



IREM



École supérieure
du professorat
et de l'éducation
Académie de La Réunion

MASTER 2 MEÉF PREMIER DEGRÉ

PROFESSEUR DES ÉCOLES

Cycle 3 : Remédier à une construction non- opérationnelle de la numération à l'aide d'un abaque historique

Marie-Jeanne GUILLOTIN

N° étudiant : 33005651

Catherine DUGAIN ép. ABROUSSE

N° étudiant : 33005570

Session : 2015

Sous la direction de : Luc TIENNOT

Jury :

Dominique TOURNÈS, professeur des universités, président
Luc TIENNOT, formateur à l'ÉSPÉ de la Réunion

Engagement de non plagiat

Article 1 : définition

Les travaux quels qu'ils soient (devoirs, comptes rendus, mémoires, articles, thèses), réalisés par les étudiants rattachés à l'Université, doivent toujours avoir pour ambition de produire un savoir inédit et d'offrir une lecture nouvelle et personnelle d'un sujet. Le plagiat constitue une violation très grave de l'éthique universitaire. Le plagiat consiste à s'approprier le travail d'autrui, c'est-à-dire à utiliser et reproduire le résultat de ce travail (texte ou partie de texte, image, graphique, photo, données...) sans préciser qu'il provient de quelqu'un d'autre. Très concrètement : on plagie quand on ne cite pas l'auteur des sources que l'on utilise et quand on ne met pas une citation entre guillemets. Le plagiat, est un vol intellectuel. Il s'agit donc d'un délit, passible de sanctions.

Article 2 : circonstances aggravantes

Le plagiat est en soi un délit. Mais le fait de commettre un plagiat en vue d'obtenir indûment une note, un diplôme ou un grade universitaire est une circonstance aggravante. La reproduction d'une œuvre originale sans le consentement de l'auteur est de plus qualifiée juridiquement de contrefaçon (articles L. 335-2 et L. 335-3 du code de la propriété intellectuelle).

Article 3 : engagements

Les étudiants s'engagent à citer, en respectant les règles de l'art, les travaux qu'ils utilisent ou reproduisent partiellement. La méthodologie d'un travail universitaire, quel qu'il soit, implique que les emprunts soient clairement identifiés (guillemets) et que le nom de l'auteur et la source de l'extrait soient mentionnés. - Les enseignants s'engagent à sensibiliser leurs étudiants à la lutte contre le plagiat, à leur faire signer la présente charte, et à les inciter à participer aux formations sur le sujet qui seront organisées aux différents niveaux de leur cursus. Il s'agit non seulement de leur expliquer ce qu'est exactement le plagiat, mais de leur montrer que celui-ci et ses différentes formes détournées (traduction mot à mot non référencée, paraphrase sans aucun effort de reformulation, etc.) est contraire aux exigences du travail universitaire demandé et évalué.

Article 4 : sanctions

Les manquements à la présente charte sont passibles de sanctions disciplinaires. La procédure disciplinaire ne préjuge pas d'éventuelles poursuites judiciaires dans les cas où le plagiat est aussi caractérisé comme étant une contrefaçon.

Signature de l'étudiant (précédé de la mention « lu et approuvé »)

« Chaque difficulté rencontrée doit être l'occasion d'un nouveau progrès. »

Pierre de Coubertin

Remerciements

À Luc Tiennot, notre directeur de mémoire, pour ses conseils et son exigence, pour son accompagnement et ses encouragements.

Aux équipes de l'IREM de la Réunion et de l'ÉSPÉ de Bretagne pour les échanges et conseils pratiques apportés ainsi que pour leur regard critique.

À nos maîtresses d'accueil temporaire, Brigitte Calteau et Elsa Siguier, pour leur bienveillance, leurs encouragements et leurs enseignements tout au long de l'année.

Aux équipes des circonscriptions de Saint-Pierre 1 et des Avirons/Étang-Salé qui nous ont accueillies et accompagnées cette année.

À tous nos collègues des écoles Raphaël Barquiseau et Martin Luther King, pour leur soutien.

À tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la formation des enseignantes que nous sommes et qui nous ont donné envie de faire ce métier.

Sommaire

1	INTRODUCTION	3
2	CADRE THÉORIQUE	5
2.1	Point de départ de la recherche.....	5
2.2	La construction du nombre et la numération dans les I.O.	6
2.2.1	En maternelle.....	7
2.2.2	Au cycle 2.....	8
2.2.3	Au cycle 3.....	8
2.3	Mise en place d'une remédiation par la manipulation d'objets à calculer	9
2.3.1	Qu'est-ce que la remédiation ?.....	9
2.3.2	La manipulation dans les apprentissages.....	9
2.3.3	Le développement de l'enfant et l'apprentissage des mathématiques	11
2.3.4	La neuropsychologie et la connaissance des nombres	13
2.3.5	Comment faire et avec quels outils ?.....	14
3	PROBLÉMATIQUE.....	21
4	CADRE MÉTHODOLOGIQUE	22
4.1	Contexte.....	22
4.2	Terrain.....	22
4.3	Population.....	23
5	ACTIVITÉS MENÉES EN CLASSE ET PROGRESSION	25
5.1	Progression	27
5.2	Le matériel utilisé	28
5.2.1	Le <i>Kit Calculus</i>	28
5.3	Les séquences	31
5.3.1	Numération : séquence 1	33
5.3.2	Calcul instrumenté : séquence 1	36
5.3.3	Calcul instrumenté : séquence 2.....	39

5.3.4	Calcul instrumenté : séquence 3.....	41
5.4	Les activités ritualisées.....	42
5.5	Les difficultés rencontrées.....	43
5.6	Prolongements.....	47
6	RÉSULTATS DE L'EXPÉRIMENTATION.....	50
6.1	Comparaison des évaluations intra-classe.....	50
6.2	Comparaison des évaluations inter-classe.....	53
6.3	Un nouveau défi : la soustraction.....	55
7	CONCLUSION.....	59
8	BIBLIOGRAPHIE.....	61
9	ANNEXES.....	64

1 INTRODUCTION

Dans le cadre de la deuxième année du master métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation « MEÉF », option professeur des écoles (PÉ), il nous est demandé de réaliser un mémoire professionnel. Étudiantes-stagiaires, nous avons effectué notre prise de poste à mi-temps dans deux écoles à la fois singulières mais empreintes de forts points communs. Nous avons effectué nos premiers pas dans des classes de cycle 3, où il nous a semblé intéressant d'interroger spécifiquement les difficultés en mathématiques et plus particulièrement les difficultés relatives à la construction du nombre et au sens du calcul.

