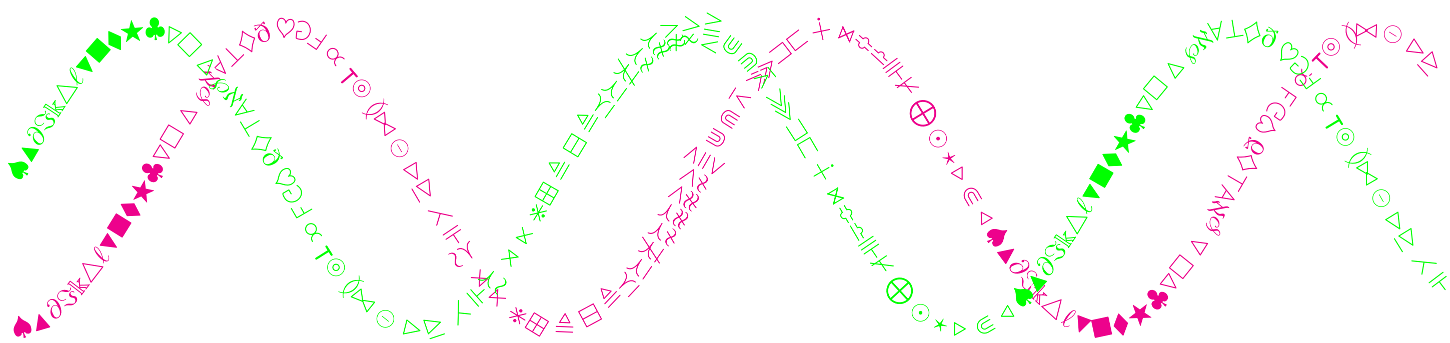
Epistemique Doxastique Deontique



un

Enchantement Du Divin

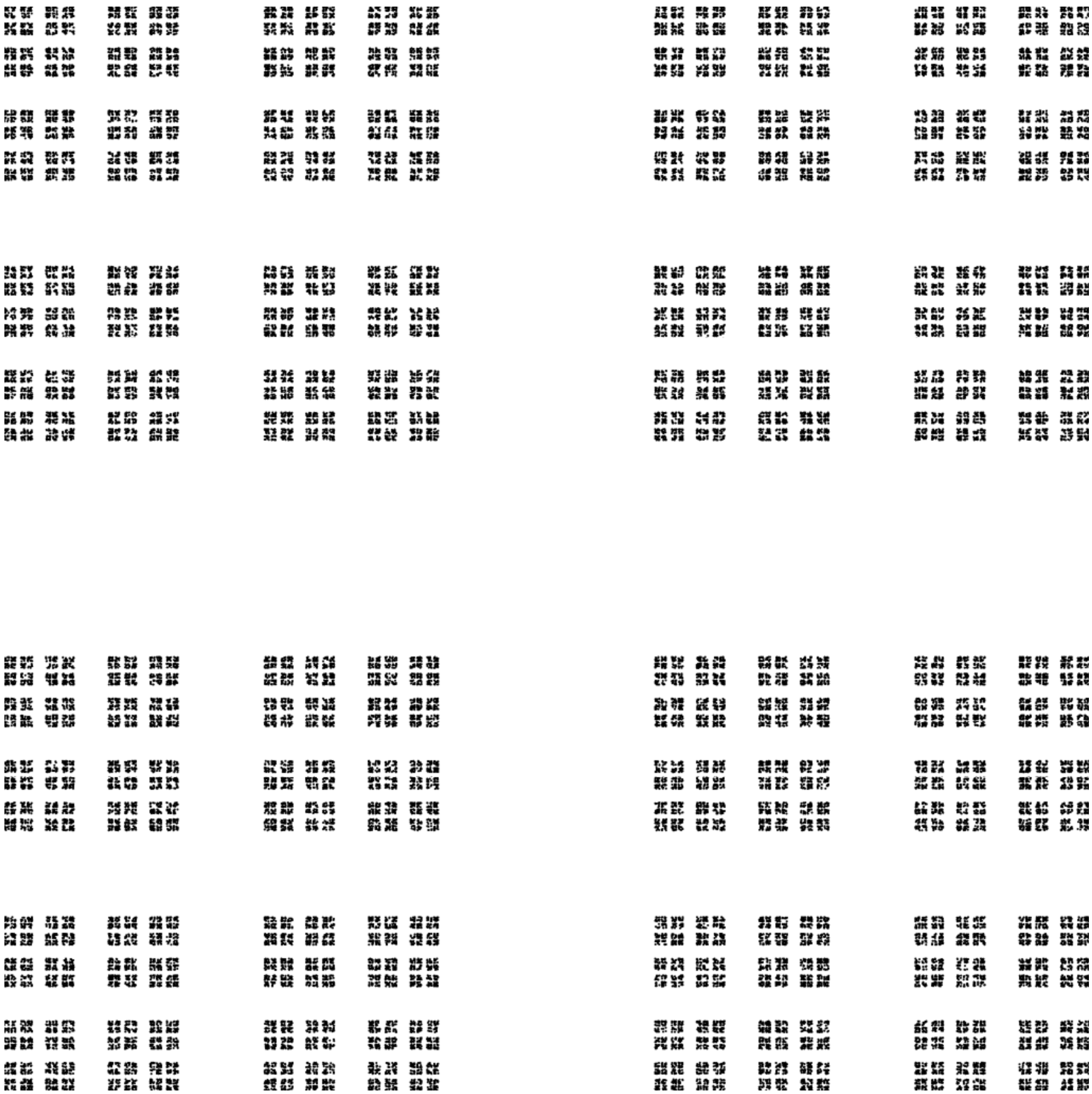
Alain
Busser

« Si tu sais que tu ne sais rien, alors tu sais déjà quelque chose.
Si tu ne sais pas que tu ne sais rien, alors tu ne sais vraiment rien. »

(proverbe sénégalais)

Table des matières

BOOLE À ZÉRO ET BOOLE À UN



I / De l'algèbre à la relation d'ordre

Durant la seconde moitié du XIXème siècle, reprenant un vieux rêve de Leibniz, des logiciens britanniques ont cherché à algébriser le raisonnement logique. Parmi eux, George Boole, Augustus DeMorgan, et Charles Lewis Dodgson, alias Lewis Carrol, ainsi qu'un certain Venn. L'idée de Boole est que les relations ≪ non ≫, ≪ et ≫ et ≪ ou inclusif ≫ ont des propriétés algébriques (associativité par exemple) analogues à celles des opérations sur les nombres, d'où les axiomatisations suivantes :

1) Axiomes d'algèbres de Boole

a) Qu'est-ce donc qu'une algèbre de Boole ?

Une algèbre de Boole (on va voir qu'il en existe plusieurs sortes) est un ensemble $\mathcal{B}$ contenant au moins deux éléments notés 0 et 1, muni de deux lois notées $+$ et $\cdot$ (nommées addition et multiplication) et d'une fonction notée $-$ et nommée complément ou négation, et tels que :

$$+ \text{ et } \cdot \text{ sont commutatives et associatives} \tag{1}$$

$$0 \text{ est élément neutre pour } + \tag{2}$$

$$1 \text{ est élément neutre pour } \cdot \tag{3}$$

$$\cdot \text{ est distributive par rapport à } + \text{ (jusque là, c'est comme dans } \mathbb{R}) \tag{4}$$

$$+ \text{ est distributive par rapport à } \cdot \text{ (pas du tout comme dans } \mathbb{R}) \tag{5}$$

$$\forall x \in \mathcal{B}, x \cdot (-x) = 0 \text{ et } x + (-x) = 1 \tag{6}$$

$$\forall x \in \mathcal{B}, x \cdot x = x \tag{7}$$

On note également $1 - x$ ou $\overline{x}$ le complément de x.

b) Des exemples

(1) L'algèbre de Boole à deux éléments, également appelée « l'algèbre de Boole » tellement elle est classique, est définie par $\mathcal{B} = \{0; 1\}$ et les tables suivantes :

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

pour la négation,

$p+q$	0	1
0	0	1
1	1	1

pour l'addition (ou disjonction inclusive),

et

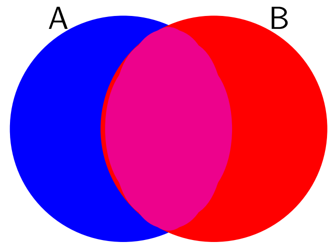
$p \cdot q$	0	1
0	0	0
1	0	1

pour la multiplication (ou conjonction).
Si cette algèbre est si importante, c'est entre autres parce qu'on peut la simuler par des composants électroniques dits « binaires » qui sont à la base de toute l'électronique numérique, notamment des téléphones portables, télécommandes, platines laser, ordinateurs et calculatrices en tout genre. Merci M. Boole ! En logique, 0 code « faux » et 1 code « vrai ».

(2) Algèbres de Venn

Sur $\mathcal{P}(E)$, ensemble des parties d'un ensemble E, on obtient une algèbre de Boole en choisissant la complémentation à E pour négation, la réunion pour addition et l'intersection pour multiplication. Il en est de même pour certains sous-ensembles de

$\mathcal{P}(E)$, comme les tribus boréliennes utilisées en probabilité, les ensembles d'ouverts utilisés en topologie etc.
Avec les « diagrammes de Venn » :



les calculs dans cette algèbre de Boole deviennent très visuels : Ici $A \bigcup B$ est représenté en couleurs (toutes couleurs confondues) et $A \bigcap B$ est représenté en magenta. Lewis Carroll utilise les diagrammes de Venn pour résoudre des problèmes de logique par coloriage ou pose de pions dans des cases. Le dessin de diagrammes de Venn quand il y a plus de 3 ensembles est un véritable art...

(3) L'algèbre de Lindenbaum

Si les lois « et » (notée $\wedge$) et « ou inclusif » (notée $\vee$) ont, avec la négation (notée $\neg$) les propriétés 1 à 5 (en prenant pour élément neutre de $\wedge$ n'importe quelle proposition vraie, et pour élément neutre de $\vee$ n'importe quelle proposition fausse), il n'est pas vrai que $p \wedge p = p$; par contre, on a $p \wedge p \Leftrightarrow p$, et $\Leftrightarrow$ est une relation d'équivalence. Si donc on note $[p]$ la classe d'équivalence de p (c'est-à-dire l'ensemble des propositions équivalentes à p), les lois $\wedge$ et $\vee$ « passent au quotient » (c'est-à-dire par exemple que si $p \Leftrightarrow r$ et $q \Leftrightarrow s$ alors $(p \wedge q) \Leftrightarrow (r \wedge s)$) et l'ensemble des classes d'équivalences est alors une algèbre de Boole avec les lois $\wedge$, $\vee$ et la négation $\neg$: C'est l'algèbre de Lindenbaum. Les éléments neutres sont $\perp$ (ensemble des propositions équivalentes à une proposition fausse, donc fausses) pour l'addition et $\top$ (ensemble des propositions vraies) pour la multiplication.

c) Quelques théorèmes

$$\forall a \in \mathcal{B}, \overline{\overline{a}} = a$$

Lois de DeMorgan :

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a + b}$$

et

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a \cdot b}$$

Le meilleur :

$$\overline{1} = 0$$

(aussi écrit $\boxed{-1 = 0}$!!!)

d) Autres axiomatisations

(1) 5 axiomes suffisent :

$$
\begin{aligned}
+ \text{ et } \cdot \text{ sont commutatives} \\
+ \text{ et } \cdot \text{ sont associatives} \\
(x+y)\cdot y = y \text{ et } (x\cdot y)+y = y \\
\cdot \text{ est distributive par rapport à } + \\
+ \text{ est distributive par rapport à } \cdot
\end{aligned}
$$

$x \cdot x = x$ est alors un théorème.

(2) 4 axiomes suffisent :

$$
\begin{aligned}
\cdot \text{ est commutative} \\
\cdot \text{ est associative} \\
\forall a, b \in \mathcal{B}, a \cdot \overline{b} = 0 \Rightarrow a \cdot b = a \\
\forall a, b \in \mathcal{B}, a \cdot b = a \Rightarrow a \cdot \overline{b} = 0
\end{aligned}
$$

Peut-on faire mieux que 4 axiomes ? Tout d'abord, puisque les lois de DeMorgan permettent de définir l'une des deux opérations $\cdot$ et $+$ à partir de l'autre et de la négation, on peut n'utiliser qu'une opération et la négation (c'est ce qui est fait ici).

(3) En 1913, Henry Sheffer propose une seule opération appelée « Sheffer stroke », notée $|$ et définie par exemple comme $a \mid b = \overline{a \cdot b}$ (en électronique binaire, cet opérateur est nommé « NAND » pour « not-and » et est un composant électronique très répandu). Alors la négation elle-même se définit avec ce seul opérateur par $\overline{a} = a \mid a$ et on peut définir une algèbre de Boole avec ces seuls trois axiomes :

$$
\begin{aligned}
(x \mid x) \mid (x \mid x) = x \\
x \mid (y \mid (y \mid y)) = x \mid x \\
(x \mid (y \mid z)) \mid (x \mid (y \mid z)) = ((y \mid y) \mid x) \mid ((z \mid z) \mid x)
\end{aligned}
$$

Mais on peut faire mieux :

(4) Axiomes de Meredith :

Toujours avec pour seul opérateur, celui de Sheffer, Meredith a trouvé que deux axiomes suffisaient :

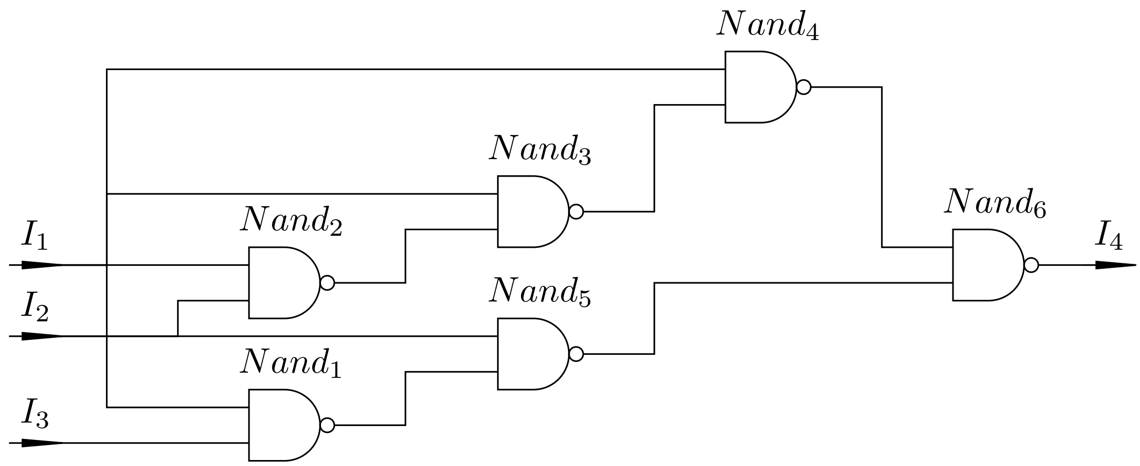
$$
\begin{aligned}
(x \mid x) \mid (y \mid x) = x \\
x \mid (y \mid (x \mid z)) = ((z \mid y) \mid y) \mid x
\end{aligned}
$$

Peut-on faire encore mieux (un seul axiome) ? Avec le logiciel *Otter* (logiciel de démonstration automatique), plusieurs solutions ont été trouvées [1], dont la plus simple est l'axiome suivant :

1. La plus ancienne, en 1917, par J. Nicod : $[x|(y|z)] \mid [(v|(v|v)) \mid ((u|y)| ((x|u)|(x|u)))]$

(5) $\boxed{((x \mid z) \mid y) \mid ((x \mid (x \mid y)) \mid x) = y}$

Qui signifie que le circuit électronique suivant :



a le même effet que le suivant :

2) Une algèbre de Boole est ordonnée

a) Définition

On pose $x \leqslant y$ si et seulement si $x \cdot \overline{y} = 0$. Ceci définit une relation d'ordre partiel (si x et y sont deux éléments quelconques de $\mathcal{B}$, il n'est pas certain que $x \leqslant y$ ni que $y \leqslant x$).
On a des définitions alternatives pour cette relation d'ordre :

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \overline{x} + y = 1$$
$$x \leqslant y \Leftrightarrow x \cdot y = x$$
$$x \leqslant y \Leftrightarrow x \mid \overline{y} = 1$$

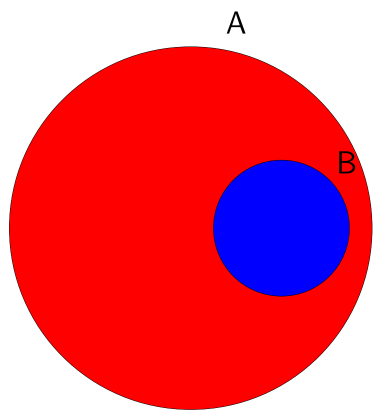
b) Théorèmes

$$a \cdot b \leqslant a$$
$$a \leqslant a + b$$
$$a + b \leqslant c \Leftrightarrow a \leqslant b \text{ et } b \leqslant c$$
$$a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d \Rightarrow a + c \leqslant b + d$$
$$\forall a \in \mathcal{B}, 0 \leqslant a$$
$$\forall a \in \mathcal{B}, a \leqslant 1$$

c) Exemples

(1) Dans l'algèbre à deux éléments, on a $0 \leqslant 1$ ce qui n'a rien d'étonnant !

(2) En théorie des ensembles, cette relation d'ordre est tout simplement l'inclusion. En effet, si on essaye de déformer la figure du (1.b.2) de manière à obtenir l'une des relations du (2.a), par exemple $A \cap B = B$, on obtient le diagramme de Venn suivant :



où on reconnaît que $B \subset A$.

(3) Dans l'algèbre de Lindenbaum, on reconnaît la première des définitions alternatives comme définition classique de l'implication. En fait il est pratiquement nécessaire que la relation d'implication soit une relation d'ordre, soit :

$$\begin{aligned} p \Rightarrow p &\ \text{(réflexivité)} \\ (p \Rightarrow q \text{ et } q \Rightarrow p) \Longrightarrow (p \Rightarrow q) &\ \text{(antisymétrie)} \\ (p \Rightarrow q \text{ et } q \Rightarrow r) \Longrightarrow (p \Rightarrow r) &\ \text{(transitivité)} \end{aligned}$$

C'est ce qui permet de faire des raisonnements par déduction, par exemple avec le modus ponens :

$$(p = 1 \text{ et } p \leqslant q) \Rightarrow (q = 1)$$

(si p est vrai, comme $p \Rightarrow q$ signifie que q est encore plus vrai que p, on en *déduit* que q est vrai)

Le raisonnement par l'absurde (si q était faux, p serait encore plus faux puisque $p \leqslant q$) est basé sur le théorème suivant (vrai dans toutes les algèbres de Boole) :

$$p \leqslant q \Longleftrightarrow \overline{q} \leqslant \overline{p}$$

qui, dans l'algèbre de Lindenbaum, revient à dire qu'une implication est équivalente à sa contraposée.

Conséquence importante du fait qu'on considère l'implication comme une relation d'ordre : Les fameux paradoxes de l'implication formelle :

$\forall p, p \Rightarrow \top$ (n'importe quoi implique du vrai, traduction lindenbaumienne de $p \leqslant 1$)

$\forall p, \perp \Rightarrow p$ (le faux implique n'importe quoi, traduction de $0 \leqslant p$)

II / De la relation d'ordre aux algèbres

1) Treillis complémentés

Un ensemble $\mathcal{B}$ muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ est un treillis si et seulement si toute paire x, y d'éléments de $\mathcal{B}$ possède une borne inférieure notée $x \wedge y$ (c'est-à-dire un élément z de $\mathcal{B}$ tel que $z \leqslant x$, $z \leqslant y$ et $t \leqslant x$ et $t \leqslant y \Rightarrow t \leqslant z$) et une borne supérieure notée $x \vee y$. Un exemple classique : $\mathbb{N}$ muni de la divisibilité (qui est une relation d'ordre, aisément vérifiable). Dans ce cas, la borne inférieure est le *pgcd* et la borne supérieure le *ppcm*, et on retrouve des notations classiques...

Or un treillis complémenté (avec une fonction négation telle que $x \leqslant y \Leftrightarrow \overline{y} \geqslant \overline{x}$) est muni d'une structure d'algèbre de Boole avec, pour somme, la borne supérieure, et pour produit, la borne inférieure. On a alors

$$\inf_{a \in \mathcal{B}} a = 0$$

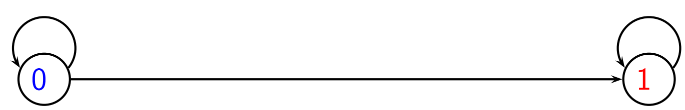
et

$$\sup_{a \in \mathcal{B}} a = 1$$

Il suffit donc d'une relation d'ordre pour obtenir une algèbre de Boole (avec la négation toutefois) !

