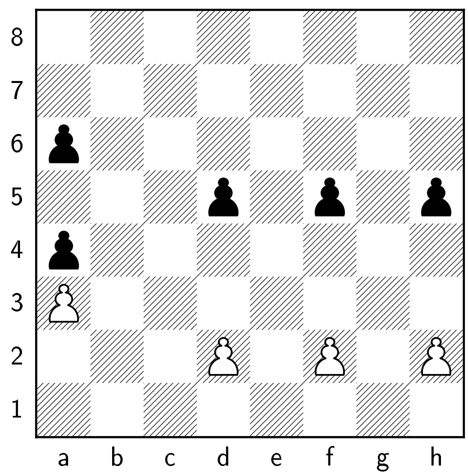


Or la colonne a représente l'entier -1. Donc le fait que ce jeu soit à l'avantage des noirs, se traduit par l'inégalité $\uparrow < 1$.

Mais ce jeu aussi est négatif :

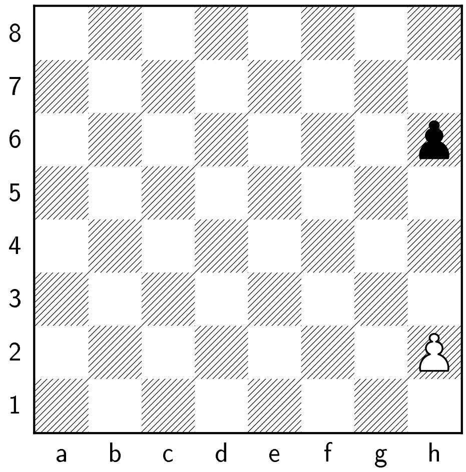


ce qui signifie que $\uparrow\uparrow < 1$ donc que $\uparrow < 0,5$. De même, ce jeu aussi est négatif :

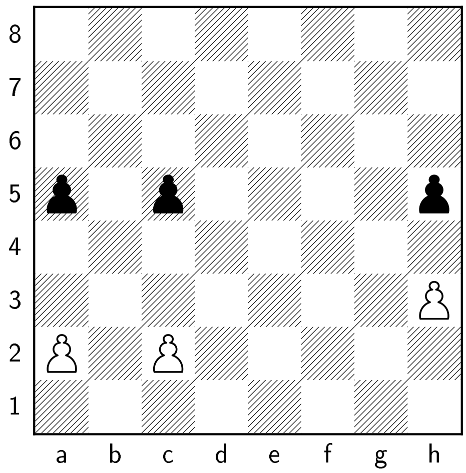


prouvant que $\uparrow\uparrow\uparrow < 1$ ce qui montre par l'exemple que $\uparrow$ est plus petit que tout nombre strictement positif : c'est un infiniment petit.

La position



vue auparavant, permet aux blancs d'accéder à $\uparrow$ (en avançant le pion d'une seule case, vers h3) ou, au choix, à l'étoile (en avançant le pion directement en h4) alors que les noirs ne peuvent avancer leur pion qu'une seule fois, vers h5, arrivant à l'étoile. Ce jeu est donc positif (à l'avantage des blancs) mais infinitésimal. Il s'agit de $\uparrow\uparrow *$ (somme de deux copies de $\uparrow$ et d'une copie de l'étoile). Il équivaut à ce jeu :



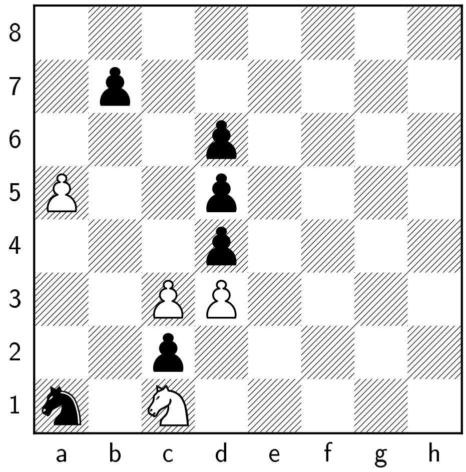
Par symétrie, la colonne h du jeu de Brno est égale à $\downarrow\downarrow *$.