En effet, nos élèves, scolarisés dans des écoles situées en zone d'éducation prioritaire dont nous ferons le descriptif plus loin, manifestaient des difficultés importantes dans le domaine de la numération en contradiction avec des performances relativement correctes en calcul posé. Face à ces difficultés, d'une part, et à ces réussites, d'autre part, les jeunes enseignantes que nous sommes, étaient déstabilisées. Comment analyser ces difficultés ? Comment aider nos élèves à progresser, alors même que les apprentissages antérieurs à leur niveau de classe actuel sont fragiles ?

Cette thématique est par ailleurs d'actualité, car les évaluations nationales n'ont de cesse de démontrer la baisse du niveau en mathématiques des élèves en France, tout comme l'enquête internationale Pisa¹ :

« Les résultats du système éducatif français sont préoccupants parce qu'ils mettent en évidence, sur les dix dernières années :

- une baisse du niveau moyen en mathématiques : entre 2003 et 2013, la France perd 5 places en passant de la 13^e à la 18^e place sur 34 pays
- un accroissement des écarts de niveau entre les élèves qui s'explique par le plus grand nombre d'élèves en difficulté, alors que dans les autres pays de l'OCDE, cette part est stable
- une aggravation des déterminismes sociaux : l'école française est aujourd'hui celle des pays de l'OCDE où l'origine sociale des enfants pèse le plus lourd dans les résultats scolaires, et cette tendance s'est accrue ces dix dernières années » (Peillon, 2013).

Les nombreux articles parus suite aux évaluations nationales et à l'enquête Pisa semblent mettre en exergue la relation entre le milieu social et les résultats des élèves en mathématiques. Catherine Moisan², en réaction aux résultats de l'évaluation nationale Cedre³

¹ Programme international pour le suivi des élèves.

² Directrice de la Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance du ministère de l'éducation.

³ Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon.

met l'accent sur les enjeux de la situation sociale des élèves dans les apprentissages : « l'écart social se creuse. Le collège sait bien faire réussir les bons élèves et les élèves favorisés ». Mais au-delà de ce déterminisme, nous nous proposons ici de réfléchir à l'amélioration de l'enseignement de cette discipline.

Ce mémoire émerge d'une réflexion liée à nos interrogations quant à la nature des difficultés rencontrées dans nos classes respectives. Malgré les singularités de nos écoles, les multiples ressemblances entre nos contextes d'exercice nous ont permis de collaborer à l'élaboration de ce travail. Celui-ci a pour objectif de construire et de mettre en œuvre une proposition de remédiation pour l'acquisition des compétences en mathématiques s'appuyant sur la compréhension du fonctionnement de notre système de numération.

Ce travail présentera dans un premier temps les apports théoriques des domaines de la pédagogie, de la psychologie et de la neuropsychologie sur l'apprentissage, ainsi que les possibilités qu'offrent les instruments à calculer issus de l'histoire des mathématiques. Dans un second temps, nous décrirons nos terrains de stage et notre échantillon d'étude, puis nous exposerons le travail réalisé dans nos classes cette année. Enfin, nous présenterons et analyserons les données recueillies afin de statuer sur l'efficacité de notre dispositif de remédiation.

2 CADRE THÉORIQUE

2.1 Point de départ de la recherche

En début d'année, nous avons fait passer à nos élèves des évaluations diagnostiques devant nous permettre de dresser un portrait des compétences maîtrisées par chacun d'entre eux. Les évaluations en mathématiques nous ont permis de déceler un faible niveau général, notamment en numération. Suite à cela, nous avons débuté les enseignements visant à l'acquisition des compétences de cycle 3. Cependant, les activités menées en début d'année, qu'elles relèvent des rituels, des séances de numération ou des séances de calcul, nous ont permis de déceler un problème de fond en mathématiques.

En effet, lors des premières séances de numération, nous nous sommes heurtées à une difficulté et une incompréhension presque générale. Pour autant, il nous était alors impossible d'attribuer ces difficultés à la seule compétence des élèves, puisque notre statut d'enseignant stagiaire et notre manque d'expérience a pu aussi induire ces difficultés.

Lors des séances de calcul, où il s'agissait de révision des compétences des niveaux précédent (CE1 ou CE2), nous avons remarqué que la majorité des élèves savent appliquer les techniques opératoires et n'ont donc pas de problèmes majeurs.

Cette situation nous a interpellées ; nous nous sommes demandé comment il était possible de n'avoir aucun problème en calcul, alors que des difficultés se manifestaient en numération (chiffre des / nombre de, décomposition de nombres, etc.). Pour compenser les lacunes en numération, nous avons mis en place des activités ritualisées (dictées de nombre, identification du chiffre des...) qui selon nous, devaient permettre de réactiver les connaissances acquises antérieurement. Or, ces activités nous ont permis d'identifier la source des problèmes, à savoir la non-intériorisation du *sens* de notre numération décimale de position.