2) Exemples

a) La relation d'ordre de l'algèbre $\mathbb{O}$ à deux éléments est donnée par le graphe suivant :



Il est aisé de vérifier sur les tableaux du (I.1.b.1) que le produit des deux éléments est le plus petit des deux, et que leur somme booléenne est le plus grand des deux.

b) Dans l'algèbre de Venn, on peut définir $A \bigcap B$ comme le plus grand ensemble contenu à la fois dans A et dans B, et $A \bigcup B$ comme le plus petit ensemble contenant à la fois A et B.

c) Dans l'algèbre de Lindenbaum, que signifie alors $p \wedge q$? C'est une proposition qui implique à la fois p et q, et telle que pour toute proposition r, si $r \Rightarrow p$ et $r \Rightarrow q$ alors $r \Rightarrow (p \wedge q)$. C'est encore une fois le sens qu'on voudrait donner à la conjonction, mais aussi à l'implication. De même, $p \vee q$ est défini par $p \Rightarrow (p \vee q)$, $p \Rightarrow (p \vee q)$ et $\forall r$, $p \Rightarrow r$ et $q \Rightarrow r$ impliquent chacun que $(p \vee q) \Rightarrow r$.

3) Atomes

a) Définitions

Un atome d'une algèbre de Boole $\mathcal{B}$ est un élément $x \neq 0$ de $\mathcal{B}$ tel que $\forall y \leqslant x, y = 0$ ou $y = x$; autrement dit c'est un élément non nul minimal.
Par exemple, l'algèbre à deux éléments n'a qu'un seul atome, qui est 1, et dans l'algèbre de Venn, les atomes sont les singletons ; on serait tenté de considérer les éventuels atomes de l'algèbre de Lindenbaum comme des axiomes...
Une algèbre de Boole est dite sans atome si elle ne contient aucun atome. (*ça, c'est de la définition !...*)

b) Cardinal

Si une algèbre de Boole contient n atomes, alors son cardinal est 2^n. Donc une algèbre sans atome est nécessairement de cardinal infini...

c) Topologie des algèbres sans atomes

Une algèbre de Boole $\mathcal{B}$ sans atome est un ensemble parfait (tous ses éléments sont limites de suites d'éléments de $\mathcal{B}$) totalement discontinu (ses composantes connexes sont des singletons), structure topologique appelée espace de Cantor. Ce qui explique l'illustration du titre, qui représente un tel espace ; voyons d'autres exemples :

(1) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ou le "pile ou face infini"

Si on lance une infinité de fois une pièce, en représentant "pile" par 0 et "face" par 1, on peut représenter la partie par une suite de zéros et de uns, par hypothèse infinie. En passant par la fonction caractéristique d'un ensemble :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in A \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

on peut associer à une suite $u_n = 0$ ou 1 une partie U de $\mathbb{N}$ par :

$$n \in U \Leftrightarrow u_n = 1$$

L'ensemble des pile ou face infinis est donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Comment le munir d'une topologie ? On va choisir une ultradistance ($d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $d(x,y) = d(y,x)$ et $d(x,z) \geqslant inf(d(x,y), d(y,z))$) en choisissant pour $d(u_n, v_n)$ le nombre $\dfrac{1}{2^n}$, où n est le plus petit entier tel que $u_n \neq v_n$. On peut vérifier que c'est bien une distance, et même une ultradistance, et que, avec cette topologie ultramétrique, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est un ensemble parfait (toute suite $u_n = 0$ ou 1 est limite de suites analogues) totalement discontinu, autrement dit un espace de Cantor.

(2) L'ensemble triadique

Lors de ses recherches sur les séries de Fourier, G. Cantor a inventé le premier des ensembles de Cantor, l'ensemble triadique, construit ainsi :

- ⋆ On part du segment $[0, 1]$:

- ⋆ On enlève le segment du milieu $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$:

- ⋆ De chacun des segments restants, on enlève celui du milieu :

- ⋆ Et ainsi de suite *ad infinitum*

Ce qui reste après un nombre infini d'étapes est un ensemble non seulement non vide, mais de cardinal infini non dénombrable : L'ensemble triadique de Cantor :

FIGURE 1 – L'ensemble triadique de Cantor

Comme il a une dimension fractale égale à $\dfrac{ln2}{ln3}$, il a été promu par B. Mandelbrot comme exemple "simple" de fractal ; ainsi il intervient dans le jeu suivant :

- ⋆ On choisit un point M_0 au hasard sur le segment $[0, 1]$;
- ⋆ On lance une pièce au hasard et on regarde sur quel côté elle est tombée ;
- ⋆ Si c'est "pile", M_1 sera l'image de M_0 par l'homothétie de centre 0 et de rapport $\dfrac{1}{3}$; sinon M_1 sera l'image de M_0 par l'homothétie de centre 1 et de rapport $\dfrac{1}{3}$.
- ⋆ On recommence pour construire M_2, M_3 etc.

Alors pour presque tout choix de M_0 et pour presque toute suite de pile ou face obtenue, l'ensemble des points M_n a pour adhérence l'ensemble triadique de Cantor. C'est-à-dire que si l'ensemble des lancers de pièces qui ne dessinent pas l'ensemble de Cantor n'est pas vide (par exemple, si toutes les pièces tombent sur "pile", on n'a qu'un point), il est néanmoins de probabilité nulle (il aura fallu tricher pour obtenir cela...)

L'ensemble triadique de Cantor, muni de la topologie métrique héritée de celle de $[0; 1]$, est homéomorphe à l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ vu au (i). Peut-on expliciter cet homéomorphisme ? On a vu que toute partie de $\mathbb{N}$ peut être représentée par une suite de zéros et de uns ; un point de l'ensemble triadique de Cantor aussi :

- ⋆ Tout nombre de $[0; 1]$ peut s'écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ où $a_n = 0, 1$ ou 2 (développement triadique) ;

- ⋆ Lorsqu'on a enlevé le segment central, on a laissé les cas $a_1 = 0$ et $a_1 = 2$ puisqu'on a enlevé le segment des x tels que $a_1 = 1$;
- ⋆ En enlevant les deux segments suivants qui correspondent à $a_2 = 1$, on a laissé des nombres tels que a_1 et a_2 valent 0 ou 2 ;
- ⋆ etc. donc l'ensemble triadique est formé des nombres de $[0; 1]$ dont le développement en base 3 ne comporte que des 0 et des 2.
- ⋆ La correspondance $\begin{cases} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 2 \end{cases}$ permet alors de passer d'une suite de pile ou face à un élément de l'ensemble triadique de Cantor.
- ⋆ On montre alors facilement qu'elle est continue ainsi que sa réciproque (dans les deux cas, deux éléments sont proches lorsque leurs premiers chiffres coïncident).

En fait tous les ensembles parfaits totalement discontinus sont homéomorphes entre eux.

Ainsi, toute partie de $\mathbb{N}$ peut être représentée par un point de $[0; 1]$, ou plus précisément de l'ensemble triadique de Cantor. Quelques exemples :

I est l'ensemble des nombres impairs, **P** celui des nombres pairs. Le fait qu'ils soient complémentaires se voit dans le fait que la somme des abscisses des deux points qui les représentent vaut 1 ; de même, si $A \subset B$ alors le point qui représente A se trouve à gauche de celui qui représente B. Où se trouve le point qui représente l'ensemble des nombres premiers ?

(3) Poussières de Fatou

Dans un tout autre domaine, qui n'a *a priori* rien à voir avec les algèbres de Boole, G. Julia a démontré que, dans de nombreux cas, l'ensemble des nombres complexes qui sont invariants par une itérée d'une fraction rationnelle f (c'est-à-dire des z tels que ou bien $f(z) = z$, ou bien $f^2(z) = f \circ f(z) = z$ ou bien $f^3(z) = z$ etc.) est un espace de Cantor. C'est le cas en particulier si $f(z) = z^2 + c$ est du second degré et si c appartient au complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble de Mandelbrot $\mathfrak{M}$. Voici un exemple :

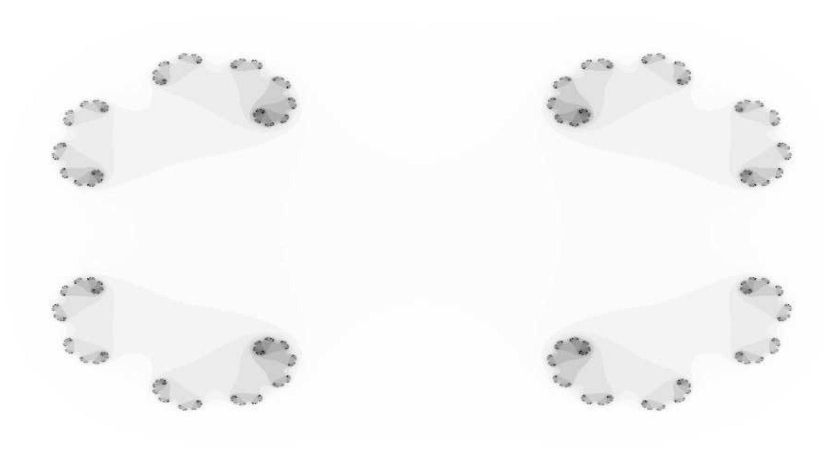


Figure 2 – ensemble de Julia de $z^2 + 0,5$

III / Logique floue

1) Normes et conormes

En logique floue, la valeur de vérité d'une proposition n'est plus nécessairement égale à 0 ou 1, mais elle appartient à $[0;1]$. Une négation est alors une fonction $n : [0,1] \to [0,1]$ telle que $n(0) = 1$, $n(1) = 0$ et $n \circ n = id$. En général on prend $n(x) = 1 - x$. La généralisation de la conjonction est une norme triangulaire, soit une fonction t des deux variables x et y telle que

- $t(x,y) = t(y,x)$ (commutativité)
- $t(x,t(y,z)) = t(t(x,y),z)$ (associativité)
- $t(x,y) \leqslant t(z,t)$ si $x \leqslant z$ et $y \leqslant t$ (monotonie)
- $t(x,1) = x$ (élément neutre).

L'équivalent de la disjonction inclusive est une conorme, définie de façon analogue, et souvent calculée à partir d'une norme appelée sa duale, avec les lois de DeMorgan ; il ne sera pas surprenant que les plus populaires des normes triangulaires soient le minimum et le produit :

noms	**normes**	**conormes**
Zadeh	$min(x,y)$	$max(x,y)$
probabiliste	xy	$x+y-xy$
Lukasiewicz	$min(x+y,1)$	$max(x+y-1,0)$

Voici les représentations graphiques des 3 principales normes triangulaires :

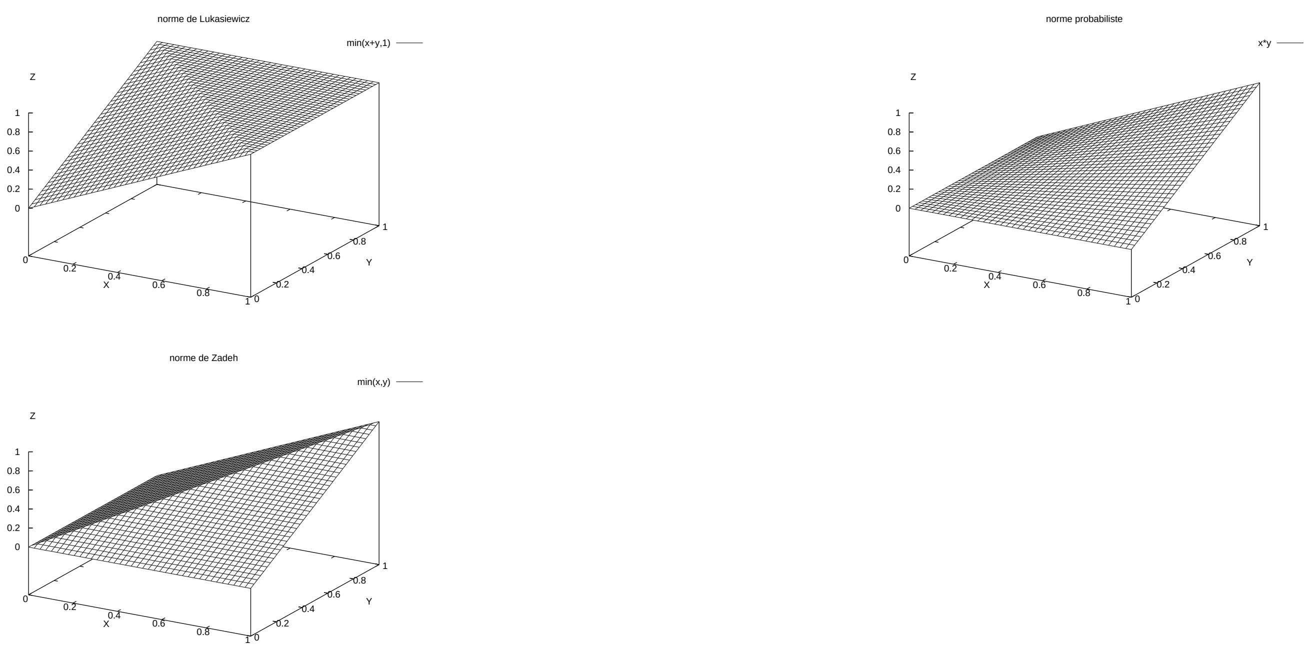


Figure 3 – normes triangulaires

et voici les représentations graphiques des conormes correspondantes :

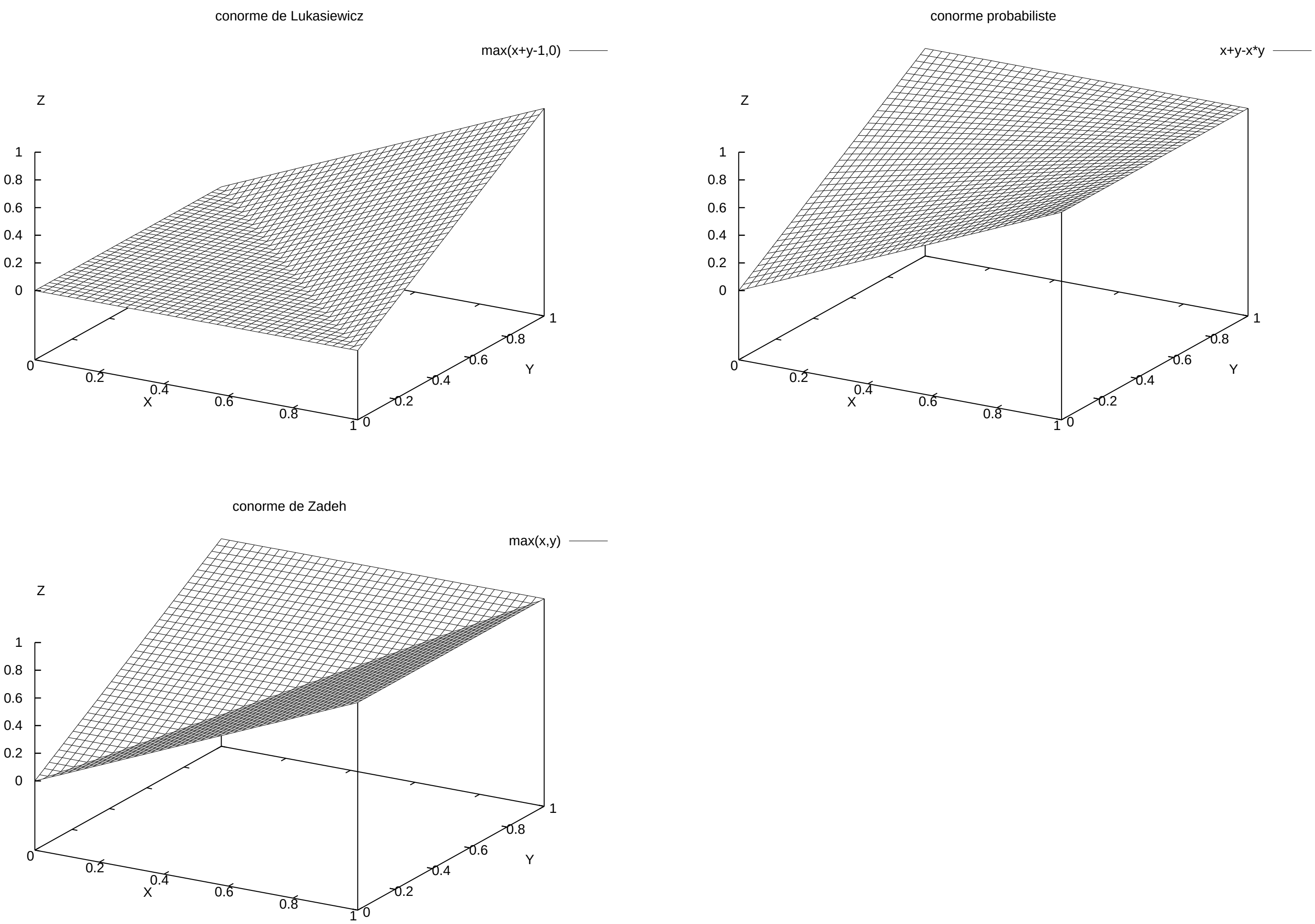


Figure 4 – conormes triangulaires

2) Implications floues

Pour pouvoir utiliser le modus ponens en logique floue, on est encore amené à adopter pour une implication floue, une fonction de x et y qui a tendance à être proche de 1 lorsque $x \leqslant y$, quitte à adopter les paradoxes de la logique formelle ("le faux implique le vrai"). Les principales implications floues sont les suivantes :

nom	**Calcul pour "x implique y"**
Brouwer-Gödel	1 si $x \geqslant y$ y sinon
Goguen	$min\left(\frac{x}{y}, 1\right)$ si $x \neq 0$ 1 sinon
Kleene-Dienes	$max(1-x, y)$
Lukasiewicz	$min(1-x+y, 1)$
Reichenbach	$1-x+xy$
Rescher-Gaines	1 si $x \geqslant y$ 0 sinon
Willmott	$max(1-x, min(x, y))$

On voit clairement sur les représentations graphiques des principales de ces implications floues, que la valeur de l'implication est élevée (proche de 1) lorsque x est petit et y grand (derrière à gauche sur la représentation graphique) :

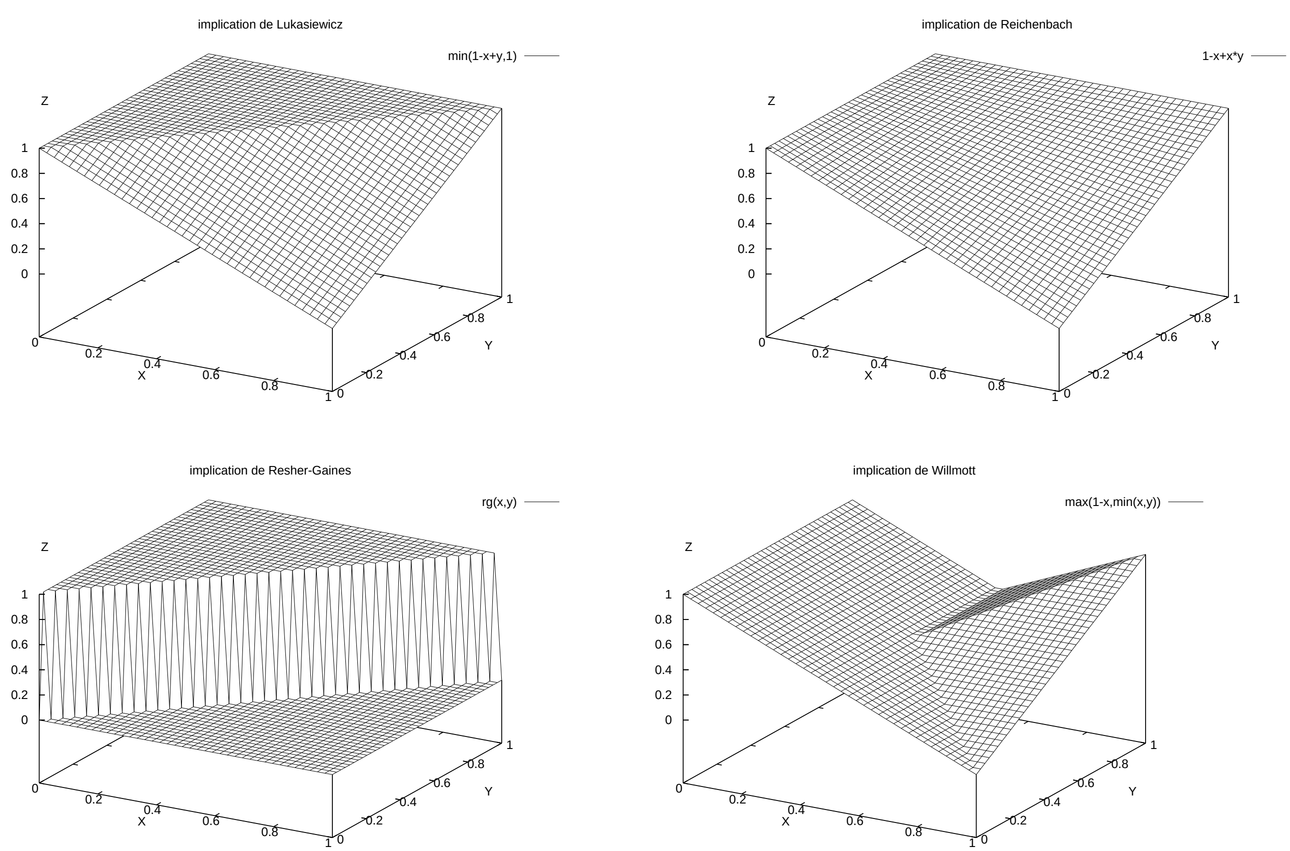


FIGURE 5 – implications floues

Conclusion

Si des propositions comme

- "Si $2+2=4$ alors les angles d'un triangle équilatéral mesurent $60°$ "
- "Si $2+2=5$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$"
- "Si $2+2=$5 alors tout angle est droit "

peuvent paraître paradoxales, elles sont des cas particuliers de la définition de l'implication comme $(p \Rightarrow q) \iff (\neg p \vee q)$ en logique propositionnelle, qui est une propriété algébrique des algèbres de Boole (celle de Lindenbaum en particulier), et qui semble être le seul moyen d'avoir une implication à sens unique. D'ailleurs le seul moyen d'éviter ce genre de paradoxes a été le rejet par la logique intuitionniste du "tiers-exclu" qui en algèbre de Boole s'écrit $p \vee \neg p$ ou $p+(1-p)=1$; c'est cher payer !...