Elkies analyse de façon analogue les colonnes a et b du jeu de Brno. Il trouve que ces deux colonnes valent $\uparrow$. Donc le jeu de Brno a pour valeur $\uparrow + 0 + \downarrow\downarrow * = \downarrow *$ qui n'est ni positif, ni négatif, ni nul :

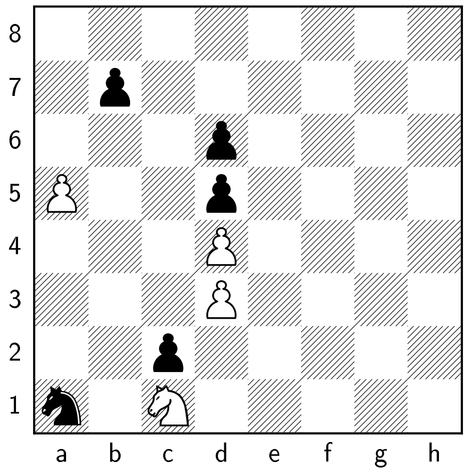
- si c'est aux blancs de jouer, ils ont une stratégie gagnante : jouer dans la colonne h, en mettant le pion blanc en h4 ce qui transforme la somme $\uparrow + 0 + \downarrow\downarrow *$ en $\uparrow + 0 + \downarrow$ qui est nulle et les fait gagner,
- si c'est aux noirs de jouer, ils ont eux aussi une stratégie gagnante : jouer à gauche, transformant le terme $\uparrow$ en $*$ donc la somme $\uparrow + 0 + \downarrow\downarrow *$ en $* + 0 + \downarrow\downarrow * = \downarrow\downarrow$ qui est négative donc à l'avantage des noirs.

0.4 tiny-one

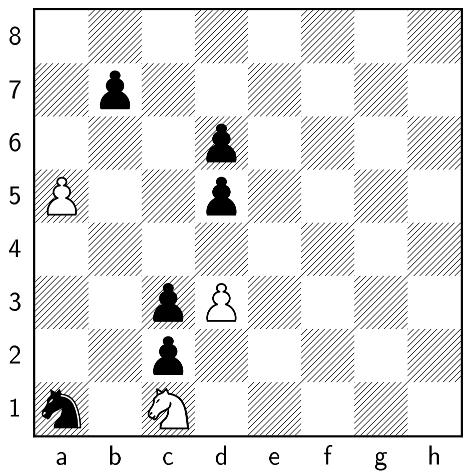
Voici une occurence du jeu $+_1$ qui est strictement positif mais infiniment plus petit que $\uparrow$:



Les cavaliers et le pion noir en c2 sont bloqués. Pour les blancs le meilleur coup est

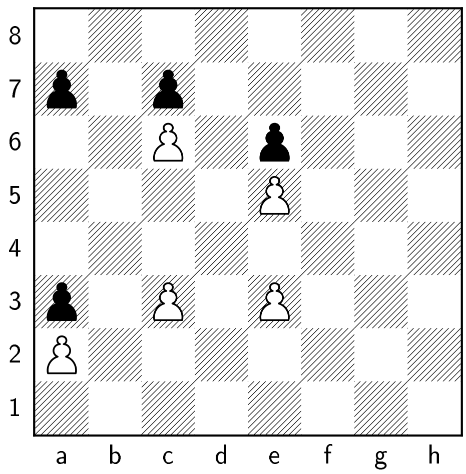


et pour les noirs le meilleur coup est

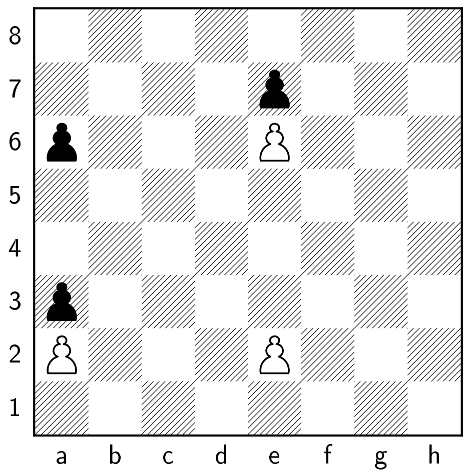


0.5 Addition des entiers relatifs

Ce jeu est nul (le premier qui bouge a perdu) :



ce qui prouve que 2+1=3 (plus précisément, $-3+2+1=0$).
Ce jeu par contre est à l'avantage des blancs :



ce qui veut dire que $-2+3>0$, autrement dit, que $2<3$.
Noam Elkies a donc trouvé un moyen de construire le nombre par le jeu d'échecs !

IREMI 974
avril 2023