Quelques productions d'élèves lors des évaluations diagnostiques sont présentées ci-dessous :

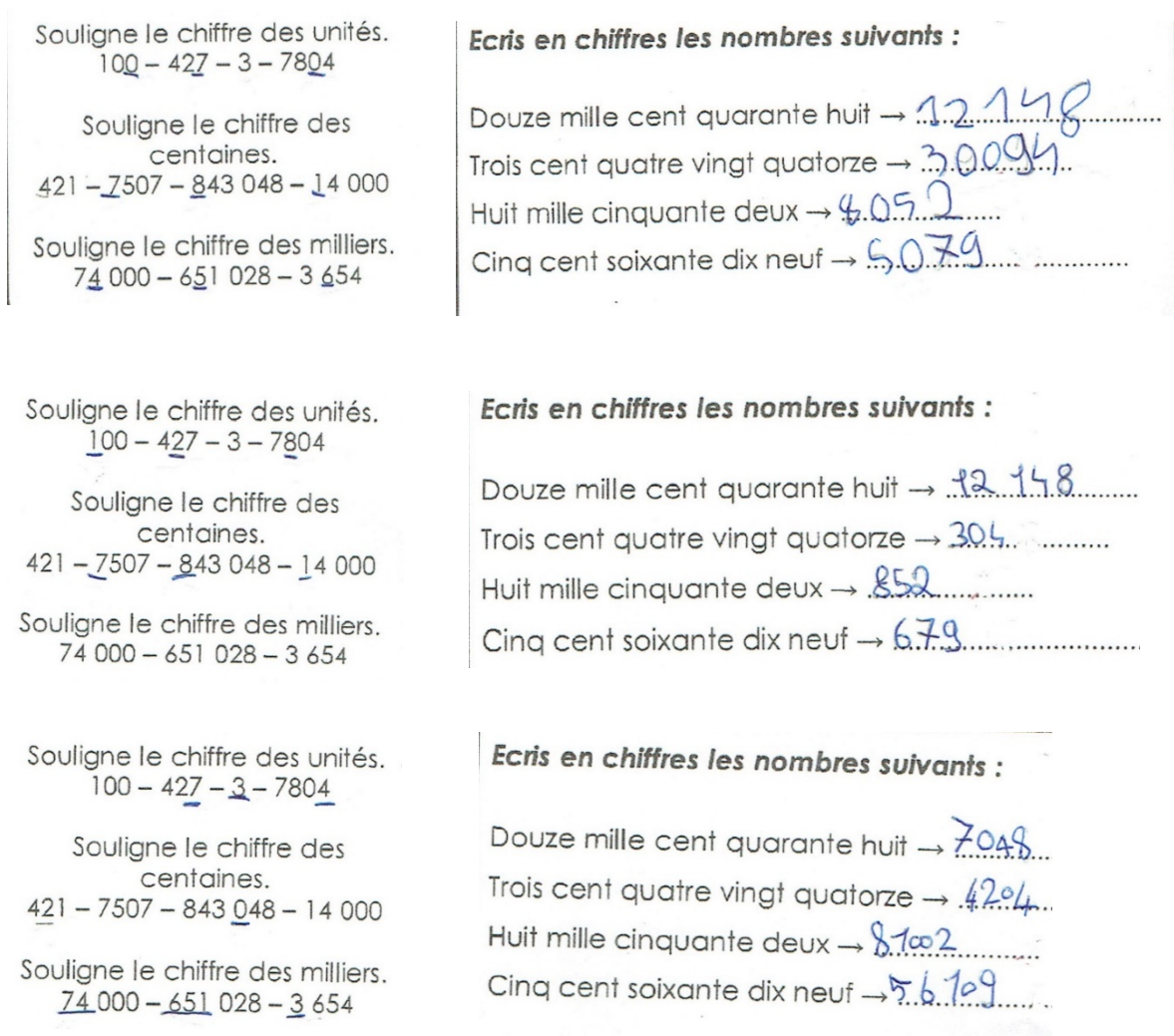


Figure 1: Productions d'élèves lors de l'évaluation diagnostique, août 2014.

Ces divers constats nous ont donc amenées à nous poser cette question de départ : *comment remédier à une construction de la numération décimale de position, dont les représentations sont non-opérationnelles ?*

2.2 La construction du nombre et la numération dans les I.O.

Si nous avons pu constater les difficultés de nos élèves, c'est à la lumière des évaluations diagnostiques que nous leur avons fait passé en début d'année scolaire, mais également au regard des programmes d'enseignement. Afin de bien comprendre dans quel contexte se situe notre travail, nous allons passer en revue, de manière globale, les éléments importants de la progressivité des apprentissages relatifs au nombre et à la numération, sur la durée de la scolarisation dans le premier degré.

2.2.1 En maternelle

Dans les nouveaux programmes de l'école maternelle qui seront en vigueur à partir de la rentrée 2015, publiés au mois de mars dernier, les compétences liées aux mathématiques font partie du domaine « Construire les premiers outils pour structurer sa pensée » et sont listées sous le sous domaine « Découvrir les nombres et leur utilisation ». Dès les premières phrases, on y retrouve d'ailleurs les deux principes numériques auxquels on doit introduire les jeunes élèves : le principe cardinal et le principe ordinal (MEN⁴, 2015). Si les élèves sont en général confrontés, dans la vie courante, au principe ordinal (chaînes de télévision sur la télécommande, numéro de porte, etc.), il est plus complexe de bien installer le principe cardinal (Brissiaud, 2013). Ces nouveaux programmes semblent, selon nous, répondre davantage aux recommandations des chercheurs tels que Brissiaud. C'est ainsi que ce sous-domaine se subdivise encore en différentes compétences :

- Construire le nombre pour exprimer les quantités
- Stabiliser la connaissance des petits nombres
- Utiliser le nombre pour désigner un rang, une position
- Construire des premiers savoirs et savoir-faire avec rigueur

Les deux premières compétences se rapportent donc au principe cardinal des nombres. Il s'agit de comprendre que le nombre exprime une quantité, un ensemble d'éléments et non seulement le rang du dernier de ces éléments. La stabilisation de la connaissance des petits nombres passe, quant à elle, par leur décomposition. Ainsi, le nombre 3, c'est d'abord une collection de 3 objets, c'est « un, encore un, et encore un » et c'est aussi « deux, et un » et « un, et deux ». Cela peut sembler simple au premier abord, mais en réalité cet apprentissage est souvent « court-circuité » par l'apprentissage de la comptine numérique, qui renforce le principe ordinal. (Brissiaud, 2013 ; Brissiaud, 2005).