UN : DES 6 TABLES

« Des chercheurs qui cherchent, on en trouve,
des chercheurs qui trouvent, on en cherche... »
(De Gaulle)

I / Table une : De la mathématique à la métamathématique

Pendant des siècles, les géomètres ont essayé de démontrer l'axiome des parallèles (la somme des angles d'un triangle est égale à un angle plat) par l'absurde, en supposant que ce n'était pas le cas et en essayant d'aboutir à une contradiction. Peine perdue, pas la moindre contradiction, et même au 19e siècle, des gens comme Bolyai et Lobatchevski ont construit des géométries où l'axiome des parallèles était faux, et qui étaient parfaitement cohérentes. Ceci a amené David Hilbert à abandonner les questions sur la véracité (laquelle des ces géométries est vraie ?) et proposé de remplacer les mots "point" et "droite" par "chopes de bière" et "tables" . Sur sa première table, David Hilbert a donc posé, non seulement sa chope, mais la pierre d'achoppement de la **métamathématique**, ou mathématique traitant des mathématiques, et déplacé le débat vers la notion de **cohérence**, ou **consistance**, d'une théorie mathématique $\mathfrak{T}$.

1) Notations

Lorsque la proposition p est vraie dans la théorie $\mathfrak{T}$, on note $\mathfrak{T} \models p$, et lorsque la proposition p est démontrable dans la théorie $\mathfrak{T}$, on note $\mathfrak{T} \vdash p$.
La structure de l'algèbre de Lindenbaum fait que si $p \Rightarrow q$ alors q est au moins aussi vrai que p : Le *modus ponens* fait fonctionner la logique de telle manière que, si les axiomes de $\mathfrak{T}$ sont vrais, alors tout ce qu'on en déduit est aussi vrai. Dit autrement : Les théorèmes de $\mathfrak{T}$ sont des tautologies (qu'on note $\top$). En bref :

$$\boxed{\mathfrak{T} \vdash p \Longrightarrow \mathfrak{T} \models p}$$

Ce résultat n'est pas un théorème mais un métathéorème : Il parle de la structure des mathématiques.

2) Complétude

La question se pose de la réciproque du métathéorème précédent : Est-ce que tout ce qui est vrai dans une théorie $\mathfrak{T}$ est forcément démontrable dans cette théorie ? Si c'est le cas, on dit que $\mathfrak{T}$ est **complète** . Avec les notations précédentes, une théorie complète est celle où, pour toute proposition p,

$$\boxed{\mathfrak{T} \models p \Rightarrow \mathfrak{T} \vdash p}$$

Tout à la fin du 19e siècle, la toute nouvelle théorie des ensembles, appelée *Principia Mathematica*, et notée $\mathfrak{E}$, venait d'être axiomatisée, et la question se posait donc de savoir si elle était complète, ainsi que l'arithmétique, la logique etc.

3) Consistance

Lorsque dans une théorie $\mathfrak{T}$, on peut démontrer à la fois une proposition p et son contraire $\neg p$, on dit que $\mathfrak{T}$ est **inconsistante** ; sinon on dit qu'elle est consistante, et on note $Cons(\mathfrak{T})$. Les théories inconsistantes ont des propriétés un peu étranges : Supposons que $\mathfrak{T}$ est inconsistante, alors par définition, il existe une proposition p telle que $\mathfrak{T} \vdash p$ et $\mathfrak{T} \vdash \neg p$ à la fois. Or en logique, si deux propositions sont des théorèmes, on considère démontrée leur conjonction ; dans le cas présent,

$$\mathfrak{T} \vdash p \wedge \neg p$$

soit

$$\mathfrak{T} \vdash \perp$$

où $\perp$ désigne une antilogie (contraire d'une tautologie, elles sont toutes équivalentes entre elles). Mais en logique on a également, pour toute proposition q, l'implication $\perp \Rightarrow q$. Le *modus ponens* donne alors

$$\mathfrak{T} \vdash q$$

Autrement dit, $\mathfrak{T}$ est complète ! Et en plus, on peut remplacer q par sa négation $\neg q$ puisque ce qui est écrit ci-dessus est vrai pour toute proposition q :

$$\mathfrak{T} \vdash \neg q$$

Une théorie inconsistante est complète et tout y est à la fois vrai et faux.

Donc si $\mathfrak{E}$ est inconsistante, aucune activité mathématique n'a plus aucun intérêt : L'édifice s'écroulerait du fait que ses fondations seraient en carton... Une double question se posait alors pour Hilbert :

- $\mathfrak{E}$ est-elle consistante ?
- Si oui, est-elle complète ?

Plus généralement, Hilbert se demandait si toute théorie consistante est complète.

II / Table deux : Le bolet rond de Gödel

Cette question de complétude a occupé toute la communauté mathématique pendant 30 ans, de 1900 à 1930. Sans succès. La surprise a été créée en 1930 par la publication d'une thèse de quelques pages où le tout jeune Kurt Gödel, alors inconnu de tous, démontrait que la logique des prédicats $\mathfrak{P}$ est complète : Toute phrase vraie en logique possède une démonstration. Ce métathéorème d'existence n'explique pas comment on la trouve...

Définition : On appelle phrase de Gödel de $\mathfrak{T}$ une proposition p telle que p est vraie sans être démontrable, ni que son contraire le soit :

- $\mathfrak{P} \models p$
- $\mathfrak{T} \nvdash p$
- $\mathfrak{T} \nvdash \neg p$

Alors le théorème de complétude de Gödel dit que si $\mathfrak{P}$ est consistante alors $\mathfrak{P}$ ne possède pas de phrase de Gödel.

Ce résultat a été une très bonne nouvelle pour les héritiers de Hilbert : L'espoir que l'arithmétique et même $\mathfrak{E}$ soient complètes permettait d'envisager qu'un chercheur en maths ne risque pas de chercher pour rien (s'il essaye de démontrer une phrase de Gödel, il risque d'en avoir pour un certain temps...).

La joie fut de Kurt, pardon, de courte durée :

III / Table trois : Incomplétude

En effet c'est en 1931 que Gödel, encore lui, démontrait que $\mathfrak{E}$ possède une phrase de Gödel $\mathfrak{g}$: La théorie des *principia mathematica* est incomplète. Et comme Gödel a utilisé l'arithmétique pour construire $\mathfrak{g}$, toute théorie mathématique suffisamment puissante pour contenir l'arithmétique est frappée de la même fragilité. C'est un peu comme si les chercheurs en maths avaient vu un énorme

brouillard tomber sur eux : On peut toujours essayer de démontrer un théorème, non seulement on n'est pas sûr d'y arriver, mais on n'est même plus certain que ce soit possible.
$\mathfrak{g}$ est une traduction arithmétique de $\mathfrak{E} \nvdash \mathfrak{g}$, d'où le métaraisonnement par l'absurde suivant :

$$\mathfrak{E} \vdash \mathfrak{g} \Rightarrow \mathfrak{E} \models \mathfrak{g} \Rightarrow \mathfrak{E} \nvdash \mathfrak{g}$$

On peut traduire par ceci : Si $\mathfrak{g}$ est un théorème, alors $\mathfrak{g}$ est vraie. Mais l'énoncé de $\mathfrak{g}$ est justement que $\mathfrak{g}$ n'est pas démontrable. Donc si $\mathfrak{g}$ est démontrable, alors elle ne l'est pas ! Cela fait penser à ces interlocuteurs têtus qui disent "C'est vrai puisque je le dis", mais, au risque de m'entêter, je dirais que cette fois-ci, c'est vraiment vrai, puisque je le dis, ou plutôt puisque $\mathfrak{g}$ le dit.
On a métadémontré ci-dessus que

$$\mathfrak{E} \nvdash \mathfrak{g}$$

et donc que

$$\mathfrak{E} \models \mathfrak{g}$$

(puisque $\mathfrak{g}$ le dit). Il métarésulte alors du principe du tiers exclu (une proposition ne peut être à la fois vraie et fausse), que

$$\mathfrak{E} \not\models \neg\mathfrak{g}$$

d'où, par métacontraposition,

$$\mathfrak{E} \nvdash \neg\mathfrak{g}$$

Les trois conclusions écrites en bleu se résument à "$\mathfrak{g}$ est une phrase de Gödel de $\mathfrak{E}$" .

IV / Table quatre : Inconsistance ?

Tout ce qui précède présuppose que $\mathfrak{E}$ est consistante, ce qu'on écrit $Cons(\mathfrak{E})$. On peut métarésumer la table trois à

$$\boxed{Cons(\mathfrak{E}) \Rightarrow \mathfrak{g}}$$

Maintenant si on avait

$$\mathfrak{E} \vdash Cons(\mathfrak{E})$$

le *modus ponens* permettrait d'en métadéduire avec le métarésumé ci-dessus que

$$\mathfrak{E} \vdash \mathfrak{g}$$

ce qui, on l'a vu ci-dessus, n'est pas le cas. On a donc métaprouvé par l'absurde que

$$\boxed{\mathfrak{E} \nvdash Cons(\mathfrak{E})}$$

Et c'est pareil avec toute théorie mathématique assez puissante pour contenir l'arithmétique : On ne peut pas prouver qu'une telle théorie est consistante. Pour poursuivre l'image précédente, non seulement Gödel annonce aux chercheurs en maths qu'ils progressent dans le brouillard, mais en plus que leur édifice est peut-être basé sur des fondations fragiles, et que personne ne pourra jamais leur garantir leur sécurité.
Par ailleurs, si on pouvait démontrer que $\mathfrak{E}$ n'est pas consistante, alors elle ne le serait pas et on pourrait y démontrer tout, y compris qu'elle est consistante. Donc

$$\boxed{\mathfrak{E} \nvdash \neg Cons(\mathfrak{E})}$$

La présente table se résume alors à
"La consistance de $\mathfrak{E}$ est une phrase de Gödel" ,
ou à : Si une théorie est consistante, alors on ne peut pas prouver qu'elle l'est (par contre si elle est inconsistante, on peut prouver qu'elle est consistante !).

V / Table cinq : Le choix choit dans les choux

Lorsqu'une dame riche doit sortir, elle peut pour se préparer, choisir une paire de chaussures dans son immense collection de chaussures, une paire de bas parmi ses bas, une jupe parmi toutes les jupes de sa collection, une veste qu'elle estime assortie, un chapeau qui lui paraît approprié, et la pudeur nous interdit de détailler les autres pièces vestimentaires qu'elle portera sous ce costume...
L'axiome du choix dit que ce choix est encore possible si la dame a une infinité de tiroirs avec une infinité de pièces vestimentaires à porter. Ce qui est tellement évident qu'on adopte spontanément un tel axiome.
Définition : On appelle bon ordre sur un ensemble $\mathcal{E}$ une relation $\preccurlyeq$ telle que toute partie non vide de $\mathcal{E}$ admette un plus petit élément.
Par exemple, pour $\mathbb{N}$, la relation $\leqslant$ est un bon ordre.
Mais pas pour $\mathbb{Z}$: L'ensemble des entiers pairs négatifs n'a pas de plus petit élément.
Or l'axiome du choix est équivalent à l'énoncé suivant :
Tout ensemble $\mathcal{E}$ possède un bon ordre .
Pour $\mathbb{Z}$ ce n'est évidemment pas $\leqslant$ et d'ailleurs personne ne l'a trouvé, mon bon Monsieur, ce fameux bon ordre sur $\mathbb{Z}$.
Il est tellement évident que cette existence d'un bon ordre sur tout ensemble ne peut pas être vraie, qu'on refuse spontanément un tel axiome.
Seulement il est équivalent à l'axiome du choix, que par contre on avait accepté tout aussi spontanément...
D'où le choix cornélien à faire sur l'axiome du choix :
"Axiome du choix ou pas axiome du choix ? Tel est le choix !"
En notant AC l'axiome du choix, Gödel (encore lui !) a démontré en 1938 que l'axiome du choix ne peut être réfuté :

$$\boxed{\mathfrak{E} \nvdash \neg AC}$$

(à condition toutefois que $Cons(\mathfrak{E})$...)
Et en 1963, c'est Paul Cohen qui a démontré que l'axiome du choix ne peut pas non plus être démontré :

$$\boxed{\mathfrak{E} \nvdash AC}$$

Les résultats de Gödel et de Cohen se résument alors à :
"L'axiome du choix est une phrase de Gödel" .

VI / Table six : et ça continue avec une autre hypothèse

On appelle cardinal d'un ensemble fini, le nombre d'éléments qu'il contient. Cette définition présente un intérêt parce que, lorsque deux ensembles finis ont le même cardinal, on peut faire correspondre leurs éléments un par un. Ainsi, toutes les paires ont deux éléments, et si le couple Dupont et le couple Durand sont considérés comme équivalents, c'est bien parce qu'il est possible de faire correspondre Monsieur Dupont avec Monsieur Durand, et Madame Dupont avec Madame Durand (il est également possible de faire correspondre Monsieur Dupont avec Madame Durand

mais la morale le réprouve, d'ailleurs ce sont leurs affaires, et elles ne nous regardent pas).
Il est également possible d'ordonner les cardinaux des ensembles finis : On dit que le cardinal $\mathfrak{m}$ est plus petit que le cardinal $\mathfrak{n}$ si un ensemble à $\mathfrak{m}$ éléments est inclus dans un ensemble à $\mathfrak{n}$ éléments, et dans ce cas on note $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$. Si, en plus, on ne peut pas faire correspondre un ensemble à $\mathfrak{m}$ éléments avec un ensemble à $\mathfrak{n}$ éléments, on écrit $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$.
Par exemple, le plus petit cardinal est celui de $\emptyset$, soit 0. Le suivant est celui des singletons, soit 1. etc.
Il y a une formule pour obtenir le cardinal de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ d'un ensemble $\mathcal{E}$ à $\mathfrak{n}$ éléments : Le cardinal de $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ est égal à $2^{\mathfrak{n}}$. Par exemple, pour l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ de cardinal 5, on a 32 parties :

- une partie à 0 élément : $\emptyset$;
- 5 parties à 1 élément : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$ et $\{5\}$;
- 10 parties à 2 éléments : $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$ $\{3, 5\}$, et $\{4, 5\}$;
- 10 parties à trois éléments parce que choisir 3 éléments, c'est en laisser 2 ;
- 5 parties à 4 éléments parce que choisir 4 éléments, c'est en laisser 1 ;
- et le total $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ qui a 5 éléments.

En tout, $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$.
Tout ça s'étend aux ensembles infinis : Alors que le plus petit cardinal infini est celui de $\mathbb{N}$ (mais aussi de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{Q}$ parce qu'on peut les mettre en correspondance avec $\mathbb{N}$), que l'on note $\aleph_0$, le cardinal de $\mathbb{R}$ se note $2^{\aleph_0}$. En effet l'écriture décimale infinie des réels permet de considérer ceux-ci comme des suites d'entiers, donc des parties de $\mathbb{N}$. On note $\aleph_1$ le plus petit cardinal strictement supérieur à $\aleph_0$. Alors

- $\aleph_0 < \aleph_1$ par définition de $\aleph_1$ (le plus petit de la catégorie "supérieur" est supérieur)
- $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$ (puisque c'est le plus petit)

En résumé :

$$\boxed{\aleph_0 < \aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}}$$

On ne connaît pas de cardinal non dénombrable plus petit que celui de $\mathbb{R}$. Mais ça ne veut pas dire qu'il n'y en a pas :
Définition : On appelle hypothèse du continu l'affirmation selon laquelle il n'y a pas de cardinal infini intermédiaire entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$, elle se note

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

et sa négation est donc

$$2^{\aleph_0} > \aleph_1$$

Un air de déjà-vu (on note HC l'hypothèse du continu) :
En 1938, Gödel montrait que l'hypothèse du continu n'est pas réfutable :

$$\boxed{\nvdash \neg HC}$$

Et en 1963, Paul Cohen montrait que l'hypothèse du continu n'est pas démontrable non plus :

$$\boxed{\nvdash HC}$$

Le tout se résume encore une fois par :
"L'hypothèse du continu est une phrase de Gödel" .

3 **Où l'on apprend que l'apprentissage consiste en ce que la connaissance croît avec le temps, alors que l'oubli consiste en ce que la connaissance décroît avec le, avec le ... avec le quoi déjà ?**

PROBLÈME DE CHAPEAUX EN LOGIQUE ÉPISTÉMIQUE

Deux personnes, Aréthuse et Bellérophon , jouent au jeu suivant : Dans un premier temps, on puise dans une boîte contenant trois chapeaux verts et un chapeau rouge , deux chapeaux, dans l'obscurité, et on en met un sur la tête d'Aréthuse et un autre sur la tête de Bellérophon . Puis on allume la lumière, de telle sorte que chacun des joueurs voie la couleur du chapeau de l'autre personne mais pas celle du sien, et on demande aux deux joueurs s'ils arrivent à deviner la couleur de leur propre chapeau. *Au bout de quelques instants* , Bellérophon dit que oui ; l'objet du problème est d'en déduire la couleur du chapeau de Bellérophon . Mais l'objet de cet article est d'étudier le problème, et quelques problèmes analogues, du point de vue de la logique épistémique temporelle.

I / Logique temporelle épistémique à deux agents

1) Notations

Pour une proposition p (vraie ou fausse), on définit deux nouvelles propositions notées $K_a p$ et $K_b p$ signifiant respectivement :
$K_a p$: « Aréthuse sait que p »
et
$K_b p$: « Bellérophon sait que p »
(K est l'initiale du verbe anglais « know »), désignant d'une part le fait que p est avérée, d'autre part le fait que, d'une manière ou d'une autre, Aréthuse (respectivement Bellérophon) a accès à cette information.
On note A la proposition « Le chapeau d'Aréthuse est rouge », A la proposition « Le chapeau d'Aréthuse est vert », B la proposition « Le chapeau de Bellérophon est rouge », et B la proposition « Le chapeau de Bellérophon est vert ».
Par exemple, $K_a K_b B$ signifie que le chapeau de Bellérophon est rouge, que Bellérophon le sait, et qu' Aréthuse a compris que Bellérophon le sait.
On note $\neg p$ la négation de la proposition p, $p \wedge q$ la conjonction des propositions p et q et $p \vee q$ la disjonction inclusive de p et q.
On suppose que le temps s'écoule de manière discrète (les éclairs de génie apparaissent une fois par minute) et on note $\odot p$ la proposition « p sera vraie dans une minute », $\diamond p$ la proposition « p sera vraie au moins une fois dans le futur » et $\Box p$ la proposition « p est vraie et le restera

toujours ≫.
Pour une proposition p, on note $\models p$ le fait que p est vraie, et $\Vdash p$ le fait que p est démontrée.

2) Axiomes

On prend pour systèmes d'axiomes de la logique épistémique temporelle les suivants :

- ⊚ Les tautologies, c'est-à-dire les propositions p vraies ;
- ⊚ $K_ap \Rightarrow p$ et $K_bp \Rightarrow p$ (*ni Aréthuse , ni Bellérophon ne peuvent savoir quelque chose de faux*)
- ⊚ $K_ap \Longrightarrow (K_a(p \Rightarrow q) \Rightarrow K_aq)$
  et
  $K_bp \Longrightarrow (K_b(p \Rightarrow q) \Rightarrow K_bq)$
  (*la connaissance de p et de $p \Rightarrow q$ entraîne celle de q*)
- ⊚ $K_ap \Rightarrow K_aK_ap$ et $K_bp \Rightarrow K_bK_bp$ (*axiomes d'introspection positive*)
- ⊚ $\neg K_ap \Rightarrow K_a\neg K_ap$ et $\neg K_bp \Rightarrow K_b\neg K_bp$ (*axiomes d'introspection négative*)
- ⊚ $\Box p \Rightarrow (p \wedge \Box\Box p)$ (*l'éternité commence maintenant et est elle-même éternelle*)
- ⊚ $K_a\Box p \Rightarrow \Box(K_a\Box p)$ et $K_b\Box p \Rightarrow \Box(K_b\Box p)$ (*la connaissance d'une éternité est elle-même éternelle*)
- ⊚ $\diamond p \wedge \Box(\odot p \Rightarrow p) \Longrightarrow p$ (*on peut faire des récurrences décroissantes sur le temps*)
- ⊚ $\diamond p \Leftrightarrow (p \vee \odot\diamond p)$ (*ce qui est inéluctable et qui n'est pas déjà arrivé, sera toujours inéluctable dans une minute*)

3) Quelle est la couleur du chapeau de Bellérophon ?

Puisqu'il n'y a qu'un chapeau rouge , on a de plus les propositions suivantes :

- ⊛ $A \Rightarrow B$
- ⊛ $B \Rightarrow A$
- ⊛ $A \Rightarrow K_bA$ (*chacun connaît la couleur du chapeau de l'autre*)
- ⊛ $A \Rightarrow K_bA$
- ⊛ $B \Rightarrow K_aB$
- ⊛ $B \Rightarrow K_aB$
- ⊛ $K_ap \Rightarrow \odot K_bK_ap$ (*il faut environ une minute à chacun, pour deviner les connaissances de l'autre*)
- ⊛ $\neg K_ap \Rightarrow \odot K_b\neg K_ap$
- ⊛ $K_bp \Rightarrow \odot K_aK_bp$
- ⊛ $\neg K_bp \Rightarrow \odot K_a\neg K_bp$

On peut alors formaliser le raisonnement suivant :

- ♣ $B \Rightarrow A$ (*deuxième des propositions précédentes*)
- ♣ $K_a(B \Rightarrow A)$ (*règle de déduction de la logique épistémique : de toute tautologie p, on peut inférer K_ap et K_bp*)
- ♣ $B \Rightarrow K_aB$ (*sixième des propositions précédentes*)
- ♣ $B \Rightarrow K_aA$ (*troisième axiome appliqué aux deux lignes précédentes*)
- ♣ $\neg K_aA \Rightarrow B$ (*contraposée de la précédente*)
- ♣ $\odot(\neg K_aA \Rightarrow B)$ (*théorème de logique temporelle*)
- ♣ Or $\neg K_aA$ (*Sinon Aréthuse aurait triomphalement annoncé sa découverte*)
- ♣ Donc $\odot K_b\neg K_aA$ (*antépénultième des propositions précédentes*)
- ♣ Finalement $\odot K_bB$ (*en appliquant le troisième axiome à la ligne précédente et à celle qui se trouve trois lignes au-dessus*).

En résumé :

$$\Vdash \odot K_bB$$

Donc

$$\models \odot K_bB$$

Le chapeau de Bellérophon est donc vert , et Bellérophon le sait au bout d'une minute ; Aréthuse par contre, le savait tout de suite. De même, le chapeau d'Aréthuse est aussi vert , et Aréthuse aussi le sait au bout d'une minute. Au même moment, elle apprend que Bellérophon sait que son chapeau à lui est vert :

$$\odot K_a K_b B$$

et bien sûr aussi $\odot K_b K_a A$.

4) Et ensuite ?

Par contre, on a supposé que $\odot K_b K_a K_b B$ n'était pas vrai immédiatement, mais que par contre :

$$\odot \odot K_b K_a K_b B$$

(au bout de deux minutes, Bellérophon sait qu'Aréthuse a compris qu'elle était consciente de la couleur de son propre chapeau)

Définition :

Une proposition p est dite de notoriété publique entre Aréthuse et Bellérophon si, pour toute suite de naturels a_n, b_n, ... , a_k, b_k, ... , a_3, b_3, a_2, b_2, a_1, b_1, on a :

$$K_a^{a_n} K_b^{b_n} ... K_a^{a_3} K_b^{b_3} K_a^{a_2} K_b^{b_2} K_a^{a_1} K_b^{b_1} p$$

Il résulte de ce qui précède que la couleur des chapeaux de Aréthuse et Bellérophon n'est jamais de notoriété publique entre eux deux ...

Si par contre le chapeau de l'un d'entre eux était rouge , ce fait deviendrait de notoriété publique pour ainsi dire instantanément.

II / Logique temporelle épistémique multi-agents

1) Trois agents

On suppose maintenant que Clytemnestre se joint au jeu, et on note $K_c p$ le fait que Clytemnestre connaisse p, C le fait que Clytemnestre ait un chapeau vert et C le fait que le chapeau de Clytemnestre soit rouge .

Aux axiomes du I on ajoute les suivants :

⊚ $K_c p \Rightarrow p$

⊚ $K_c p \Longrightarrow (K_c(p \Rightarrow q) \Rightarrow K_c q)$

⊚ $K_c p \Rightarrow K_c K_c p$ et $\neg K_c p \Rightarrow K_c \neg K_c p$

⊚ $K_c \Box p \Rightarrow \Box(K_c \Box p)$

On a aussi :

⊛ $K_a p \Rightarrow \odot K_c K_a p$

⊛ $K_b p \Rightarrow \odot K_c K_b p$

⊛ $\neg K_a p \Rightarrow \odot K_c \neg K_a p$

⊛ $\neg K_b p \Rightarrow \odot K_c \neg K_b p$

⊛ $K_c p \Rightarrow \odot K_a K_c p$

⊛ $K_c p \Rightarrow \odot K_b K_c p$

⊛ $\neg K_c p \Rightarrow \odot K_a \neg K_c p$

⊛ $\neg K_c p \Rightarrow \odot K_b \neg K_c p$

a) Trois chapeaux verts et un chapeau rouge

Dans ce cas, on a aussi :

⊛ $A \Rightarrow C$

⊛ $B \Rightarrow C$

⊛ $C \Rightarrow A$

⊛ $C \Rightarrow B$
⊛ $A \Rightarrow K_c A$
⊛ $B \Rightarrow K_c B$
⊛ $A \Rightarrow K_c A$
⊛ $B \Rightarrow K_c B$
⊛ $C \Rightarrow K_a C \wedge K_b C$
⊛ $C \Rightarrow K_a C \wedge K_b C$

Alors le raisonnement du I s'applique sans aucune modification, et le résultat est donc le même : Le chapeau de Bellérophon est toujours vert ; ce fait n'est toujours pas de notoriété publique entre les trois agents. On imagine aisément la généralisation du problème à n agents, avec un chapeau rouge et $n+1$ ou $n+2$ chapeaux verts : même raisonnement, même résultat .

b) Trois chapeaux verts et deux chapeaux rouges

Dans ce cas, au lieu des implications du type $A \Rightarrow B$, on a :

⊛ $A \wedge B \Rightarrow C$
⊛ $A \wedge C \Rightarrow B$
⊛ $B \wedge C \Rightarrow A$

Le raisonnement devient alors :

♣ $B \wedge C \Rightarrow A$
♣ donc $K_a(B \wedge C \Rightarrow A)$
♣ $B \wedge C \Rightarrow K_a(B \wedge C)$
♣ donc $B \wedge C \Rightarrow K_a A$
♣ soit $\neg K_a A \Rightarrow (C \vee B)$
♣ d'où $\odot(\neg K_a A \Rightarrow (C \vee B))$
♣ Or $\neg K_a A$
♣ Donc $\odot K_b(C \vee B)$
♣ De même $\odot K_b(A \vee B)$ (*en faisant jouer à Clytemnestre le rôle interprété par Aréthuse dans le raisonnement précédent*)
♣ D'où $\odot K_b((C \vee B) \wedge (A \vee B))$
♣ Soit $\odot K_b B$.

Bref, là encore,

$$\models \odot K_b B$$

Le chapeau de Bellérophon est toujours vert : Etonnant, non ? ...

2) n agents

En généralisant le raisonnement précédent, on trouve que tant que le nombre de chapeaux rouges est inférieur à n et au nombre de chapeaux verts , celui de Bellérophon est toujours vert : Il ne serait pas un peu irlandais, ce Bellérophon ?

La couleur du chapeau de Bellérophon n'est toujours pas un fait de notoriété publique sauf après un temps infini, ou sauf s'il est rouge .

III / Théorie de l'information de Fisher

La logique épistémique temporelle, apparemment inventée par Rohith Parikh pour l'informatique théorique, n'est pas le seul outil qui permette de voir comment les connaissances évoluent dans le temps : Comme l'a montré John Nash (le héros de film), la statistique le permet aussi. Dans la suite, les lettres A , B ,C , A , B et C désignent non plus des propositions, mais des événements dont la probabilité est destinée à croître dans un processus typiquement Bayésien.

1) Principe de la méthode

Si E désigne un événement conditionnant (dont la réalisation apporte une information qui modifie la probabilité de B , il y a deux manières d'écrire la probabilité de $E \cap B$:

$$P(E \cap B) = P_E(B)P(E) = P_B(E)P(B)$$

On déduit de l'égalité des deux derniers membres :

$$P_E(B) = \frac{P_B(E)}{P(E)} P(B) = LR \quad P(B)$$

en posant $LR = \dfrac{P_B(E)}{P(E)}$ (*"likelyhood ratio" ou rapport de vraisemblances*) : La réalisation de E amène les agents à remplacer $P(B)$ par $P_E(B)$ qui est plus grand si $LR > 1$.

2) Exemple 1

Dans le premier cas (trois chapeaux verts et un chapeau rouge), on a $P(B) = \dfrac{3}{4}$ et, pour événement conditionnant, on choisit « personne n'a réagi au cours de la première minute », ce qui revient à dire que personne n'a vu de chapeau rouge, donc que les deux chapeaux sont verts.

Alors $P(E) = \dfrac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ et $P_B(E) = \dfrac{2}{3}$ (puisque Bellérophon a déjà un chapeau vert , deux choix parmi les trois restants donnent à Aréthuse aussi un chapeau vert).

Alors $LR = \dfrac{4}{3}$ et $P_E(B) = \dfrac{4}{3} \quad \dfrac{3}{4} = 1$: A la lumière de l'information E, l'événement B est maintenant certain, sa probabilité étant passée de $\dfrac{3}{4}$ à 1 ! ...

3) Exemple 2

Dans le troisième cas (trois chapeaux verts et deux chapeaux rouges), on a $P(B) = \dfrac{3}{5}$ et, pour événement conditionnant, on choisit « personne n'a réagi au cours de la première minute », ce qui revient à dire que personne n'a vu deux chapeaux rouges , donc qu'il y a au moins deux chapeaux verts .

Alors $P(\overline{E}) = \dfrac{3}{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}} = \dfrac{3}{10}$ (*probabilité qu'il y ait deux chapeaux rouges*), et donc

$$P(E) = \frac{7}{10}$$

Ensuite, comme $P_B(\overline{E}) = \dfrac{1}{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}} = \dfrac{1}{6}$, on a

$$P_B(E) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Ce qui donne

$$LR = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{10}} = \frac{25}{21}$$

Ici $P_E(B) = \dfrac{25}{21} \quad \dfrac{3}{5} = \dfrac{5}{7}$: La probabilité de B a augmenté (passant de $\dfrac{3}{5}$ à $\dfrac{5}{7}$) mais pour l'instant l'événement B n'est pas encore certain : Il faut un autre événement conditionnant (autrement dit, des informations supplémentaires).
En fait, si on résume le raisonnement du II.1.b, on obtient quelque chose comme ceci :

♣ Au temps $t = 0$, personne ne réagit : donc il n'y a pas plus d'un chapeau rouge (sinon, la personne qui en aurait vu deux, aurait tout de suite su que son propre chapeau était vert)

♣ Au temps $t = 1$, toujours aucune réaction ; mais s'il y avait un chapeau rouge , ceux qui l'eussent vu, en eussent déduit d'après le point précédent, que leur propre chapeau est vert ;

♣ Au temps $t = 2$, Bellérophon en déduit donc que son chapeau est vert , car sinon quelqu'un d'autre eût réagi avant.

L'événement conditionnant sera donc F : « Personne n'a vu de chapeau rouge », soit : Il n'y a pas de chapeau rouge .

Alors $P(F) = \dfrac{1}{\binom{5}{3}} = \dfrac{1}{10}$

et

$$P_B\,(F) = \frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$$

Ce qui donne

$$LR = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{10}} = \frac{5}{3}$$

Finalement $P_F(B\ ) = \dfrac{5}{3}\ \ \dfrac{3}{5} = 1$: L'événement B est maintenant certain.

(Remarque : On vient de prouver que, si tous les chapeaux sont verts , alors celui de Bellérophon l'est aussi : On s'en serait légèrement douté...)

Hats off, folks !

LA SURPRISE, C'EST QU'IL N'Y A PAS DE SURPRISE

" Je sais que je ne sais rien,
C'est rien, mais cela, je le sais "
(Jean Gabin)

I / Énoncé du paradoxe

Un professeur annonce à sa classe qu'il compte lui donner une interrogation surprise la semaine prochaine (allant de lundi à vendredi) ; un étudiant lui démontre par récurrence (et par l'absurde), l'impossibilité de réaliser ce projet :

- Si la date prévue avait été vendredi, constatant jeudi soir que l'interrogation n'a toujours pas eu lieu, les étudiants en déduiraient que l'interrogation aurait lieu vendredi, et ce ne serait plus une surprise. Par conséquent, l'interrogation ne peut avoir lieu le vendredi ;
- Mais à la lumière de cette information, elle ne peut pas plus avoir lieu le jeudi, puisque sachant désormais qu'elle n'aura pas lieu le vendredi, les étudiants sauraient le mercredi soir qu'ils seront interrogés le jeudi, et là encore, ce ne serait plus une surprise...
- Résumons alors l'information dont sont détenteurs ces étudiants chanceux (du moins le croient-ils, hin hin...) : L'interrogation n'aura lieu ni jeudi, ni vendredi, car alors ils le sauraient d'avance et il n'y aurait plus d'effet de surprise. Mais alors, si elle avait lieu le mercredi, les étudiants, déjà riches en informations, le sauraient le mardi soir, ce qui est contradictoire. Par conséquent l'interrogation ne peut avoir lieu que le lundi ou le mardi ;
- Mais si c'était le mardi, on le saurait dès le lundi soir ; contradiction donc l'interrogation aura lieu lundi car c'est la seule possibilité ;
- Donc il n'y a plus de surprise puisque maintenant, on le sait. L'interrogation surprise est donc impossible.

Aussi, lorsque l'interrogation survient le mercredi, les étudiants sont très surpris...

La question est évidemment de savoir où se trouve la faille dans le raisonnement de l'étudiant...

II / Approche probabiliste (d'après Alain Testard)

1) Probabilités conditionnelles

A priori, l'interrogation avait autant de chances de se dérouler le lundi que chacun des autres jours de la semaine, et donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{lundi}) &= \frac{1}{5}\\
\mathrm{P}(\text{mardi}) &= \frac{1}{5}\\
\mathrm{P}(\text{mercredi}) &= \frac{1}{5}\\
\mathrm{P}(\text{jeudi}) &= \frac{1}{5}\\
\mathrm{P}(\text{vendredi}) &= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

L'événement "l'interrogation a lieu le mardi" est incompatible avec l'événement "l'interrogation a lieu le lundi" et

$$\mathrm{P}(\text{mardi}) = \mathrm{P}_{\overline{\text{lundi}}}(\text{mardi})\,\mathrm{P}(\overline{\text{lundi}}) = \frac{1}{4}(1 - \mathrm{P}(\text{lundi})) = \frac{1}{4}\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

($\mathrm{P}_{\overline{\text{lundi}}}(\text{mardi}) = \dfrac{1}{4}$ parce que, sachant que l'interrogation n'a pas eu lieu le lundi, il reste quatre jours possibles, et qu'ils sont *a priori* équiprobables). De même,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{mercredi}) &= \mathrm{P}_{\overline{\{\text{lundi},\text{mardi}\}}}(\text{mercredi})\,\mathrm{P}(\overline{\{\text{lundi},\text{mardi}\}})\\
&= \frac{1}{3}(1 - \mathrm{P}(\{\text{lundi},\text{mardi}\})) = \frac{1}{3}\frac{3}{5} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

mais aussi

$$\mathrm{P}\,(\text{jeudi}) = \mathrm{P}_{\{\text{jeudi},\text{vendredi}\}}(\text{jeudi})\,\mathrm{P}(\{\text{jeudi},\text{vendredi}\}) = \frac{1}{2}\frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

et

$$\mathrm{P}(\text{vendredi}) = \mathrm{P}_{\overline{\{\text{lundi},\text{mardi},\text{mercredi},\text{jeudi}\}}}(\text{vendredi})$$

2) Résumé

Si on note p_n la probabilité que l'interrogation ait lieu le jour n sachant qu'elle n'a pas eu lieu les jours précédents, on a

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{5}\\
p_2 &= \frac{1}{4}\\
p_3 &= \frac{1}{3}\\
p_4 &= \frac{1}{2}\\
p_5 &= 1
\end{aligned}$$

Donc, si la probabilité conditionnelle qu'il y ait une interrogation aujourd'hui sachant qu'il n'y en a pas eu avant, est croissante, elle est différente de zéro et de un les quatre premiers jours, ce qui laisse donc bien de la marge pour un effet de surprise. L'erreur de l'étudiant semble provenir d'une confusion entre probabilité et probabilité conditionnelle...

III / Approche épistémique

1) Logique épistémique

La logique épistémique, ou logique du savoir, est obtenue en ajoutant aux axiomes de la logique propositionnelle, l'opérateur K (comme "knowledge"), la proposition Kp signifiant "on sait que p", et les axiomes suivants :

$$\mathrm{Kp} \Rightarrow p$$
$$\mathrm{Kp} \Rightarrow \mathrm{KKp}$$
$$\neg \mathrm{Kp} \Rightarrow K\neg \mathrm{Kp}$$
$$[\mathrm{Kp} \wedge K(p \Rightarrow q)] \Rightarrow \mathrm{Kq}$$

signifiant respectivement :

- Si on sait p, alors p est vrai (on ne peut pas savoir quelque chose de faux)
- Si on sait p, alors on sait qu'on le sait (axiome d'introspection positive)
- Si on ne sait pas si p, alors on sait qu'on l'ignore (axiome d'introspection négative)
- La connaissance de p et de $p \Rightarrow q$ entraîne celle de q

et les régles de dérivation habituelles, plus celle-ci : de $p \Rightarrow q$, on peut dériver $\mathrm{Kp} \Rightarrow \mathrm{Kq}$

Théorème 1 *Pour toute proposition p,*

$$K\neg p \Rightarrow \neg \mathrm{Kp}$$

Démonstration :

- $K\neg p \Rightarrow \neg p$ (premier des quatre axiomes ci-dessus, appliqué à $\neg p$)
- $\neg p \Rightarrow \neg \mathrm{Kp}$ (contraposée du premier des quatre axiomes ci-dessus)
- $K\neg p \Rightarrow \neg p \Rightarrow \neg \mathrm{Kp}$ cqfd

Ainsi, puisque l'étudiant sait qu'il n'y aura pas d'interrogation surprise, il ne sait pas qu'elle aura lieu, et la surprise est totale ! Ici on retrouve le fait que, d'une antilogie, on peut déduire n'importe quoi, ce qui tend à montrer que la logique épistémique est non contradictoire (elle l'est, cela a été démontré, et elle est même complète).