Les dernières compétences visent respectivement l'acquisition du principe ordinal, puis de la suite orale des nombres et de l'écriture chiffrée, et finalement le développement de la capacité à dénombrer, qui mobilise à la fois des connaissances et capacités relevant des précédentes compétences (connaître le principe cardinal, la suite orale des mots-nombres et éventuellement leur écriture). Une attention particulière doit cependant être portée au dénombrement, pour éviter l'un des écueils rapporté par Brissiaud : le comptage-numérotage, ou l'association terme à terme d'un mot-nombre avec un objet (Brissiaud, 2013).

⁴ Ministère de l'éducation nationale.

2.2.2 Au cycle 2

Si la construction du nombre est débutée en maternelle, c'est bien au cycle 2 (CP et CE1) que les élèves entrent dans les apprentissages de la numération décimale, sur les nombres jusqu'à 100 au CP puis inférieurs à 1 000 au CE1 (MEN, 2008). Il ne s'agit ici plus exclusivement de comprendre qu'un nombre désigne une quantité, mais également de comprendre les relations entre les nombres. Les élèves sont donc introduits aux principes de la numération en base 10 : 10 unités font une dizaine, 10 dizaines font 1 centaine, etc. Ils comprennent les relations entre les nombres, comptent de 10 en 10 et de 100 en 100, ils réalisent des décompositions additives, comparent, rangent et encadrent les nombres.

Parallèlement à ces apprentissages, ils apprennent également à calculer mentalement, en ligne ou en colonne. Les techniques opératoires de l'addition et même de la soustraction sont introduites dès le CP, alors même que les principes de notre numération décimale, sur les nombres jusqu'à 100, n'est pas achevée. Il ne faut d'ailleurs pas oublier que les obstacles les plus importants dans l'oralisation des nombres se situent dans le registre des nombres de zéro à cent (Johsua, Maurin, 1993 ; Tiennot, 2013a).

2.2.3 Au cycle 3

Au cycle 3, le registre numérique travaillé en numération est progressivement augmenté jusqu'au milliard. Une grande importance est accordée à la relation entre les nombres : comparaison, rangement, encadrement des nombres ainsi que les notions de double, moitié, triple et quart. Les nouveaux apprentissages en numération au cycle 3 concernent les fractions et les nombres décimaux. Ils interviennent au CM1 et sont poursuivis au CM2 (MEN, 2008). Il ne fait aucun doute que, pour bien comprendre les nombres décimaux, il est nécessaire d'avoir une bonne compréhension des fractions, mais surtout une construction de la numération décimale de position effective, où la relation entre les ordres est bien comprise et donc transférable aux ordres fractionnaires. Le projet de programme pour le cycle 3 incite d'ailleurs fortement à s'appuyer sur les connaissances des élèves sur la numération des entiers pour introduire les nombres décimaux et comprendre ce qui différencie ces derniers : « Il est indispensable d'étudier les spécificités des nombres décimaux par rapport aux nombres entiers, en particulier au regard de la relation d'ordre. Le lien à établir avec les connaissances acquises à propos des entiers est essentiel. Avoir une bonne compréhension des relations entre les différents rangs de numération des entiers (unités, dizaines, centaines de chaque ordre...) permet de les prolonger aux dixièmes, centièmes, etc. » (CSP, 2015b : 31).

2.3 Mise en place d'une remédiation par la manipulation d'objets à calculer

2.3.1 Qu'est-ce que la remédiation ?

C'est au regard des instructions officielles relatives aux programmes d'enseignement que nous pouvons dire que nous nous situons dans une démarche de remédiation. En effet, les difficultés que présentent nos élèves sont relatives à la compréhension des principes de notre numération décimale de position. Ces apprentissages sont normalement réalisés au cycle 2, ce qui permet, au cycle 3, de fixer les connaissances lors de la deuxième année du cours élémentaire, pour ensuite introduire les fractions et les nombres décimaux au cours des deux années du cours moyen.

Du point de vue pédagogique, la remédiation est « un dispositif plus ou moins formel qui consiste à fournir à l'apprenant de nouvelles activités d'apprentissage pour lui permettre de combler les lacunes diagnostiquées lors d'une évaluation formative » ; d'ailleurs, ce mot possède la même source étymologique que le mot *remède* (Raynal, Rieunier, 1997 : 319). C'est bien dans ce cadre que se situe notre mémoire, puisque, outre le fait que ce travail sur la numération s'effectue *a posteriori*, la thématique a émergé des évaluations diagnostiques et des premières activités en numération.

Philippe Meirieu met d'ailleurs en garde contre les effets indésirables possibles de la remédiation. Bien que cette pratique soit bénéfique pour permettre une remise à niveau des élèves qui éprouvent des difficultés, la multiplication de ces dispositifs risque de leur faire perdre progressivement leur lisibilité. D'autre part, il est juste de se questionner quant à la possible stigmatisation ressentie par les élèves visés par ces dispositifs. Il est donc justifié de s'interroger sur la pratique de la remédiation par rapport à la pédagogie différenciée (la première ne dispensant en rien l'enseignant de mettre en place la seconde). (Meirieu, 2005)

2.3.2 La manipulation dans les apprentissages

Les effets de la manipulation, d'objets ou de matériels concrets, sur les apprentissages sont bien connus de tous les éducateurs, pédagogues et psychologues cognitifs. Cette réalité relève d'ailleurs du consensus et elle est tellement admise par tous, qu'il n'y a pas, ou peu, d'écrits scientifiques portant sur ce thème. Si la manipulation est bénéfique pour les élèves dans plusieurs domaines d'apprentissages, elle l'est particulièrement lorsqu'il est question des mathématiques.

Malgré le peu d'études portant sur cette question, on sait que l'utilisation de matériel à manipuler permet, en mathématiques, de représenter visuellement une situation, qui autrement serait abstraite pour les élèves. Sur ce matériel concret, ceux-ci sont donc davantage en mesure de mettre leur raisonnement à l'épreuve et d'établir des liens entre différents concepts mathématiques. Une situation mathématique ainsi devenue concrète pour l'élève permet de créer des représentations qui serviront d'appui, de socle, à la création de représentations mentales qu'il pourra ensuite exploiter. Ce processus d'apprentissage, de la manipulation à la conceptualisation, permet à l'enfant d'apprendre à structurer sa pensée et aide « à établir les bases d'une conceptualisation mathématique profonde et durable » (ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2009 : 2). (ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006 ; Rocha, 2012).

Cette démarche est d'ailleurs celle que met en avant Liliane Baron, dans les différents livres du maître⁵ qu'elle a publiés. En portant notre attention sur un ouvrage intitulé « De la construction mathématique à sa représentation », destiné à des enseignants de grande section, on se rend compte que les séquences proposées respectent cette progressivité, du concret vers l'abstrait.

En effet, lors de la première séance, l'enseignant propose une situation-problème avec des supports divers : textes, comptines, etc. Cette situation de départ permet de faire une séance de langage, car le problème est discuté par les élèves : ils font émerger des questionnements, envisagent une démarche de résolution possible, qui sera testée lors de la deuxième séance. Celle-ci consiste d'ailleurs en une mise en situation des élèves qui « conduit l'enfant, par une manipulation à son échelle, à tester sa démarche [...], à la transformer pour aboutir à une solution satisfaisante. La mise en situation aide l'enfant à construire sa pensée logique et à affiner son raisonnement mathématique » (Baron, 1995 : 6). Cette situation vécue concrètement ou représentée par du matériel manipulable fera, lors de la troisième séance, l'objet d'une schématisation à l'aide d'une codification, proposée avec le concours des élèves. Cette étape permet, outre le réinvestissement et la systématisation des apprentissages, de faire un pas vers l'abstraction. La situation n'est plus vécue concrètement, mais bien représentée. Finalement, la dernière séance renvoie à un exercice proposé dans le fichier, qui permet à la fois d'évaluer les apprentissages des élèves et d'aller encore plus loin vers l'abstraction, en retravaillant à partir de la codification convenue lors séance 3.

⁵ *Du vécu au jeu mathématique, Du mouvement au tracé, Du graphisme à l'écriture*, ouvrages publiés aux éditions Magnard.

Ce schéma de séquence rend bien compte de l'importance que la manipulation ou le vécu prend dans la formation de la pensée mathématique et dans la création de représentations qui servent de socle pour mener vers l'abstraction. (Baron, 1995).

Si l'usage de la manipulation dans les apprentissages est recommandé et reconnu dans le domaine de l'éducation, on en parle souvent au regard des élèves de maternelle ou encore de cycle 2. En revanche, la manipulation pour des élèves de cycle 3 est moins souvent abordée, ou alors pour réaliser des apprentissages nouveaux (les fractions, la géométrie dans l'espace, les grandeurs et mesures). Cependant, nous pensons que la manipulation est une entrée dont il ne faut pas se priver, même avec des élèves plus âgés. Dans le but de remédier à des problèmes relevant de la construction de la numération chez des élèves de cycle 3, il nous était évident de privilégier les actions sur un objet concret, plutôt que l'oral ou écrit, pour permettre la réinstallation de représentations de la numération.

À la lecture des projets pour la mise en place des nouveaux programmes de cycle 2, on remarque d'ailleurs que l'usage de matériel concret est spécifiquement recommandé : les élèves doivent savoir que le nombre est un outil pour « prévoir des résultats d'actions portant sur des collections ou des grandeurs continues matérialisées d'abord puis le plus souvent évoquées » (CSP⁶, 2015a : 27).

2.3.3 Le développement de l'enfant et l'apprentissage des mathématiques

Si le monde de la pédagogie reconnaît les avantages de la manipulation, ce sont certainement les spécialistes de la psychologie cognitive qui se sont le plus intéressés au développement des enfants et à leurs processus d'apprentissage. Les travaux de plusieurs psychologues ont permis d'apporter des éclairages dans ce domaine. Même si leurs théories sont parfois divergentes à certains égards, aujourd'hui ces connaissances s'enrichissent mutuellement pour décrire le phénomène complexe qu'est l'apprentissage. Jean Piaget est certainement de ceux dont on parle le plus, avec Vygotsky, Bruner et Wallon.

Bien que certaines affirmations de Piaget aient été remises en cause par ses successeurs, on continue encore aujourd'hui de prendre appui sur ses découvertes, car ses recherches nous ont aidés

« à comprendre le développement des capacités intellectuelles des enfants.
Il a notamment mis de l'avant l'idée que le développement intellectuel est

⁶ Conseil Supérieur des Programmes.

un processus dynamique qui résulte de l'interaction entre l'enfant et son environnement. L'enfant agit sur son univers personnel et, à partir de ces interactions, construit son propre savoir » (Hendrick, 1997 : 518).

Piaget a d'ailleurs défini plusieurs stades auxquels les enfants semblaient acquérir certains savoirs, en fonction de leur âge. Pour reprendre brièvement ses théories, l'enfant se développerait en suivant des stades successifs.

Le premier d'entre eux serait le stade sensori-moteur entre 0 et 2 ans. À ce stade, l'enfant a une intelligence pratique qui est liée à son action sur le réel : l'enfant appréhende le monde par le toucher et la manipulation ; « il y a interaction directe de l'enfant avec son environnement » (Hendrick, 1997 : 515). Le stade suivant est le stade pré-opératoire (2 à 7 ans), où l'enfant commence à imiter, à utiliser des symboles, des images mentales, il se sert du jeu pour s'approprier la réalité, mais sa vision des choses n'est limitée qu'à son seul point de vue. L'égoïsme de l'enfant diminue au cours de cette période. L'enfant se prépare à la compréhension des opérations concrètes qui apparaît au stade suivant (7 à 11 ans). Sont alors acquis les concepts de conservation, réversibilité, sériation et classification.