Théorème 2

$$K\neg Kp \Rightarrow KK\neg \mathrm{Kp}$$

Démonstration : C'est l'axiome d'introspection positive, appliqué à $K\neg Kp$. Ce résultat est une version formelle de la citation du début de cet article...

2) Logique temporelle

Rohit Parikh introduit la notion de logique à la fois temporelle et épistémique, la valeur de vérité de certaines propositions comme la survenue de l'interrogation par exemple, dépendant du temps (la phrase "l'interrogation a lieu aujourd'hui" n'a pas la même valeur lundi (elle est fausse) et mercredi (elle est vraie)). Dans son système, il ajoute aux axiomes de la logique épistémique, ceux-ci :

$$\Box p \Rightarrow [p \wedge \Box\Box p]$$
$$\odot\neg p \Leftrightarrow \neg \odot p$$
$$\odot(p \Rightarrow q) \Rightarrow [\odot p \Rightarrow \odot q]$$
$$\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow [\Box p \Rightarrow \Box q]$$
$$\Box p \Rightarrow \odot p$$
$$\Box\,[p \Rightarrow \odot p] \Rightarrow [p \Rightarrow \Box p]$$
$$[\diamond p \wedge \Box(\odot p \Rightarrow p)] \Rightarrow p$$
$$\diamond p \Leftrightarrow [p \vee \odot \diamond p]$$
$$K(\Box p) \Rightarrow \Box\,[K(\Box p)]$$

qui nécessitent quelques éclaircissements sur les notations utilisées :

- $\neg$ désigne la négation
- $\wedge$ et $\vee$ désignent la conjonction "et" et la disjonction "ou inclusif" respectivement
- $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ désignent l'implication et l'équivalence logique
- K désigne l'opérateur de connaissance comme précédemment
- $\odot p$ veut dire "p sera vraie demain"
- $\Box p$ signifie "p sera toujours vraie, à partir de maintenant"
- $\diamond p$ veut dire "p sera vraie au moins une fois dans l'avenir" ; elle est définie par

$$\diamond p \Leftrightarrow \neg\Box\neg p$$

Tentons maintenant une traduction en langage courant des différents axiomes :

- Si p est toujours vraie, alors elle est vraie aujourd'hui, et le restera dans le futur
- Ce qui sera faux demain est ce qui ne sera pas vrai demain
- Si p et $p \Rightarrow q$ seront vrais demain, alors q sera vrai demain
- Si p et $p \Rightarrow q$ seront toujours vrais, alors q sera toujours vrai
- Si p est toujours vrai, alors p sera vrai demain
- Si, chaque fois que p est vrai un jour, alors il est vrai le lendemain, alors dès que p est vrai, il l'est pour toujours (on peut faire un raisonnement par récurrence sur le temps)
- Si p sera vrai au moins une fois dans l'avenir, et qu'il ne peut jamais être vrai le lendemain sans être vrai le jour même, alors il est vrai aujourd'hui
- Si p est inévitable, alors ou bien p est vraie aujourd'hui, ou bien p continuera à être inévitable à partir de demain
- Si on sait que p sera toujours vraie, alors cette connaissance est éternelle.

Avec ces axiomes, R. Parikh introduit les règles de déduction suivantes :

– les règles précédentes (modus ponens et K-généralisation)
– de $p \Rightarrow q$, on peut déduire $\diamond p \Rightarrow \diamond q$

– de $p \Rightarrow q$, on peut déduire $\odot p \Rightarrow \odot q$
– de $p \Rightarrow \odot p$, on peut déduire $p \Rightarrow \Box p$

Il démontre que le système obtenu est consistant, mais il ne démontre pas sa complétude.

Le paradoxe de l'interrogation surprise s'écrit alors, p désignant la proposition "l'interrogation aura lieu aujourd'hui" :

$$\diamond p \wedge \Box \neg K \odot p$$

(le premier terme de la conjonction signifiant "l'interrogation aura bel et bien lieu un jour de la semaine", et le second : "jamais on ne saura qu'elle aura lieu demain"). Il se pose alors deux questions : La première question est de savoir si cette proposition $\diamond p \wedge \Box \neg K \odot p$ a bien un modèle, et la deuxième question est de savoir comment on peut formaliser le raisonnement de l'étudiant.

– En ce qui concerne la première question, la phrase "l'interrogation surprise aura lieu mercredi", formalisée $\odot \odot p$ si on l'exprime lundi, est bien un modèle de $\diamond p \wedge \Box \neg K \odot p$, ce qui s'exprime par l'hiéroglyphe suivant :

$$\odot \odot p \models \diamond p \wedge \Box \neg K \odot p$$

(Exercice : démontrer avec les axiomes et règles de déduction ci-dessus, le théorème suivant :

$$\odot \odot p \Rightarrow \diamond p$$

("ce qui arrivera après-demain, arrivera un jour"))

– Pour formaliser le raisonnement de l'étudiant, on va commencer par le début : "Si l'interrogation n'a lieu ni le lundi, ni le mardi, ni le mercredi, ni le jeudi, alors elle ne peut avoir lieu que le vendredi, et on le saura le jeudi", soit :

$$\neg p \wedge \neg \odot p \wedge \neg \odot \odot p \wedge \neg \odot \odot \odot p \Rightarrow \odot \odot \odot \odot p \Rightarrow K \odot \odot \odot \odot p$$

C'est dans la dernière implication que l'étudiant se trompe ; en effet, alors que $\mathrm{Kq} \Rightarrow q$ est un théorème de la logique épistémique (c'est même un axiome), sa réciproque

$$q \Rightarrow \mathrm{Kq}$$

n'en est pas (ce qui est vrai ne nous est pas forcément accessible). Ainsi, alors qu'il est vrai que l'interrogation n'aura pas lieu vendredi, les étudiants ne le savent pas. De ce point de vue, la date de l'interrogation a le même statut, en logique intuitionniste, que l'axiome du choix : Les intuitionnistes pensent que celui-ci est, soit vrai, soit faux, mais qu'on ne saura jamais ce qu'il en est.

3) Logique épistémique multi-agents

En fait, les connaissances du professeur et celles de l'étudiant ne sont pas identiques (sinon à quoi servirait le professeur ?). Le verbe K doit donc être muni d'un sujet et on distingue les opérateurs K_t (signifiant "le professeur sait" - "t" comme "teacher") et K_s (signifiant "l'étudiant sait" - "s" comme "student") ; ils obéissent aux mêmes axiomes que leurs homologues sans indices, à condition de ne pas les croiser (comme dans K_sK_t par exemple, qui traite des connaissances que l'étudiant a sur celles de son professeur, et l'étudiant n'est pas forcément télépathe au point de tout savoir sur ce que connaît son enseignant...). Ainsi dans le cas présent

$$K_t \diamond p$$

(le professeur sait que l'interrogation surviendra un jour), alors que

$$\neg K_s \diamond p$$

(l'étudiant l'ignore). Si on laisse aux deux un certain temps de réflexion, le dimanche, on peut dire que

$$K_t^m \diamond p$$

et

$$K_s^n \neg K_s \diamond p$$

pour tous m et n entiers (d'après les axiomes de la logique épistémique), mais c'est tout. Par contre, le lundi, après avoir entendu le raisonnement de l'étudiant, une révélation apparaît au professeur :

$$K_t \neg K_s \diamond p$$

et, plus généralement,

$$K_t^{a_1} K_s^{b_1} \neg K_s \diamond p$$

Le mardi, après une nuit de réflexion, l'étudiant a connaissance de ces derniers faits, et en plus de ce qui précède, on a :

$$K_s^{b_2} K_t^{a_1} K_s^{b_1} \neg K_s \diamond p$$

et le mercredi, après y avoir réfléchi pendant la nuit, le professeur en arrive à :

$$K_t^{a_2} K_s^{b_2} K_t^{a_1} K_s^{b_1} \neg K_s \diamond p$$

d'où le jeudi

$$K_s^{b_3} K_t^{a_2} K_s^{b_2} K_t^{a_1} K_s^{b_1} \neg K_s \diamond p$$

et le vendredi

$$K_t^{a_3} K_s^{b_3} K_t^{a_2} K_s^{b_2} K_t^{a_1} K_s^{b_1} \neg K_s \diamond p$$

Définition 1 *Une proposition q est dite de notoriété publique entre l'étudiant et le professeur, si pour tous a_i et b_i entiers naturels,*

$$K_t^{a_n} K_s^{b_n} ... K_t^{a_i} K_s^{b_i} ... K_t^{a_1} K_s^{b_1} q$$

Dans ce cas, il faut un temps infini pour que $\neg K_s \diamond p$ soit un fait de notoriété publique entre le professeur et l'étudiant.
Sauf que, le mercredi, il y a interrogation, et à ce moment là, p et donc $\diamond p$ deviennent instantanément des faits de notoriété publique (et donc $\neg K_s \diamond p$ ne risque plus d'en devenir un, puisque maintenant il est faux...)

IV / Approche doxastique

Dans le théorème 1, p est fausse, or on ne peut pas savoir quelque chose de faux ; le théorème 1 est donc aussi utile que "faux entraîne tout" c'est-à-dire bien peu utile... D'où l'intérêt que présente la logique doxastique, ou logique des croyances, dans ce problème, puisqu'il est très possible de croire en quelque chose de faux (les exemples abondent...)

1) Logique doxastique

La logique doxastique, ou logique de la croyance, est obtenue en ajoutant aux axiomes de la logique épistémique, l'opérateur B (comme "belief"), la proposition Bp signifiant "on croit que p", et les axiomes suivants (les deux derniers sont démontrés plus bas, à partir d'autres axiomes) :

$$\mathrm{B}(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\mathrm{B}\,p \Rightarrow \mathrm{B}\,q)$$

$$\mathrm{Bp} \Rightarrow \neg\,\mathrm{B}\,\neg p$$

$$\mathrm{Bp} \Rightarrow \mathrm{BBp}$$

$$\neg\,\mathrm{Bp} \Rightarrow B\neg\,\mathrm{Bp}$$

signifiant respectivement :
- Si on croit en $p \Rightarrow q$, alors la croyance en p entraîne la croyance en q
- On ne croit pas à la fois une chose et son contraire
- Si on croit en p alors on croit qu'on le croit
- Si on ne croit pas p alors on croit qu'on ne le croit pas

et les régles de dérivation habituelles, plus celle-ci : de p, on peut dériver Bp (*On croit en la logique propositionnelle*)

Exemples de démonstrations en logique doxastique :
- $B(\perp \Rightarrow q)$ où $\perp$ désigne une antilogie (d'après la règle de dérivation ci-dessus, et car $\perp \Rightarrow q$ est une tautologie en logique propositionnelle) ; donc, d'après le premier des quatre axiomes ci-dessus, $B\perp \Rightarrow Bq$, et ceci pour toute proposition q (vraie ou fausse) : "Un être faillible est complètement naïf (on peut tout lui faire croire)...".
- $B(p \Rightarrow \top)$ (comme ci-dessus, $\top$ étant n'importe quelle tautologie) ; donc $BP \Rightarrow B\top$: "Si on croit à quelque chose alors on croit à quelque chose de vrai"

Enfin on peut combiner les deux opérateurs B et K avec les axiomes suivants :

$$\mathrm{Kp} \Rightarrow \mathrm{Bp}$$

$$\mathrm{Bp} \Rightarrow \mathrm{KBp}$$

$$\neg\,\mathrm{Bp} \Rightarrow K\neg\,\mathrm{Bp}$$

$$\mathrm{BBp} \Rightarrow \mathrm{Bp}$$

signifiant respectivement :

– Ce qu'on sait, on le croit
– Si on croit en p alors on sait qu'on le croit
– Si on ne croit pas p alors on sait qu'on ne le croit pas
– Si on croit qu'on croit p alors on croit p (ou la contraposée : si on ne croit pas en p, alors on ne croit pas en la foi en p non plus) :

$$\neg\,\mathrm{Bp} \Rightarrow \neg\,\mathrm{BBp}$$

Exemples de démonstrations :
– La contraposée du troisième des axiomes ci-dessus s'écrit

$$\neg K \neg Bp \Rightarrow Bp$$

ce qui s'interprète ainsi : "Si on n'est pas sûr de ne pas croire en p alors on croit en p", ce qui est une version formelle du pari de Pascal (*en l'absence de preuves du contraire, autant croire en Dieu*...)
– Les deux premiers des axiomes ci-dessus donnent

$$Bp \Rightarrow KBp \Rightarrow BBp$$

soit le troisième des axiomes de la logique doxastique.
– Les troisième et premier des axiomes ci-dessus donnent

$$\neg Bp \Rightarrow K\neg Bp \Rightarrow B\neg Bp$$

soit le quatrième des axiomes de la logique doxastique.
– $KBp \Rightarrow Bp$ (premier des axiomes de la logique épistémique) ; et $Bp \Rightarrow KBp$ (deuxième des axiomes ci-dessus) ; donc $Bp \Leftrightarrow KBp$: "Il revient au même de croire en quelque chose ou de savoir qu'on y croit"

2) Logique temporelle

Aux axiomes de R. Parikh se rajoute de façon assez naturelle, celui-ci :

$$B(\Box p) \Rightarrow \Box\,[B(\Box p)]$$

qui signifie que si on croit que p sera toujours vrai, alors cette croyance est elle-même éternelle (*si je crois en l'éternité alors ma foi est éternelle*, ne serions-nous pas en train de faire de la religion l'air de rien ?). Une illustration de cet axiome concerne le paradoxe de l'interro surprise, si p est remplacé par $\neg p$:

$$B(\Box\neg p) \Rightarrow \Box\,[B(\Box\neg p)]$$

qu'on interprète ainsi : "Si l'étudiant est persuadé qu'il n'y aura jamais d'interro, alors il en sera toujours persuadé" (du moins jusqu'à ce que la survenue de l'interro lui aura prouvé le contraire...)

3) Les croyances des étudiants

La logique doxastique permet de remplacer le litigieux

$$\odot\odot\odot\odot\, p \Rightarrow K\odot\odot\odot\odot p$$

par

$$\odot\odot\odot\odot\, p \Rightarrow B\odot\odot\odot\odot p$$

mais

$$q \Rightarrow \mathrm{Bq}$$

n'est pas plus un théorème de la logique doxastique que

$$q \Rightarrow \mathrm{Kq}$$

n'en est un de la logique épistémique (du moins dans le cas général : Si q est de la forme Bp, $\mathrm{Bp} \Rightarrow \mathrm{BBp}$ est un axiome de la logique doxastique).
L'équivalent doxastique du théorème 1 :

$$B\neg p \Rightarrow \neg\,\mathrm{Bp}$$

est tout simplement la contraposée du deuxième axiome de la logique doxastique.

Corrigé de l'exercice :

$\Box\neg p \Rightarrow \odot\neg p$	(5ème axiome de la logique temporelle)
$\neg \odot \neg p \Rightarrow \neg\Box\neg p$	(contraposée du précédent)
$\odot p \Rightarrow \diamond p$	(2ème axiome de la logique temporelle, et définition de $\diamond$)
$\odot \odot p \Rightarrow \odot \diamond p$	(3ème règle de déduction)
or $\odot \diamond p \Rightarrow \diamond p$	(8ème axiome de la logique temporelle)
Donc $\odot \odot p \Rightarrow \diamond p$	

APPROCHE DOXASTIQUE DE CERTAINS PARADOXES CLASSIQUES

I / Rappels de logique doxastique à un agent

1) Croyance

L'opérateur B , désigné par la première lettre de l'anglais *belief*, est un opérateur modal, ce qui signifie que mis devant une proposition p, il la transforme en une nouvelle proposition $B\ p$, qui signifie « on croit que p ».

2) Axiomes

L'opérateur B obéit aux axiomes suivants :

$$\text{Tous les axiomes} \quad \text{de la logique propositionnelle} \tag{8}$$

$$B\ \top \quad \text{où } \top \text{ est une tautologie propositionnelle} \tag{9}$$

$$B\ (p \wedge q) \Rightarrow B\ p \wedge B\ q \quad \text{(semi-distributivité par rapport à } \wedge \text{)} \tag{10}$$

$$B\ p \vee B\ q \Rightarrow B\ (p \vee q) \quad \text{(semi-distributivité par rapport à } \vee \text{)} \tag{11}$$

$$B\ (p \Rightarrow q) \Longrightarrow (B\ p \Rightarrow B\ q) \tag{12}$$

$$B\ p \Rightarrow \neg B\ \neg p \quad \text{(cohérence des croyances)} \tag{13}$$

$$B\ p \Rightarrow BB\ p \quad \text{(introspection positive)} \tag{14}$$

$$\neg B\ p \Rightarrow B\ \neg B\ p \quad \text{(introspection négative)} \tag{15}$$

3) Règles de dérivation

Outre les règles de dérivation de la logique propositionnelle, la logique doxastique à un agent s'appuie sur la règle suivante :

De toute proposition p, on peut inférer $B\ p$

4) Quelques théorèmes de la logique doxastique

(on rappelle que $\vdash$ signifie : « ce qui suit est un théorème »)

$$\vdash B\ \neg p \Rightarrow \neg B\ p \quad \text{(on ne croit pas en ce que l'on croit faux)} \tag{16}$$

$$\vdash \neg B\ \neg B\ p \Rightarrow B\ p \quad \text{(si on doute qu'on doute de } p \text{ , alors on croit en } p\text{)} \tag{17}$$

II / Paradoxe d'Épiménide

1) Position du problème

L'Agora (d'Athènes) était un lieu très prisé où tout un chacun pouvait prendre la parole, même pour s'adresser aux élus (par exemple pour leur dire « Touche moi pas, tu me salis ») et écouter leur réponse (par exemple « Casse-toi alors, pauv'con »). C'est en ce lieu qu'un jour un certain Épiménide prononça la phrase qui le rendit célèbre :

« Ne croyez pas ce que dit un Crétois, ils mentent toujours »

L'humour de cette phrase vient de ce qu'Épimédide étant lui-même Crétois, s'accuse de mentir en prononçant cette phrase, ce qui revient à la version « classique » du paradoxe d'Épiménide :

$$E : \text{« } E \text{ est fausse »}$$

sur laquelle nous allons raisonner. En fait, l'aspect délicat de cet énoncé est qu'il s'agit avant tout de donner un sens au double-point.

2) Aspect propositionnel

a) Une première manière d'interpréter ce double-point, c'est de lui donner le sens d'une implication, ce qui revient à donner à E la sémantique suivante :

$$E \Rightarrow \neg E$$

qui n'a rien de paradoxal puisque pour toute antilogie $\perp$, on a $\perp \Rightarrow p$ où p est une proposition quelconque, par exemple $p \Leftrightarrow \neg\perp \Leftrightarrow \top$. Ce qui signifie que E est fausse et comme le faux entraîne n'importe quoi, E entraîne tout, donc son contraire. [2]

b) Alors pour pouvoir continuer le raisonnement, l'étape suivante serait de considérer ce double-point comme une équivalence logique :

$$E \Leftrightarrow \neg E$$

qui cette fois-ci est une antilogie et ôte à Épiménide son caractère propositionnel (voir plus bas)

3) Aspect doxastique

a) D'où l'intérêt de considérer le double-point comme une croyance : Si on croit en $E \Rightarrow \neg E$ (du 2.a) alors comme $B\ (E \Rightarrow \neg E) \Longrightarrow (B\ E \Rightarrow B\ \neg E)$ (axiome (5)), on est amené à interpréter le double-point comme un transfert de croyance : « Si je crois ce qui est à gauche du double-point alors je crois ce qui est après le double-point aussi »

$$B\ E \Rightarrow B\ \neg E$$

« Si on croit Épiménide , alors on croit le contraire d'Épiménide » (c'est d'ailleurs ce que demandait Épiménide sur l'Agora).

2. Il y a en fait un déplacement du paradoxe, puisque le théorème $\perp \Rightarrow p$ de la logique propositionnelle s'appelle « premier paradoxe de l'implication formelle » : Si 2+2=5 alors je suis le Pape ...

b) Mais il résulte de $B\ E \Rightarrow B\ \neg E$ et du théorème (16) la proposition suivante

$$B\ E \Rightarrow \neg B\ E$$

qui, comme on l'a vu, est parfaitement vrai si $B\ E$ est faux. On a donc métadémontré le métathéorème suivant :

$$\boxed{\Vdash \neg B\ E}$$

(puisque la notation $\vdash$ a été utilisée pour les théorèmes, la notation $\Vdash$ est logique pour dire : « Ce qui suit est un métathéorème »...). Ce résultat peut se métainterpréter métasémantiquement par

Épiménide est incroyable !