« Cela implique que l'enfant considère que la longueur, le poids et le nombre demeurent constants ; qu'il comprend des expressions comme « plus grand que » et « plus petit que » ; qu'il est capable de disposer les objets selon un ordre de grandeur ; qu'il est capable de grouper les objets selon plus d'une caractéristique ; qu'il est capable de manipuler des objets en pensée, à condition qu'il s'agisse d'objets réels » (Hendrick, 1997 : 515).

Puis vient finalement le stade des opérations formelles, qui concerne les enfants de 11 à 15 ans, et qui est caractérisé par une logique formelle et un fonctionnement hypothético-déductif. Les enfants sont en mesure de considérer plusieurs solutions pour résoudre un problème, d'émettre des hypothèses et d'effectuer un retour réflexif sur celles-ci. (Hendrick, 1997).

Si on s'en tient aux stades de développement de l'enfant énoncés par Piaget, on comprend que la construction du nombre serait possible entre 7 et 11 ans. C'est en effet ce stade qui est caractérisé par l'acquisition d'un raisonnement logico-mathématique : les enfants sont donc aptes à prendre en compte plus d'un élément à la fois, et ils apprennent donc à les mettre en relation (ranger, classer des objets en considérant plus d'un attribut à la fois, forme et couleur par exemple, etc.). Cette logique permet de comprendre la réalité de la conservation sur des objets concrets, ainsi que le principe de réversibilité. Ces acquis entraînent le développement

de nouvelles habiletés intellectuelles, qui sont fondamentales pour l'apprentissage des mathématiques (Hendrick, 1997).

Du temps où les théories de Piaget étaient prépondérantes, les apprentissages mathématiques réalisés avant l'âge de 6-7 ans étaient des apprentissages pré-numériques (travail sur les formes, les couleurs, par des activités de tri, de rangement, etc.). À partir de 1986, le ministère de l'Éducation a publié une circulaire, dans laquelle il recommandait d'enseigner le nombre ainsi que la comptine numérique dès l'entrée en maternelle. Brissiaud appelle cette période « le basculement de 1986 », car il attribue à ce changement l'origine de la baisse du niveau général en mathématiques en France (Brissiaud, 2013 : 14). Cependant, Brissiaud est favorable à l'enseignement du nombre en maternelle, mais il considère que l'apprentissage et la récitation de la comptine numérique crée des obstacles à la construction du principe cardinal du nombre.

2.3.4 La neuropsychologie et la connaissance des nombres

La neuropsychologie va plus loin, et recherche dans la structure cérébrale les éléments associés à la construction et la connaissance des nombres. Le chercheur français qui s'est le plus illustré dans ce domaine est certainement Stanislas Dehaene. C'est grâce à des techniques d'imagerie cérébrales qu'il a pu établir ses conclusions.

Selon ce chercheur, tous les êtres humains, comme les animaux d'ailleurs, seraient dotés d'un sens inné permettant l'approximation des quantités. Ainsi, pour lui, le comptage serait très tôt accessible aux enfants, alors que le calcul engendrerait davantage d'obstacles, par la précision qu'il nécessite ainsi que par son étroite relation avec le langage (Brissiaud, 2005). Les conséquences qui découlent de cette prémisse ont été largement remises en question et divergent globalement des recommandations actuelles en matière de pédagogie, c'est pourquoi nous ne les détaillerons pas ici (Brissiaud, 2012, Brissiaud 2014).

La neuropsychologie a également permis de démontrer la connexion entre la manipulation, la création d'images mentales et le développement des capacités d'abstraction. En effet, des études ont démontré que lorsqu'un enfant manipule du matériel concret pour résoudre un problème mathématique, il active des neurones qui sont les mêmes que ceux qui lui permettront de résoudre le même type de problème de manière abstraite, sans passer par la manipulation (Dehaene, 2011, Zago, 2005). D'autre part, il est démontré que l'activité

cérébrale associée au calcul s'insère dans toute une série de tâches connexes comme illustré par le schéma suivant :

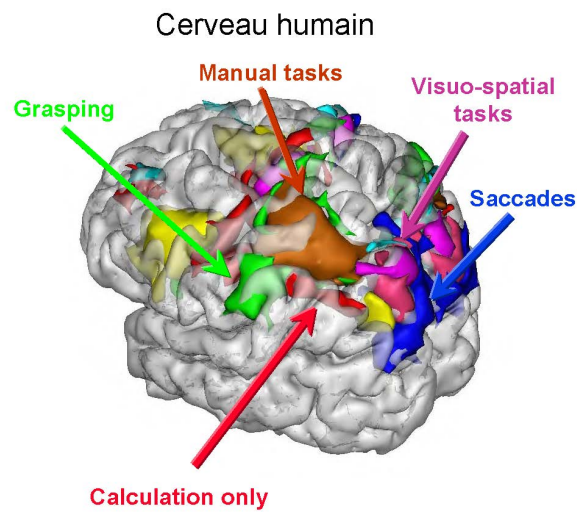


Figure 2: Zones d'activité cérébrale associées au calcul⁷.

Cette découverte vient donc confirmer l'importance de la manipulation dans les apprentissages et dans l'élaboration de représentations mentales opérationnelles, de gestes mentaux associés aux premiers gestes physiques.

2.3.5 Comment faire et avec quels outils ?

Pour mettre en place une remédiation en numération pour nos élèves, la question s'est posée, à savoir comment il fallait procéder et surtout à l'aide de quels outils. Lors des cours de mathématiques, durant notre formation à l'ESPÉ, nous avons abordé les abaques : certains pour leur intérêt pédagogique, et d'autres en relation avec l'histoire des mathématiques. Nous avons donc exploré à ce moment les potentialités qu'offrent les abaques en école élémentaire.