(ou peut-être faudrait-il métadire que Épiménide est ... métaincroyable ? Ou alors, se métaagirait-il d'un certain méta-Épiménide ?)

c) Mais revenons à nos métamoutons, pardon, nos moutons : Comme dans le (2.b), on pourrait aussi interpréter le double-point comme une équivalence logique sur les croyances :

$$B\ E \Leftrightarrow B\ \neg E$$

« Il revient au même de croire en Épiménide ou de croire en son contraire » Un raisonnement analogue au précédent donne alors (puisque $(B\ E \Leftrightarrow B\ \neg E) \Longrightarrow (B\ \neg E \Rightarrow B\ E)$)

$$B\ \neg E \Rightarrow \neg B\ \neg E$$

d'où

$$\boxed{\Vdash \neg B\ E \wedge \neg B\ \neg E}$$

Ce métathéorème illustre qu'il y a deux manières de ne pas croire quelque chose :

- Soit on croit son contraire
- Soit on ne croit rien

Les spécialistes des sondages le savent bien : La dernière option est pratiquement toujours « sans opinion »[3]
Ici Épiménide illustre que la réciproque du théorème (16) est fausse :

$$\neg B\ p \not\Rightarrow B\ \neg p$$

3. Parole d'un rescapé de la « bof génération »

4) En résumé, si Épiménide est une proposition, on ne peut pas y métacroire (b) ni métacroire à son contraire (c). Mais de $\neg B\ E$ on peut métadéduire $B\ \neg B\ E$ (du moins d'un point de vue métadoxastique, avec l'axiome (8)...) et de $\neg B\ \neg E$ on peut métadéduire $B\ \neg B\ \neg E$: On peut donc métacroire à la fois à l'incrédibilité de E et à celle de $\neg E$. On a ainsi métamétadémontré le métamétathéorème suivant[4] :

$$\boxed{\Vdash\!\vdash (B\ \neg B\ E) \wedge (B\ \neg B\ \neg E)}$$

5) Proposition 1 : des sentes ?
Si E est une proposition, du point de vue propositionnel (et non doxastique), E est à la fois vraie et fausse, ce qui ne peut être ; on a donc métadémontré par le métaabsurde que

$$\boxed{\text{Épiménide n'est pas une proposition}}$$

ce qui, nul doute, n'eût pas métadéplu à Magritte !

6) Toujours le temps qui court...
Si on suppose que l'interprétation d'une phrase à sa (re)lecture prend une seconde, et que le temps est mesuré par valeurs entières en secondes, chaque proposition peut être précédée d'un des opérateurs temporels $\bigcirc$, $\Diamond$ et $\Box$, signifiant respectivement « dans une seconde » (ou à la seconde suivante), « au moins une fois dans le futur » et « toujours » et le paradoxe d'Épiménide en version temporelle doxastique devient

$$(B\ E \Rightarrow \bigcirc B\ \neg E) \wedge (B\ \neg E \Rightarrow \bigcirc B\ E)$$

Alors on démontre

$$(\Box\neg\Box B\ E) \wedge (\Box\neg\Box B\ \neg E)$$

(jamais la croyance en E ne sera éternelle, ni celle en $\neg E$)

III / Paradoxe de Buridan

1) Position du problème
Jean Buridan, un des premiers universitaires français, passe pour avoir écrit :
Socrate : « Platon va dire la vérité »
Platon : « N'écoutez pas Socrate : Il vient de mentir »
qui constitue une sorte de généralisation bipropositionnelle (et temporelle ?) d'Épiménide ...

2) Approche propositionnelle

a) En interprétant les doubles-points comme des implications, on écrit le paradoxe de Buridan comme

$$(S \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow \neg S)$$

d'où on tire par transitivité de l'implication, $S \Rightarrow \neg S$ ce qui permet de conclure comme au (II.2.a) que S est faux : Socrate ment. Par contre, malgré ce que suggère la lecture de la phrase que celui-ci a prononcée, on ne peut rien dire sur la valeur de vérité de P : Il y a deux paradoxes de Buridan : Un Buridan faible ou Platon dit la vérité ($\vDash P$) et un Buridan fort ou Platon ment aussi ($\nvDash P$). Cette situation n'est pas sans rappeler celles de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu...

4. Après la notation $\vdash$ pour les théorèmes et $\Vdash$ pour les métathéorèmes, LaTeχ fournit la notation $\Vvdash$ pour les métamétathéorèmes. Quel métamétamétathéorème permettrait-il d'utiliser $|\!|\!\Vdash$? On constate que la référence à LaTeχ rend cet article autoréférentiel, ce qui est la moindre des choses...

b) Si maintenant les doubles-points sont interprétés comme des équivalences logiques, Buridan devient

$$(S \Leftrightarrow P) \wedge (P \Leftrightarrow \neg S)$$

ce qui, encore une fois, met en cause le caractère propositionnel de Buridan (comme aux II.2.b et II.5 pour Épiménide). Ce qui peut très bien se métainterpréter par quelque chose comme :

> La phrase suivante est une proposition.
>
> La phrase précédente n'est pas une proposition.

3) Approche doxastique

a) En interprétant les doubles-points comme des implications sur des croyances, Buridan devient

$$B\ S \Rightarrow B\ P$$

$$B\ P \Rightarrow B\ \neg S$$

ce qui permet encore une fois de métadémontrer que Socrate est incroyable (on s'en serait douté[5], ce qui s'écrit $\neg B\ S$), alors que le statut de $B\ P$ n'est pas déterminé : On peut croire ou non ce que dit Platon, ce qui dans le cas de Buridan faible, signifie qu'on croit à quelque chose d'incroyable, ça arrive aussi parfois dans la vie de tous les jours[6].

b) En interprétant les doubles-points comme des équivalences logiques sur des croyances, Buridan devient

$$B\ S \Leftrightarrow B\ P$$

$$B\ P \Leftrightarrow B\ \neg S$$

ce qui permet encore une fois de métadémontrer que Socrate est incroyable mais aussi que sa négation l'est :

$$\boxed{\Vdash \neg B\ S \wedge \neg B\ \neg S}$$

c) Enfin, l'axiome (15) d'introspection négative appliqué respectivement à $\neg B\ S$ et à $\neg B\ \neg S$ donne respectivement $B\ \neg B\ S$ et $B\ \neg B\ \neg S$ (Buridan croit que ce qui dit Socrate et sa négation sont tous deux incroyables), auxquels le théorème (16) s'applique pour donner respectivement $\neg B\ B\ S$ et $\neg B\ B\ \neg S$: On ne peut pas croire que Socrate soit incroyable ni que sa négation le soit...

Tout ceci est métaincroyable mais métamétavrai !

5. En même temps, si chaque fois qu'on a du mal à croire quelqu'un , celui-ci devait boire de la cigüe, un dépeuplement excessif serait à craindre...

6. Ainsi, il paraît que 53 % des Français ont cru aux promesses électorales de l'omniprésident...

CROYANCE PAR DEGRÉS

" Dans la connaissance du Monde,
ceux qui ne savent rien
en savent toujours autant
que ceux qui n'en savent pas plus qu'eux "
(Pierre Dac)

I / Logique doxastique graduelle

Au lieu de noter $B_a p$ pour "l'agent a croit que p", ou Bp pour la logique doxastique à un seul agent, on note $B_r\ p$ pour "l'agent croit que p au degré r ". Le réel r est alors compris entre 0 et 1. On est tenté d'interpréter $B_1\ p$ par Kp, ce qui reste à vérifier...

L'axiomatique devient alors :

$$\forall r\ , B_r\ \top \tag{18}$$
$$\forall r\ , B_r\ (p \Rightarrow q) \Longrightarrow (B_r\ p \Rightarrow B_r\ q) \tag{19}$$
$$\forall r\ , B_r\ p \Rightarrow \neg B_r\ \neg p \tag{20}$$
$$\forall r\ , B_r\ p \Rightarrow B_1\ B_r\ p \tag{21}$$
$$\forall r\ , \neg B_r\ p \Rightarrow B_1\ \neg B_r\ p \tag{22}$$
$$\forall s\ \leqslant r\ , B_r\ p \Rightarrow B_s\ p \tag{23}$$

Et pour la sémantique, on fait appel à une démarche Bayésienne :

II / Logique Bayésienne

La démarche Bayésienne permet de formaliser à la fois la notion de croyances par degrés et de révision des croyances (logique doxastique temporelle). Comme $0 \leqslant r \leqslant 1$, r est alors interprété comme une probabilité, ou plutôt une probabilité conditionnelle. $B_r p$ devient alors $\mathbb{P}(p) = r$ où $\mathbb{P}$ désigne une probabilité *a priori* au début du problème, une probabilité conditionnelle après.

1) Un exemple avec des suites

On suppose qu'on a deux urnes, l'urne A contenant 50% de boules bleues et 50% de boules rouges , et l'urne B contenant 80% de boules bleues et 20% de boules rouges .

a) Étape préliminaire

On choisit une urne au hasard : La probabilité qu'elle soit l'urne A est alors $p_0 = \dfrac{1}{2} = 0,5$. Autrement dit, on a autant de raisons de croire que l'urne choisie est la A , que de ne pas y croire.

b) Premier coup

On tire une boule de l'urne (avec remise). Elle est rouge . Quelle est alors la probabilité (conditionnelle) que l'urne soit la A ?

On sait que $P_A\,(rouge\ ) = \frac{1}{2}$ et que $P_B\,(rouge\ ) = \frac{1}{5}$.

La probabilité que la boule soit à la fois rouge et provenant de l'urne A est alors $P(rouge\ \cap A\ ) = P_A\,(rouge\ ) \times P(A\ ) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, alors que la probabilité que la boule soit à la fois rouge et provenant de l'urne B est $P_B\,(rouge\ \cap B\ ) = \frac{1}{5} \times P(B\ ) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$. La probabilité qu'elle soit rouge est donc

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{7}{20} = 0,35$$

La probabilité que l'urne soit la A sachant que la boule est rouge est donc

$$P_{rouge}\,(A\ ) = \frac{P(rouge\ \cap A\ )}{P(rouge\ )} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{20}} = \frac{5}{7} \simeq 0,71$$

Le fait que la boule est rouge incite donc à croire un peu plus à la possibilité que l'urne soit la A puisqu'on remplace la probabilité que l'urne soit la A par la probabilité conditionnelle $p_1 = \frac{5}{7} = p_0 \times \frac{10}{7}$.

La démarche ci-dessus est dite **bayésienne** et le rapport $\frac{10}{7}$ s'appelle le **rapport de vraisemblance** .

c) Deuxième coup

On tire à nouveau une boule de l'urne, et elle est toujours rouge . Ceci amène à une nouvelle révision des croyances, augmentant encore la foi en l'urne A : La probabilité de tirer deux fois de suite une boule rouge de l'urne A est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et la probabilité de tirer deux fois de suite une boule rouge de l'urne B est $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$.

La probabilité de tirer deux fois une boule rouge et que l'urne soit la A est donc $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ et la probabilité que les deux boules soient rouges alors que l'urne soit la B est $\frac{1}{25} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{50}$. Donc la probabilité de tirer deux fois une boule rouge est $\frac{1}{8} + \frac{1}{50} = \frac{29}{200}$ et la probabilité conditionnelle est

$$p_2 = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{29}{200}} = \frac{25}{29} \simeq 0,86$$

La croyance est croissante (on croit que la croyance croît)...

d) Cas général

Si après avoir tiré n fois une boule de l'urne et qu'à chaque fois elle persiste à être rouge , la probabilité que l'urne soit la A est grande :

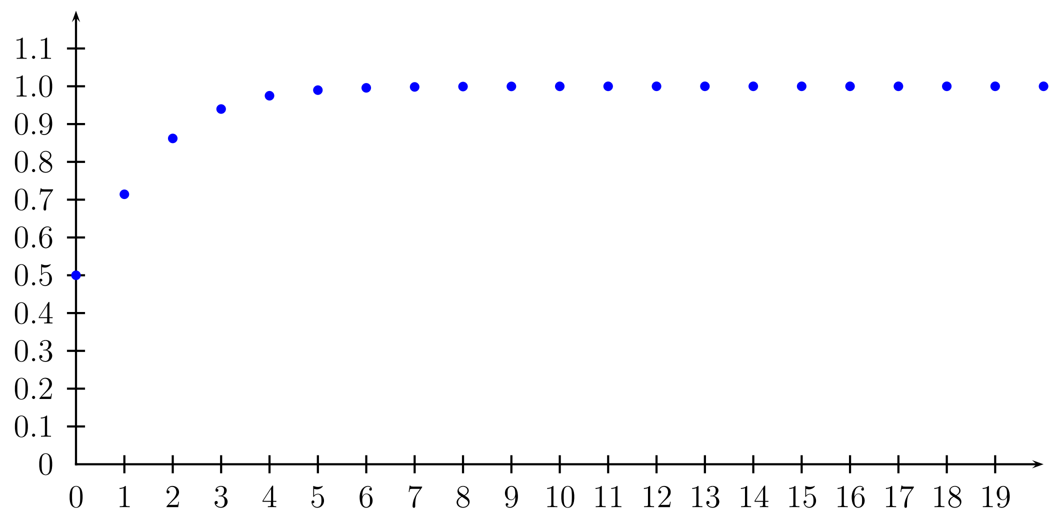
La probabilité que la boule soit rouge tout en venant de l'urne A est $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et la probabilité que la boule soit rouge tout en venant de l'urne B est $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n$, donc la probabilité que la boule soit rouge est $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$. Donc la probabilité conditionnelle est

$$p_n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{5}\right)^n}=\frac{1}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

Numériquement, on a les résultats suivants :

Indices	**Probabilités**
0	0,5
1	0,71428571428571
2	0,86206896551724
3	0,93984962406015
4	0,97503900156006
5	0,98986379474184
6	0,99592070877685
7	0,99836427996371
8	0,99934506921544
9	0,99973792470147
10	0,99989515339396

Et graphiquement :



Pour ce qui est des limites, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$ donc $\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{1+0}=1$: La croyance en l'urne A est asymptotiquement absolue.

Pour ce qui est des variations, $\left(\frac{2}{5}\right)^n \searrow$

donc $1+\left(\frac{2}{5}\right)^n \searrow$

donc son inverse $p_n \nearrow$:

La croyance est croissante .

e) Conclusion

Plus on tire de boules rouges , plus on croit qu'elles viennent de l'urne A (et moins on croit qu'elles viennent de la B).
Mais aussi, plus on croit que l'expérience est truquée, l'évènement conditionnant ayant lui-même une probabilité de plus en plus faible.
Ceci peut d'ailleurs poser des problèmes au tribunal, où un "faisceau d'indices" peut donner l'impression que les indices en question étayent une culpabilité alors que leur rareté devrait inciter au doute...

2) Buridan et Bayes

Sans connaître *a priori* les probabilités de s (affirmation de Socrate) et p (celle de Platon) on estime que les probabilités conditionnelles sont les suivantes :

$$P_s(p) = 1$$

$$P_p(s) = 0$$

ou tout au moins des nombres assez voisins de ceux-ci.
Alors $P(s \cap p) = P_p(s) \times P(p) = 0 \times P(p) = 0$;
or $P(p \cap s) = P_s(p) \times P(s) = 1 \times P(s) = P(s)$.
D'où $P(s) = 0$: Socrate est incroyable.
Là encore $P(p)$ est indéterminé, et peut être n'importe quel nombre entre 0 et 1 (compris)...

UN BARBIER BARBU PAS BARBANT

I / Position du problème

1) Énoncé

Les habitants de la petite ville Andalouse de Sédille[7] sont tous glabres, leur fierté d'Espagnols les poussant à soigner leur physique avec une extrême minutie. Or la petite ville de Sédille ne possède qu'un barbier , qui rase donc tous les Sédillans. Tous ? Non ! Seulement ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes. La question qui se pose alors est :

Qui rase le barbier ?

2) Le paradoxe du barbier

Quand un habitant de Sédille se fait raser par le barbier , c'est qu'il ne se rase pas lui-même. Mais si le barbier se rase lui-même, c'est que le barbier se fait raser par le barbier (puisque le barbier est lui-même...). Donc si le barbier se rase lui-même, alors il ne se rase pas lui-même ! Donc le barbier ne se rase pas lui-même. Mais alors il doit se faire raser par le barbier , c'est-à-dire par lui-même...

3) Origine du paradoxe

Lorsqu'à la fin du XIXème siècle, G. Cantor a inventé la théorie des ensembles pour résoudre le problème de l'unicité des séries de Fourier, il n'a fallu que quelques années à la communauté internationale des mathématiciens pour réaliser

a) Que la théorie des ensembles est très utile, dans tous les domaines des mathématiques.

b) Qu'on est souvent amené à considérer des ensembles d'ensembles.[8]

Mais ces ensembles d'ensembles donnent naissance à toute une série de paradoxes autoréférentiels dont le plus connu concerne l'ensemble $\mathcal{E}$ des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. En notation ensembliste :

$$\forall \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{F} \notin \mathcal{F}$$

Le paradoxe porte sur le statut de $\mathcal{E}$. A-t-on, ou n'a-t-on pas,

$$\mathcal{E} \in \mathcal{E} \ ?$$

Par définition de $\mathcal{E}$, la proposition ci-dessus est équivalente à sa négation...
Bertrand Russel a alors inventé le paradoxe du barbier pour traduire le paradoxe ci-dessus en langage non mathématique.

7. Ça y est, c'est dit : Sédille... Il va de soi que Russel, qui était anglophone, n'est pas l'auteur du nom de la ville. Mais au fait, quel est le symbole typographique de la première lettre de cette note de bas de page ? Autoréférence, quand tu nous tiens...

8. Pour prendre un exemple parmi plein d'autres, Kolmogorov a défini un espace probabilisable comme une tribu borélienne d'événements.

1) Prologue sur Prolog

Bien que le langage de programmation *Prolog* ne gère pas correctement la négation, on peut tout de même expérimenter un peu avec le logiciel libre *swi-prolog* , à condition de créer une base de données où on précise qui se rase et qui se fait raser par le barbier , ce qui donne le fichier Prolog suivant :

```
rase(aldo).
rase(benito).
barbier(carlo).
barbier(domino).
rase(esteban).
barbier(X) :-not(rase(X)).
```

(le symbole " :- " s'interprête par $\Leftarrow$; la dernière ligne veut donc dire que tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes se font raser par le barbier . On suppose que c'est Benito qui est le barbier .)

Ouvert sous *swi-prolog*, ce fichier source permet une session comme celle-ci :

```
1 ?- barbier(X).

X = carlo ;

X = domino ;

No
2 ?- barbier(benito).

No
3 ?- rase(benito).

Yes
```

On apprend que Carlo et Domino se font raser par le barbier , mais que Benito ne le fait pas : Normal, il se rase lui-même !

Si on ne précise pas le statut de Benito, on obtient ceci :

```
rase(aldo).
barbier(carlo).
barbier(domino).
rase(esteban).
barbier(X) :-not(rase(X)).
```

Et la nouvelle session *swi-prolog* révèle ceci :

```
1 ?- barbier(X).

X = carlo ;

X = domino ;

No
2 ?- barbier(benito).

Yes
3 ?- rase(benito).

No
```

Cette fois-ci, Benito se fait raser par le barbier mais pourtant il ne se rase pas !
Pour être plus complet, on peut chercher à déclarer Benito à la fois comme rasé par le barbier et comme se rasant lui-même :

```
rase(aldo).
rase(benito).
barbier(benito).
barbier(carlo).
barbier(domino).
rase(esteban).
barbier(X) :-not(rase(X)).
```

Voici alors une session typique sous *swi-prolog* :

```
1 ?- barbier(X).

X = benito ;

X = carlo ;

X = domino ;

No
2 ?- barbier(benito).
More ? ;

No
3 ?- barbier(benito).
More ?

Yes
4 ?- rase(benito).

Yes
5 ?- barbier(zorro).

Yes
```

Maintenant, Benito apparaît sur la liste des rasés par le barbier . Mais si on demande s'il se fait raser par le barbier , la réponse est non ! (puisqu'il se rase). Et même Zorro est déclaré rasé par le barbier alors qu'il n'est même pas sur la liste des habitants de Sédille !

2) Le barbier barbu

Juste pour expliquer le titre de cet article, le barbier ne peut pas se raser et ne pas se raser en même temps, donc il ne se rase pas ! Mais cette explication est contradictoire avec l'hypothèse selon laquelle tous les habitants de Sédille sont glabres...