2.3.5.1 Des abaques utilisés avec les élèves

Il faut savoir que lorsqu'on parle d'abaques, il s'agit de tout dispositif graphique ou objet permettant de représenter les nombres et de calculer. À l'école primaire, on préfère réserver ce terme aux objets comportant des parties mobiles.

⁷ Schéma provenant de *fondements cognitifs de l'arithmétique élémentaire*, conférence de Stanislas Dehaene, 2011.

Le boulier chinois

Le boulier chinois est un abaque composé de plusieurs tiges, qui représentent chacune un ordre du système de numération décimal. Sur chaque tige, on retrouve deux boules quinaires, ainsi que cinq unaires, séparées par une barre transversale (Daval, 2014). Le boulier chinois est un abaque fermé, c'est-à-dire qu'on ne peut ni ajouter ni enlever de boules (Schärli, 2006, Poisard, 2006). Pour activer les unaires ou les quinaires, on les rapproche de la barre transversale.

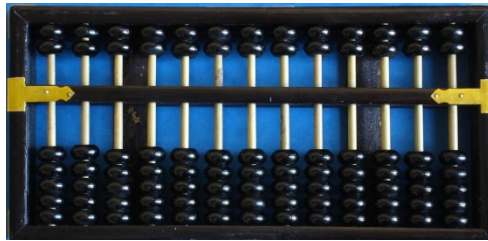


Figure 3 : Boulier chinois dont aucune boule n'est activée.

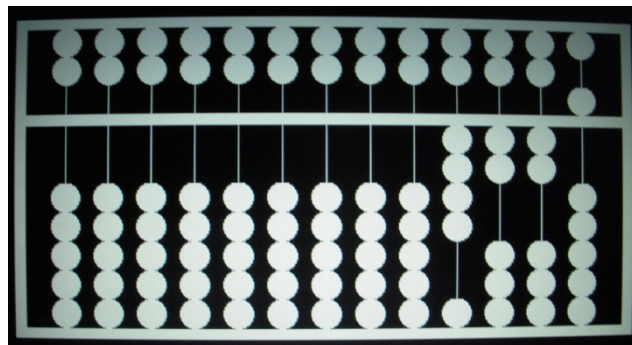


Figure 4 : Boulier virtuel sur lequel est inscrit le nombre 4 225.

Les boîtes Picbille

Les boîtes Picbille accompagnant la méthode « J'apprends les maths », dirigée par Rémi Brissiaud, constituent également un abaque, puisqu'elles permettent de représenter des nombres et de calculer. Ce matériel est constitué de boîtes longues comportant 10 cellules et se fermant par deux rabats (couvrant 5 cellules chacun). Pour inscrire un nombre sur ce type d'abaque, il suffit de placer des jetons dans chacune des cellules. Lorsqu'on a placé 5 jetons, on ferme un rabat, et lorsqu'on arrive à 10 jetons, les deux rabats sont fermés. Le fait de fermer un premier rabat après 5 jetons induit un travail autour des décompositions avec pivot à 5 (8, c'est 5 et encore 3) et ainsi la création des représentations mentales des premiers

nombres. Cet abaque est un outil intéressant qui permet de travailler sur le dénombrement et le calcul plutôt que sur le comptage-numérotage.

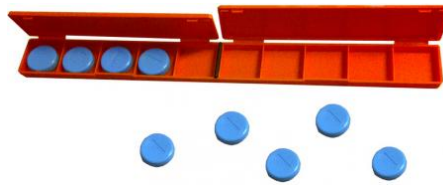


Figure 5 : Boîte Picbille où est inscrit le nombre 4.

Les abaques à tiges

L'abaque à tiges est, quant à lui, un abaque composé de tiges verticales sur lesquelles sont enfilés des objets (rondelles, perles, etc.). C'est la quantité d'objets sur chacune des tiges, constituant chacun des ordres, qui représente le nombre (Daval, 2014). Cet outil est intéressant de par son potentiel évolutif : au CP on travaillera d'abord avec deux tiges (unités et dizaines) puis une troisième (centaines), au CE1 on ajoutera une quatrième tige, et ainsi de suite pour pouvoir, au cycle 3, y inscrire les grands nombres (Tiennot, 2013b).

2.3.5.2 Des abaques historiques

Les abaques sont des instruments à calculer qui ont jalonné plusieurs grandes périodes historiques, de la Grèce antique à l'apparition des chiffres arabes en Europe, et même après. Même si les premiers utilisateurs des abaques ne connaissaient pas la numération de position, il semble qu'ils aient pressenti ce principe. En effet, selon Alain Schärli, la perception d'une numération de position dans les abaques anciens n'est qu'une projection de ce que nous connaissons et identifions comme tel. « Il est essentiel, chaque fois qu'on étudie [...] comment ils effectuaient leurs calculs, de se mettre dans la peau du calculateur d'autrefois : il *disait* les nombres presque comme nous, mais les *écrivait* tout autrement ; et il les *disposait* sur son abaque dans des colonnes qui nous rappellent, à nous, notre numération de position mais qui n'étaient pour lui qu'un moyen de regrouper les éléments constitutifs de ces nombres. » (Schärli, 2006 : 25). Ce point de vue est historique mais d'un point de vue mathématique nous pouvons admettre l'utilisation du principe de la numération de position puisque les abaques qu'ils ont élaborés fonctionnent selon ce principe (calculs effectués ordre par ordre, puis groupement-échange et changement d'ordre, etc.).