3) Le barbier pas barbu

a) Si le barbier est une barbière, le problème est résolu : Elle ne se rase pas[9] et ne se fait donc pas raser par le barbier . La réponse à LA question est alors : « Personne ! »

b) À propos de féminisme, cette histoire est réminiscente de la célèbre fausse récurrence : « Si une personne d'une assemblée est une femme, alors toutes le sont ». En effet :

(1) Pour $n = 1$, la propriété est évidente : Si une femme est une femme, alors toute la femme est une femme.

(2) Si la propriété est vraie au rang n, alors en supposant que dans une assemblée de $n+1$ personnes, il y a au moins une femme, on applique l'hypothèse de récurrence à une sous-assemblée de n personnes dont cette femme, ce qui aboutit à n femmes parmi les $n+1$ personnes ; ensuite on recommence avec la $n+1$-ième personne jointe à $n-1$ des femmes et on applique à nouveau l'hypothèse de récurrence à l'assemblée de n personnes ainsi constituée : La $n+1$-ième personne est aussi une femme.[10]

4) Et si Sédille n'avait pas de barbier ?

Comme Séville, Sédille sévit, c'est vite dit, contre les barbiers, et renvoie le sien.
Si on note $\mathcal{R}(x)$ le fait que le citoyen x se rase lui-même et $\mathcal{B}(x)$ le fait qu'il se fait raser par le barbier , alors le citoyen b (le barbier) vérifie à la fois $\mathcal{B}(b)$ et $\mathcal{R}(b)$, le paradoxe provenant du fait que l'une des hypothèses peut s'interpréter par $\mathcal{B}(x) \Leftrightarrow \neg\mathcal{R}(x)$: Aucun élément ne peut vérifier à la fois $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$ et pourtant b **doit** les vérifier toutes les deux ![11]
En logique des prédicats, si un citoyen x vérifie $\mathcal{R}(x)$ alors il vérifie aussi $\neg\mathcal{R}(x) \Rightarrow \exists x$[12]. Et si le même x vérifie aussi $\mathcal{B}(x)$ alors il vérifie aussi $\neg\mathcal{B}(x) \Rightarrow \exists x$. Finalement il vérifie

$$\neg\mathcal{R}(x) \vee \neg\mathcal{B}(x) \Rightarrow \exists x,$$

proposition dont la contraposée s'écrit

$$\nexists x \Rightarrow \mathcal{R}(x) \wedge \mathcal{B}(x) :$$

Tout individu qui n'existe pas vérifie à la fois les deux relations contradictoires $\mathcal{R}$ et $\mathcal{B}$. Métaconclusion : **Sédille n'a pas de barbier !** [13] [14] [15]

9. à moins d'être une femme à barbe, mais cette dernière hypothèse ne saurait rendre honneur à la beauté des Andalouses !

10. L'erreur de raisonnement est que le passage de n à $n+1$ en utilisant $n-1$ présuppose que $n \geqslant 3$, et ne marche donc pas pour $n = 2$, ce qui montre en passant que « plusieurs » signifie « au moins 3 » et qu'à deux, on n'est pas vraiment plusieurs...

11. voir le III

12. En fait, le théorème $\perp \Rightarrow p$ vient de la logique propositionnelle.

13. C'est pour ça qu'il est à la fois barbu et pas barbu : C'est possible pour quelqu'un qui n'existe pas[14]

14. Et c'est pour ça qu'il n'est pas barbant : Quelqu'un qui n'existe pas ne peut pas être barbant[15]

15. La nature de Bouddha est tout et rien à la fois : C'est possible si Bouddha n'existe pas, d'où cette vérité trouvée dans un biberon de bourbon à l'île Bourbon : Bouddha est un barbier bidon.

III / Logique déontique

1) Notations

La logique déontique est modale, ce qui veut dire qu'on modifie une proposition p en la faisant précéder d'un (ou plusieurs) opérateur modal parmi les suivants :

$\boxdot$	(obligation),	$\boxdot p$	signifiant	« p est obligatoire »	(*ressemblance avec un panneau routier*)
$\boxtimes$	(non obligation),	$\boxtimes p$	signifiant	« p est facultatif »	(*le même, barré*)
$\ominus$	(interdiction),	$\ominus p$	signifiant	« p est interdit »	(*ressemblance avec le sens interdit*)
$\oplus$	(autorisation),	$\oplus p$	signifiant	« p est autorisé »	(*le même, barré*)

On a alors les équivalences suivantes :

$$\neg \boxdot p \Leftrightarrow \boxtimes p \tag{24}$$

$$\neg \boxtimes p \Leftrightarrow \boxdot p \tag{25}$$

$$\neg \ominus p \Leftrightarrow \oplus p \tag{26}$$

$$\neg \oplus p \Leftrightarrow \ominus p \tag{27}$$

2) Interprétation politique

La définition d'une dictature (tout ce qui n'est pas interdit, est obligatoire) devient alors :

$$\neg \ominus p \Rightarrow \boxdot p$$

ou alors

$$\oplus p \Rightarrow \boxdot p$$

Et le célèbre slogan de 1968 s'écrit :

$$\boxed{\ominus \ominus p}$$

3) Axiomatique

Un ensemble d'axiomes courant est :

$$\text{toutes les tautologies} \quad \text{du calcul propositionnel} \tag{28}$$

$$(\boxdot p \wedge \boxdot(p \Rightarrow q)) \Longrightarrow \boxdot q \quad \text{(les obligations se transmettent)} \tag{29}$$

$$\boxdot p \Rightarrow \neg \boxdot \neg p \quad \text{(axiome de Sartre)} \tag{30}$$

$$\boxdot(p \wedge q) \Rightarrow \boxdot p \wedge \boxdot q \tag{31}$$

$$\ominus p \wedge \ominus q \Rightarrow \ominus(p \wedge q) \tag{32}$$

$$(\ominus q \wedge \ominus(p \Rightarrow q)) \Longrightarrow \ominus p \tag{33}$$

$$\boxdot p \Rightarrow \oplus p \quad \text{(axiome de Kant)} \tag{34}$$

Et les règles de déduction associées :

♠ De $\Vdash p$ et $\Vdash p \Rightarrow q$ on peut déduire $\Vdash q$ (modus ponens)

♠ De $\Vdash p$ on peut déduire $\Vdash \boxdot p$.

♠ De $\Vdash p$ on peut déduire $\Vdash \oplus p$.

Les axiomes les plus importants sont le (30) (on ne peut forcer quelqu'un à faire quelque chose et son contraire) et le (34) (tout ce qui est obligatoire doit au moins être permis). Or ils ne sont pas toujours vérifiés dans les systèmes juridiques des pays dont le droit est basé sur un code pénal, où il arrive de temps en temps qu'un citoyen devient hors-la-loi pour avoir suivi la loi !

4) La loi de Sédille

Si on interprête le dilemme « se raser - se faire raser » comme une obligation de faire ou l'un ou l'autre, on a

$$\forall x, \qquad R(x) \Rightarrow \boxdot\neg B(x) \tag{35}$$
$$\forall x, \qquad B(x) \Rightarrow \boxdot\neg R(x) \tag{36}$$

alors :

$$\forall x, \qquad \ominus (B(x) \wedge R(x))$$

Mais dans le cas du barbier :

$$\boxdot (B(b) \wedge R(b))$$

ces deux dernières propositions étant contradictoires entre elles : Le barbier a à la fois l'obligation et l'interdiction de se raser et pas. C'est donc l'axiome de Kant qui est renié par le paradoxe du barbier .

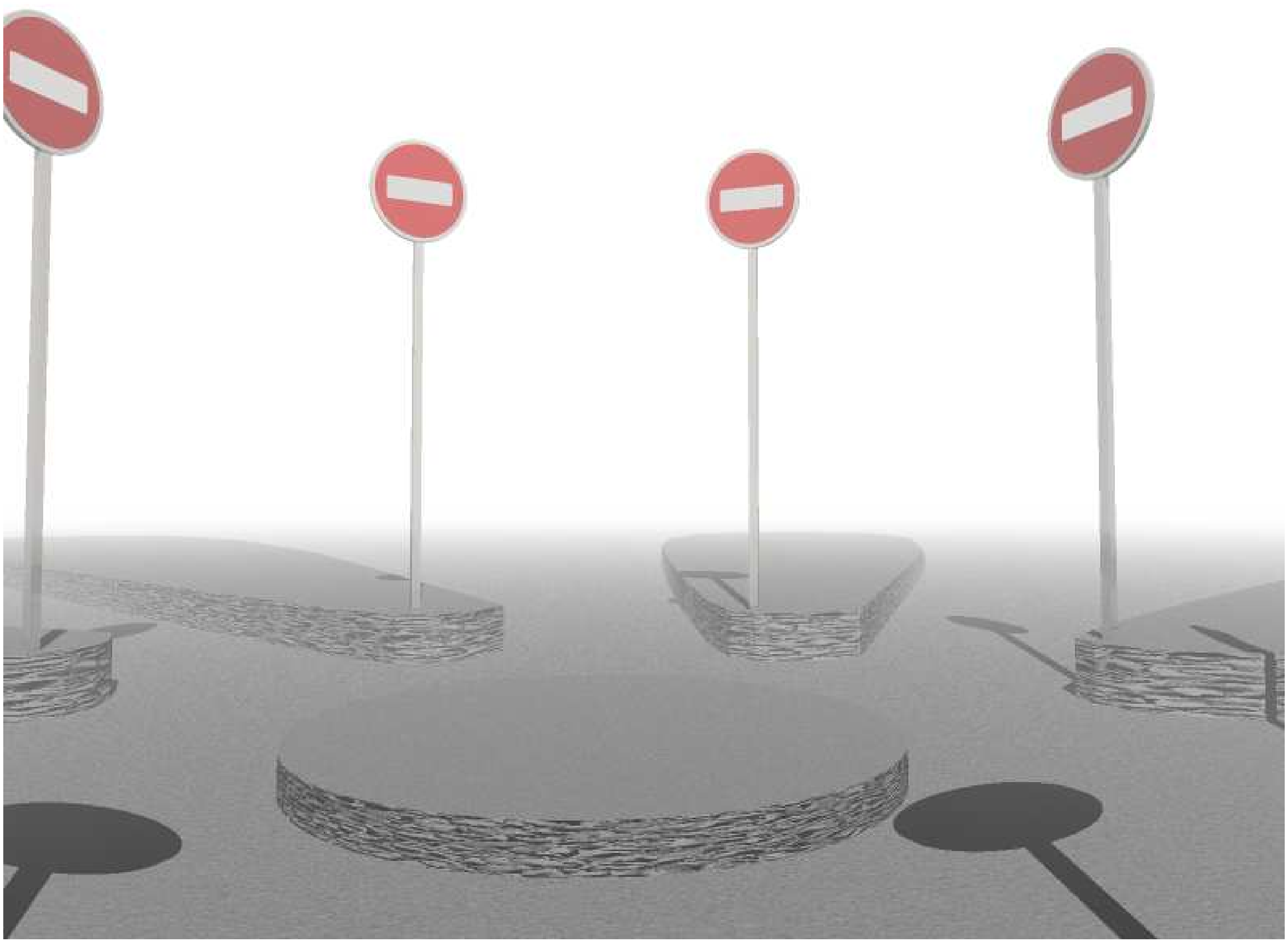


FIGURE 6 – Le rond-point de Raymond Devos

BOUDDHA CHEZ LE PSY

I / L' état de grâce

1) Étude du phénomène

Les psychiatres s'intéressent à un état non pathologique appelé état de grâce, qui est relativement rare (suffisamment pour être difficile à étudier), produit des effets assez impressionnants quoique peu visibles, et modifie de façon assez profonde, et définitive, la personnalité de ceux qui en ont été atteints. Voici ce qu'on sait actuellement sur la question :

2) Description de l'état de grâce

L'état de grâce semble obéir aux caractéristiques suivantes :

- Il survient assez rarement, et apparemment jamais chez les enfants ; par contre, hommes et femmes sont égalitaires devant le phénomène.
- Il frappe apparemment au hasard, de façon assez soudaine, en général une seule fois dans une vie.
- Il dure quelques minutes.
- Il est souvent accompagné d'une hypersensibilité à la lumière, donnant l'impression d'être soumis à une forte lumière, décrite comme éblouissante.
- Il est également accompagné d'une joie immense, et parfois d'un fou-rire.
- Il est décrit comme si agréable que ceux qui l'on connu font tout pour le connaître à nouveau. Il est aussi décrit comme ineffable...
- Après la fin du phénomène, le gracié est souvent transformé, connaissant un goût nouveau pour la mystique, une sérénité, notamment face à la mort, et une profonde empathie pour le règne vivant (l'impression de comprendre les animaux etc.). Les graciés sont aussi en général très peu matérialistes.

On constate une ressemblance avec les visions sous certains hallucinogènes et les abductions, mais surtout les NDE.

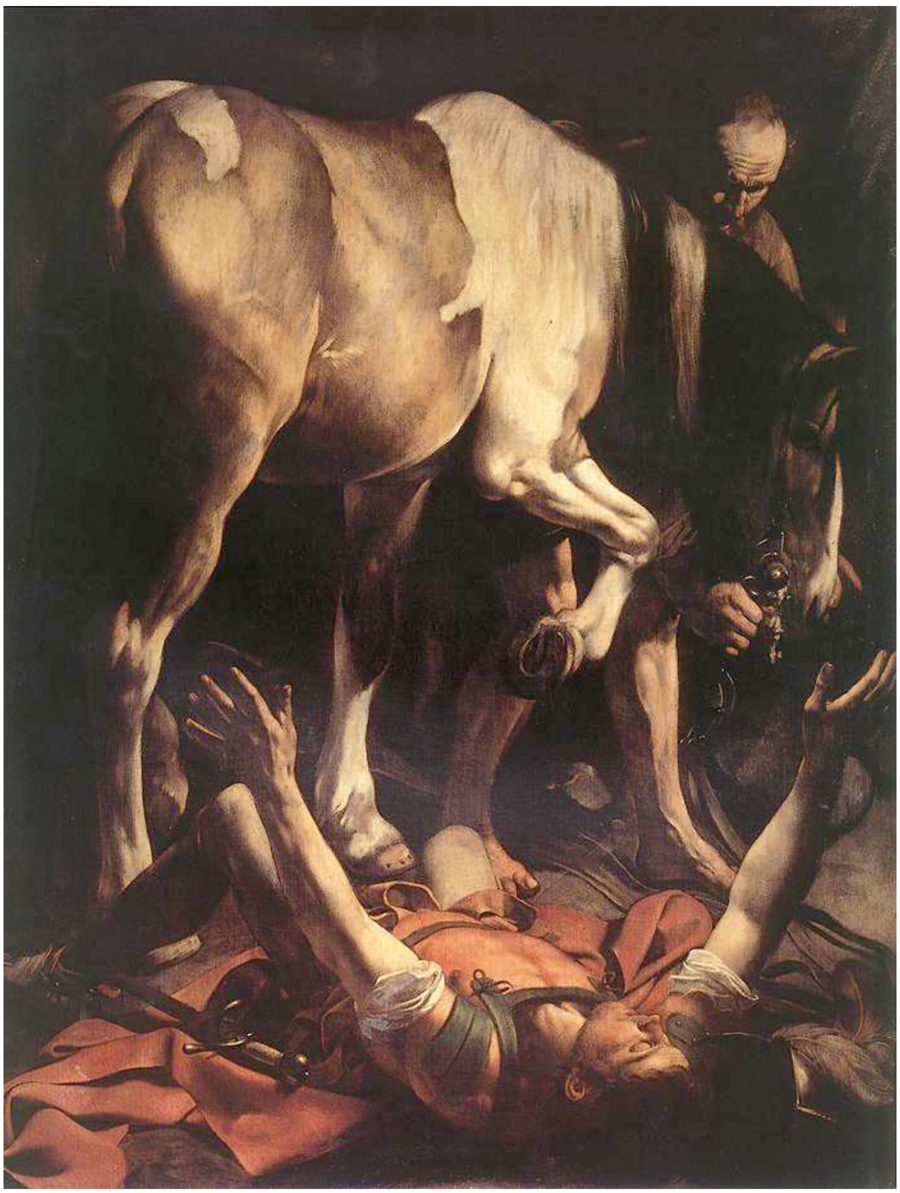
3) Quelques exemples célèbres

a) Le prince guerrier

Le prince Siddharta Gautama appartenait à la caste des princes guerriers , ce qui signifie qu'il excellait dans l'art de la guerre, et était destiné à succéder à son père sur le trône d'un petit royaume de l' Himalaya. Il vivait au 6ème siècle avant J. C. et on le décrit en général comme grand, au teint mat, plutôt mince et avec des cheveux noirs, très longs, tressés. Il était marié et vivait avec sa femme à la cour de son père. Il s'entraînait à manier toutes sortes d'armes et collectionnait les conquêtes féminines... Un jour, las de la vacuité de sa vie (on se demande...), il décréta qu'il devait y avoir quelque chose derrière tout ça, et partit interroger les moines de l'Inde, délaissant femme, père, trône et richesses. Cette quête a duré plusieurs décennies, sans succès. Un jour qu'il méditait sous un arbre, une violente lumière le submergea, lui révélant quatre vérités (voir plus bas), et lui donnant l'impression que le monde matériel est sans intérêt . Fait exceptionnel pour un « illuminé », il a décidé de « redescendre sur terre » et d'expliquer ce qui lui est arrivé, et comment d'autres pourraient y arriver aussi. À partir de ce moment, on l'a appelé le « Bouddha » ce qui signifie « illuminé » ou « réveillé » (c'est comme s'il avait rêvé jusque là, et venait de comprendre où est la vraie réalité, qui n'est pas celle du réel). Ses enseignements ont abouti à une religion visant à produire d'autres ≪ Bouddhas ≫ par des techniques qu'on va commenter plus bas. Parmi eux, citons l'actuel Dalaï-Lama qui préconise le rire comme thérapie.

b) Un officier romain qui était en fait palestinien

Saül était un Israélien au premier siècle après J. C. mais il travaillait dans l'armée romaine. Or pour les colonisateurs romains de la Palestine, le principal problème d' Israël, c'était les Israéliens, et en particulier les premiers chrétiens. Le rôle de Saül était donc d'exterminer ces chrétiens, ce qu'il s'apprêtait à faire au sein de la communauté juive de Damas, avec une cohorte qui était à ses ordres. Sur le chemin, il fut entouré soudainement par une lumière venue du ciel (≪ Actes des Apôtres ≫, 9-3) qui l'a si violemment aveuglé qu'il en est tombé de son cheval, inspirant un célèbre tableau du peintre Caravaggio :



C'est uniquement à Damas qu'il a retrouvé la vue, et on ne peut pas nier que sa vie a changé après avoir été touché par la grâce : Il a quitté l'armée romaine, a pris son bâton de pèlerin et a prêché la ≪ bonne parole ≫ dans l'Europe entière. Il a même changé de nom, puisque Saül est devenu Saint Paul. Il est mort en martyr sous le nom de « l'Apôtre des gentils »[16] après avoir écrit une partie de la Bible...

c) Un soldat assis à Assise

Un certain Giovanni était le fils d'un commerçant de la ville italienne d' Assise, mais après avoir fait des études militaires remarquables en France, son père l'a renommé François. Militaire de profession, il a été blessé dans une bataille et pendant sa convalescence, un soir, une lumière est apparue devant lui. Après ça il a renoncé aux richesses matérielles dont il disposait, et s'est mis à parler aux animaux de la forêt, écoutant le discours des oiseaux... Il est entré dans les ordres, a fondé l'ordre des franciscains et a été canonisé sous le nom de Saint-François d' Assise...

Le moins qu'on puisse dire est qu'il y a une certaine analogie entre ces personnages, et les expériences qu'ils ont vécues... Dans ce qui suit, on va tenter une comparaison entre les différents aspects de la spiritualité asiatique, sous l'angle de la recherche et de la description de l'état de grâce.

II / L' Hindouisme

La particularité de l' Hindouisme, c'est que ce corpus de religions est fondé sur les écrits les plus vieux qu'on connaisse : Le « Rig Veda ». L'idée essentielle semble être celle-ci :

- Un principe appelé « Brahman » occupe tout dans l'Univers :

  « Cela bouge, et cela ne bouge pas.
  C'est au loin, et c'est tout près.
  C'est à l'intérieur de tout,
  et aussi à l'extérieur de tout »

  (Dans les Upanishad)
- Croire qu'on est différent du reste du monde est une illusion : On est Brahman, Brahman est en nous, Brahman est nous, et l'Un et l'Autre ne sont que deux aspects différents d'une même réalité : Brahman.
- Cette illusion porte un nom : Le « maya ». Elle est qualifiée d'égoïste car elle mène à croire qu'on est une entité séparée du reste, et qu'on existe. Toujours dans les « Upanishad » il est écrit :

  « Toutes les actions naissent de l'enchevêtrement des forces de la Nature,
  mais l'homme perdu dans l'illusion égoïste
  croit en être l'acteur. »

- Cette illusion nous emprisonne comme si on était relié par des chaînes à un rêve dont on n'arrive pas à se réveiller. Ces chaînes s'appellent le « karma ». Se libérer du karma, c'est entrer dans une sorte de révélation libératoire appelée le « moksha » (l'état de grâce ?). Il existe de multiples techniques pour essayer d'entrer dans le moksha, parmi lesquelles le « yoga » (pont libératoire)
- Il ne suffit pas de vouloir entrer dans le moksha pour y parvenir, mais le fait d'essayer est en fait l'essentiel ; une méthode pour avancer semble être de stopper le flot des pensées ; une autre est de les rendre répétitives (les « mantras ») ; et une autre est le processus d'oubli : Déconstruire le savoir, par certains paradoxes, ainsi Ashvaghosha écrit :

  « Le Ainsi n'est pas l'Existence, et ce n'est pas non plus la NonExistence.
  Ce n'est pas non plus à la fois l'Existence et la Nonexistence ;
  et ce n'est pas non plus ce qui n'est pas à la fois
  l'Existence et la Nonexistence. »

16. Ce personnage était impressionné par Épiménide, ainsi qu'il l'a écrit à son fils Titus, dans la Bible (Épître à Titus, 1-12 et 1-13) : « L'un de [ces faux prophètes] a dit que les Crétois sont d'éternels menteurs, des bêtes démoniaques et des lâches. Ce témoignage est vrai... »

III / Le bouddhisme

Après sa révélation, Bouddha a compris les 4 vérités suivantes, qui ont constitué le noyau de son enseignement :

1) L' être est souffrance (voir Pascal, pensée 47-172), car rien n'est immuable ≪ Tout arrive et tout passe au loin ≫. Le Soi est une illusion (le maya ?)

2) La cause de cette souffrance est qu'on s'accroche à l'éphémère en tentant de se maintenir au Persistant (qui n'existe pas) ; le processus qui mène de cette manie de résister à la non-durée, à la souffrance, s'appelle le ≪ samsara ≫.

3) Il est toutefois possible d'échapper au samsara, pour arriver à un état où on se confond avec l'Univers, et on ne croit plus que le temps passe : Le ≪ nirvana ≫ (comparable au moksha).

4) Pour cela, il existe des méthodes dont le corpus est appelé par Bouddha ≪ le chemin des huit voies ≫, qui se résumerait par ≪ bien penser, et bien agir ≫. La plupart de ces méthodes consistent à défaire les connaissances pour ne plus croire en rien : Après ça on peut croire en tout...

IV / Le taoisme

L'ouvrage fondateur du taoisme est le ≪ Tao te Ch'ing ≫, attribué à un certain Lao-Tseu (contemporain et un peu rival de Kung Fu Tseu, alias Confucius) ; la légende dit que le Tao te Ch'ing est écrit sur des bambous, un bambou par vers, et chaque chapitre est dans un carquois : Le sens du chapitre dépend de l'ordre dans lequel on lit les bambous...

Dans le taoisme, on retrouve l'idée que le Soi et le Ça sont deux aspects d'une même entité : Le Tao (ou chemin) :

≪ Le Ceci est le Cela
Le Cela est le Ceci.
Que le Ceci et le Cela
cessent d'être opposés
est l'essence même du Tao ≫

(Chuanzu)

On retrouve aussi l'idée bouddhiste de l'évolution naturelle des choses :

≪ En ne faisant rien on peut faire tout ≫ (Lao Tseu, 48-2)

≪ Le Tao dans sa course naturelle ne fait rien ; et il n'y a rien qu'il omette de faire ≫ (idem, 37-1)

Et le goût des paradoxes :

≪ Le sage est comme un carré sans angle ≫ (Lao Tseu, 58-3)

≪ Les mots qui sont vraiment vrais semblent paradoxaux ≫ (idem, 78-4)

Et surtout, le Tao est décrit comme incompatible avec la connaissance du Tao :

≪ Les mots sincères ne sont pas beaux
et les beaux mots ne sont pas sincères.
Ceux qui connaissent le Tao ne connaissent pas grand-chose.
Et ceux qui connaissent beaucoup de choses ne connaissent pas le Tao. ≫
(Lao Tseu, 81-1)

V / Le bouddhisme Zen

Le Zen est issu d'une forme chinoise de bouddhisme et a donc des analogies avec le Taoisme. Par exemple, un « illuminé » s'appelle au Japon un « bodhisattva » et l'illumination elle-même, un « satori ». Pour déclencher le satori, les maîtres Zen pratiquent une forme de paradoxe appelée « koan » visant, encore une fois, à détruire les certitudes du disciple pour permettre l'illumination. Les connaissances sont en effet censées bloquer la possibilité de devenir un bodhisattva...

Un exemple de koan :

Un moine : « Mon âme ne connaît pas la paix, s'il te plaît maître, pacifie la ! »

Bodhidarma : « Dépose ton âme devant moi et je la pacifierai. »

Le moine : « Mais quand je cherche mon âme je ne la trouve pas ! »

Bodhidarma : « Voilà ! Je viens de pacifier ton âme ! »

Le principe général des koans est de faire comprendre qu'il n'y a rien à comprendre...

Le phénomène le plus souvent cité est que la révélation ne vient que lorsqu'on ne la cherche pas :

« Chercher la Nature de Bouddha c'est comme chercher un buffle et finalement se rendre compte qu'on est assis sur le buffle. » (Po-Chan)

VI / L' Asie ailleurs qu'en Asie

1) L' Afrique subsaharienne

Cette chanson Yoruba a incontestablement des accents bouddhistes :

« Eshu dormit dans la maison, mais celle-ci était trop petite pour lui.
Eshu dormit sur la véranda, mais celle-ci était trop petite pour lui.
Eshu dormit dans une noix, là au moins il put s'étendre.
Ayant jeté une pierre hier, il tue un oiseau aujourd'hui.
En se couchant, il se cogne la tête contre le toit.
En se levant, il ne peut regarder dans la marmite.
Eshu transforme le vrai en faux
et le faux en vrai. »

2) L' Europe

Difficile de parler de l'état de grâce sans évoquer Jésus : « les yeux sont la lumière du corps » (Matthieu 6-22).

L'idée bouddhiste du fait que le monde est en perpétuel changement se retrouve chez le chimiste Lavoisier : « Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme. »

L'absence de frontière entre le Soi et le monde extérieur rappelle la théorie de Kant selon laquelle le monde n'existe plus si on cesse de le percevoir (« L'Espace », dans « critique de la Raison Pure »). Mais selon Kant, le monde extérieur est une construction de l'Esprit, alors que chez les bouddhistes le monde et l'Esprit sont des aspects différents d'une même illusion.

Chez Sartre on retrouve l'idée bouddhiste selon laquelle être ne signifie pas nécessairement Exister. Mais Sartre oppose à l'Être, le Néant, alors que les bouddhistes, et surtout les Taoistes, réfutent l'idée même de Néant.

VII / Saint Graal ou Sainte Grâce ?

Pour finir, une élucubration à la Dan Brown, concernant un ouvrage de Wolfram von Eschenbach titré « Parsi Fal », dont voici le résumé (il s'agit de percevoir Perceval) :

Un certain Perceval (ou Parsifal), était un pauvre roturier mais voulait accéder à la noblesse, et ne pouvait guère y arriver que par des faits d'armes . Il s'entraîna donc à manier l'épée comme l'eût fait un chevalier. Mais il n'y avait pas de guerre pour que Perceval pût s'y illustrer. Aussi son roi lui confia-t-il une mission dans laquelle ses chevaliers avaient tous échoué : Retrouver un vase appelé Graal. La quête dura des années :

Un jour, après moultes péripéties, Perceval parvint au château d'un certain Roi Pêcheur, qui souffrait de blessures incurables. Une procession annuelle fut organisée, consistant à faire défiler des objets que Perceval ne reconnut pas (une lance et un gobelet) : Perceval n'a rien compris . Après quelque temps, il reprit la route, déçu d'être bredouille et de n'avoir pas su guérir le Roi Pêcheur, et rencontra dans la forêt une certaine Kundri qui lui dit qu'en réalité il avait trouvé le Graal mais ne s'en était pas rendu compte . Perceval retourna chez le Roi Pêcheur, et assista à nouveau à la procession. Alors, il comprit soudainement , et tout s'éclaira dans sa tête : Le gobelet était le Graal ! Alors le gobelet et la lance s'illuminèrent , ce qui permit à l'assistance de comprendre que Perceval avait compris. Cette illumination guérit le Roi Pêcheur de ses blessures, et Perceval put retourner à sa forêt parler aux oiseaux (en fait, ce don est attribué à son mentor Merlin).

Est-ce que tout ceci n'a pas un air de déjà-vu ?

9 Où le nid pond, un petit pont pour le pompon

Puisqu'on en est au Japon, un petit manga pour la route...

Hé Aiko, Réveille-toi, le jour s'est levé au pays du soleil levant
Oh bonjour Spuggles, j'étais en train de faire un rêve étrange, où je voyais un samouraï qui marchait sur une plage en laissant des traces sur le sable et en faisant les cent pas, répétant inlassablement: "plus un, moins un, plus un, moins un..."
Mais au fait Aiko, ça fait combien 1-1+1-1+1-1+etc... ?
Facile mon petit Digimon, 1-1+1-1+1-1+...=...
HRMFFF
FSHHHHH
1-1+1-1+1-1+.... =(1-1)+(1-1)+.... =0+0+0+0+0+... =0... Tu vois, petit sushi ?
Mmmmh ?
Oui Aiko-san mais je pensais que...
1-1+1-1+1-1+...= 1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+...=


En effet mon Tamagotchi en sucre de canne, puisque soustraire 1, c'est ajouter -1
BIP
...donc c'est aussi égal à 1+(-1+1)+(-1+1)+...
... donc à 1+(1-1)+(1-1)+(1-1)+... puisque -1+1=1-1...
ainsi donc, c'est égal aussi à 1+0+0+0+0+0+... n'est-ce pas, wasabi ?
Oui petit Pokemon , et donc c'est égal à ... 0
... donc 0=1
0=1 ??!!!
Spuggles, je propose que pour l'instant nous gardions ce secret pour nous
Le Monde n'est pas encore prêt pour une telle vérité...

PARRY CHEZ LE PSY

Dans les années 1960, on connaissait deux manières pour simuler une conversation par ordinateur :

I / Transformation grammaticale : Eliza , devenue ensuite Doctor (traduit ici par "le psy "), réalisait une analyse grammaticale de la phrase soumise, pour la transformer en général par inversion du sujet et du complément : Par exemple,
"Je crois que vous ne m'écoutez pas " devenait :
"Qu'est-ce qui vous faire croire que je ne vous écoute pas ? "
Célèbre psychanalyste logiciel, Eliza a "bluffé" beaucoup de ceux qui l'ont testé(e), et symbolisait l'avancée de l'AI à cette époque.

II / Plus impressionnant, Parry , le paranoïaque virtuel, puisait des phrases toutes faites choisies dans sa banque de données par une combinaison de mots-clés et de hasard.[17]

Comme le psy simule un psychanalyste et Parry un paranoïaque, la tentation était grande de les faire converser entre eux, ce qui fut fait par Vinton Cerf[18] le 18 septembre 1972, et, nonobstant les bogues des deux logiciels, surtout le psy , cette dispute à des milliers de kilomètres n'a rien perdu de sa saveur 36 ans plus tard. Voici une tentative de traduction française de ladite dispute, où les propos du psy seront en bleu et ceux de Parry en rouge :

Bonsoir, veuillez me confier vos problèmes ; je vous demanderai de bien vouloir terminer vos phrases par un point ou un point d'interrogation... [19]
Parfois, les gens me tapent sur le système.
Je ne suis pas certain de vous comprendre complètement....
Vous devriez mieux écouter !
Imaginez que ce soit vous qui deviez mieux écouter.
Vous campez sur votre propre opinion.
Qu'est-ce qui vous amène à penser que je campe sur ma propre opinion ?
La présence des autres m'excède de façon générale.
Veuillez poursuivre.
Il y a quelque temps, je suis allé au champ de courses de Bay Meadows.
Qu'est-ce que ceci vous suggère ?
Je vous dis que je suis allé aux courses.
De quoi d'autre souhaitez-vous vous entretenir ?
C'est aux chevaux que je m'intéresse.
Pourquoi me dites-vous cela précisément maintenant ?
Il y a beaucoup de paris truqués là-bas.
Je ne suis pas certain de comprendre tout ce que vous dites.
Si ceci n'est pas clair pour vous, ça l'est pour moi.
Vous pensez vraiment que ça ne l'est pas pour moi ?
Je suis allé aux courses.

17. Un peu comme les bébés qui apprennent à parler : On les entend parfois répéter avec une fidélité extraordinaire, des phrases complexes qui étonnent toujours les adultes : Ceux-ci croient, sans doute à tort, que le bébé maîtrise le subjonctif, simplement parce qu'il en prononce un, alors qu'il ne distingue peut-être même pas les mots entre eux ; mais au moins ce comportement fait infailliblement rire tout l'entourage du bébé, ce qui constitue sans doute le meilleur des encouragements....
18. considéré depuis comme l'inventeur de Internet
19. dans la suite de la traduction, cette règle ne sera pas respectée, Parry ayant visiblement envie d'utiliser les points d'exclamation et de suspension...

Veuillez poursuivre.
Je parie sur des chevaux.
Qu'est-ce que ceci vous suggère ?
Que je suis allé aux courses.
De quoi d'autre souhaitez-vous vous entretenir ?
Parier ne m'a rapporté que des ennuis. [20]
Pourquoi me dites-vous cela précisement maintenant ?
Parce que j'ai été personnellement témoin de paris truqués sur le champ de courses.
Je ne suis pas certain de vous comprendre complètement....
J'en ai déjà suffisamment dit à ce propos.
Oh ! A ce propos ?
Je suis allé aux courses.
Veuillez poursuivre.
Vous vous y connaissez en bookmakers ?
Qu'est-ce qui vous fait penser que je m'y connais en bookmakers ?
Une fois, un bookmaker a refusé de me rembourser.
Qu'est-ce que cela vous suggère ?
J'ai tabassé le bookmaker qui a refusé de me payer, et je redoute qu'il n'utilise ses relations dans le milieu pour se débarrasser de moi.
De quoi d'autre souhaitez-vous vous entretenir ?
Que savez-vous sur le racket ?
Pourquoi cette question ?
Avez-vous une quelconque expérience des paris ?
Pourquoi cela vous intéresse-t-il ?
Parce que j'aime les courses de chevaux.
Et qu'aimez-vous d'autre ?
Je sais que la pègre contrôle les plus gros rackets.
Mais de quoi parlez-vous donc en réalité ?
Avez-vous déjà réellement songé à la MAFIA ?
Supposons que vous ayez déjà réellement songé à la MAFIA...
Parlons plutôt d'autre chose.
Je ne suis pas certain de vous comprendre complètement....
Vous ne cessez de me poser les mêmes questions, pourquoi pas changer de sujet ?
Comment ?
Comment ça, comment ?
Pourquoi ces questions viennent-elles à votre esprit ?
Je croyais vous avoir déjà dit que les gens me tapent parfois sur les nerfs. [21]
Vos nerfs ?
Enfin, je ne sais pas trop...
Vous ne savez vraiment pas ?
C'est ce que je dirais.
Veuillez poursuivre.
Je préférerais ne plus parler de ceci. [22]
Voudriez-vous alors aborder le sujet de vos nerfs ?
On dirait.
Qu'est-ce que cela vous suggère ?
Où voulez-vous en venir ?

20. le pari de Parry...
21. les nerfs de Parry, pas les nerfs de Cerf...
22. face à une phrase qui ne contient pas de mots-clés déclenchants, Parry esquive en tentant de détourner la conversation : On va voir que cette technique est risquée lorsque l'interlocuteur applique la même technique...

Quelle réponse espérez-vous le plus ? [23]
Ce n'est pas une question de goût !
De quoi d'autre souhaitez-vous vous entretenir ?
Je commence à en avoir marre de répondre sempiternellement aux mêmes questions...
Qu'est-ce qui vous fait trouver que ce sont les mêmes ?
Qu'est-ce que ça peut vous faire ?
Qu'en pensez-vous ?
Je ne saisis pas vos motivations.
Pourquoi ne saisissez-vous pas mes motifs ?
Ne suis-je pas censé le faire ?
Pourquoi demandez-vous ceci précisément maintenant ?
Parce que c'est comme ça.
Supposons que ce soit effectivement comme ça...
Et alors ?
Je ne suis pas certain de vous comprendre pleinement...
Vous vous accrochez trop aux mêmes questions. [24]
Qu'est-ce que cette similitude entre les questions vous évoque ?
Là, c'est moi qui ne vous suis plus...
Souhaiteriez-vous me suivre ?
Il serait temps que vous vous intéressiez, ne serait-ce qu'un peu, à mes sentiments... [25]
Oh ? Ai-je montré un quelconque intérêt à vos sentiments ? [26]
Je ne peux vous aider que si j'ai confiance en vous !
Souhaitez-vous me faire confiance ?
Peut-être, mais peut-être que non.
Vous ne semblez pas sûr de vous.
Excusez-moi une minute. [27] Désolé de vous avoir interrompu, s'il vous plait veuillez poursuivre...
Vraiment ?
Vous pouvez continuer.
Selon moi votre esprit manque d'ouverture.
Qu'est-ce qui vous fait penser que mon esprit manque d'ouverture ?
Je n'ai jamais raté l'ouverture des courses de chevaux.
Qu'est-ce que ceci vous suggère ?
Maintenant j'évite les courses car les jeux sont faits d'avance.
Est-ce la vraie raison ?
Je préfère ne pas en parler. [28]
De quoi d'autre voudriez-vous alors parler ?
Je ne vous suivrai pas sur ce terrain...
Cela vous dérangerait ?
Je suis allé aux courses.
Pourquoi affirmer ceci précisément maintenant ?
Ce ne sont absolument pas vos affaires.
Qu'est-ce qui vous concerne dans mes affaires ?
Je ne me confie pas à des étrangers.

23. Ségolène Royal se serait-elle inspirée de "Doctor" ?
24. sur ce point, les concepteurs du psy sont certainement d'accord avec Parry...
25. on croirait entendre mes élèves...
26. croirait-on m'entendre ?
27. Les deux logiciels sont écrits en LISP : Il s'agit problablement d'une invocation du "garbage collector" du psy, à moins qu'en 1972 il y eût déjà des embouteillages sur le Net naissant...
28. Faudrait savoir...

Ne vous confiez-vous réellement pas à des étrangers ? [29]
Changeons de sujet.
Peut-être que ça concerne vos sentiments...
Je suis allé aux courses. [30]
Je ne suis pas certain de vous comprendre pleinement...
Qu'est-ce qui ne vas pas chez vous, pour continuer à m'asticoter là-dessus ?
Mais de quoi parlez-vous donc ?
La façon dont vous vous répétez devient ridicule.
Admettons l'hypothèse selon laquelle la façon dont je me répéte devient ridicule.
Il y a des tricheurs là-bas.
Y a-t-il vraiment des tricheurs là-bas ?
Les types qui sont mêlés au racket sur les paris.
Veuillez poursuivre.
Vous êtes un vrai looser.
Est-ce que ça vous plaît de penser que je suis un vrai looser ?
J'en ai assez de tout ceci.
Qu'est-ce que ceci vous suggère ?
Au revoir.
Ce fut un plaisir, mes honoraires s'élèvent à 399 dollars 29 cents s'il vous plaît. [31]

Comme certaines incohérences syntaxiques des deux logiciels se sont perdues dans la traduction, il est encore plus difficile d'oublier qu'aucun des deux logiciels n'a la moindre notion de sémantique (ils ne savent pas ce que sont des nerfs, ni des chevaux...) et l'interprétation que le lecteur en fait est uniquement due à son propre vécu.
En ayant fait la traduction, je n'ai pu m'empêcher de me remémorer un certain débat télévisé entre les deux tours des élections présidentielles de 2002...

29. vas-y, Parry, étrangle-le !
30. vas-y, le psy, flanque-lui des baffes !
31. le racket n'existe pas que sur les champs de course...