La naissance de l'abaque chez les anciens Grecs

La numération chez les Grecs avait la particularité de pouvoir prendre plusieurs formes. Les mots-nombres sont organisés en système de base décimale. Cependant, lorsqu'il s'agit d'écrire les nombres, deux numérations coexistent : la numération dite *acrophonique*, car plusieurs des signes sont les initiales des nombres qu'ils représentent, et la numération *alphabétique*, recourant aux lettres de l'alphabet grec (voir figure 6). Il a été démontré qu'avec l'une ou l'autre de ces numérations, il était très difficile, voire impossible, d'effectuer des calculs. C'est fort probablement pour cette raison que les Grecs ont commencé à utiliser les outils à calculer, proposition qui se confirme à la lumière des recherches historiques et archéologiques réalisées à ce sujet (Schärlig, 2006).

Ϟ	Μ	ϙ	Ϟ	Ϟ	Η	Ϟ	Δ	Ϟ	Ι
50 000	10 000	5 000	1 000	500	100	50	10	5	1
La numération acrophonique									
Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϛ	Ζ	Η	Θ	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	
Ϻ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Ϙ	
100	200	300	400	500	600	700	800	900	
La numération alphabétique									

Figure 6 : Les numérations grecques.

Manifestations historiques des abaquages

Si les premiers abaquages sont nés chez les Grecs, ils existaient également chez les Romains, car leur numération n'était pas davantage adaptée au calcul écrit.

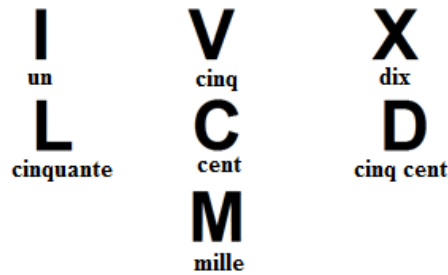


Figure 7 : Les principaux symboles de la numération romaine.

Mais ce sont bien les traces d'un abaque différent que l'on retrouve à cette époque ; il fonctionne davantage sur le principe du boulier japonais, c'est-à-dire qu'on utilise uniquement une quinaire et quatre unaires par ordre. Cet abaque est composé de rainures qui représentent chacun des ordres dans lesquelles coulissent des boutons : les ordres entiers fonctionnent en base décimale, tandis que la partie fractionnaire fonctionne en système duodécimal (Mlouka, Hidoine, 2006).

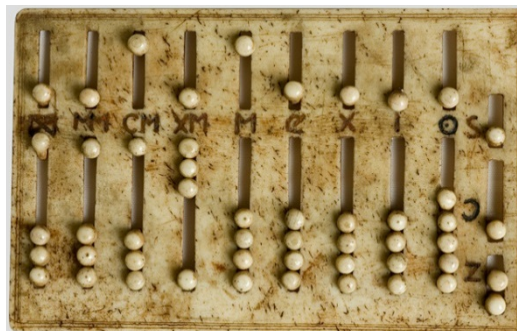


Figure 8 : Abaque romain.

C'est autour de l'an 1000 que l'on retrouve des traces d'un « nouvel abaque », ou abaque de Gerbert d'Aurillac. La différence majeure est que les jetons utilisés ne sont pas identiques : ils portent tous un chiffre de 1 à 9 (Schärlig, 2006). Son fonctionnement est plus complexe que celui des anciens abaques ; il fait d'ailleurs penser à la technique opératoire de l'addition posée en colonne que nous enseignons aujourd'hui (sans le chiffre 0, encore inutilisé). Ce nouvel abaque nécessite donc de disposer de 9 petits tas de jetons (plusieurs jetons marqués 1, plusieurs marqués 2, 3, etc.) et de connaître les tables d'addition par cœur.

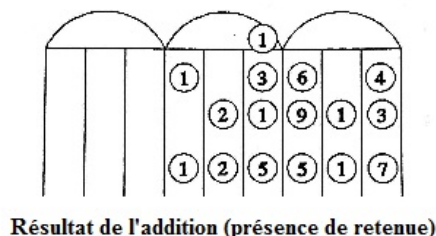
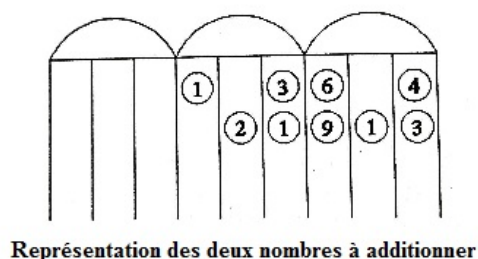


Figure 9 : L'addition avec l'abaque de Gerbert d'Aurillac.

Près de 500 ans plus tard, c'est l'abaque à lignes qui apparaît. Contrairement aux abaques précédents, les nombres ne sont pas représentés de gauche à droite, mais bien de haut en bas. Les jetons utilisés pour représenter les nombres sont tous identiques. Ils sont posés sur les lignes représentant les différents ordres (l'ordre des milliers est marqué par une croix sur les images ci-dessous), ou encore entre deux lignes, en position quinaire.



Figure 10 : Abaque à lignes tiré d'un livre datant du 16^e siècle.

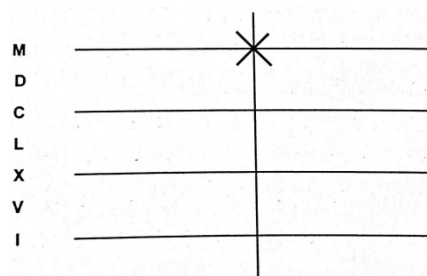


Figure 11 : Un abaque à lignes classique.

2.3.5.3 Matériel choisi

Au regard de ces éléments, nous avons donc choisi de travailler avec un abaque à lignes et ce pour plusieurs raisons. Il s'agit, en premier lieu, d'un abaque ouvert, c'est-à-dire qu'il est possible de rompre temporairement la règle du « pas plus de quatre » jetons par ligne. Pour des élèves rencontrant des difficultés, cela permet de voir de façon réelle les 7 jetons, par exemple, avant d'en grouper 5 pour les échanger contre un quinaire. De plus, le fait que tous les jetons soient identiques permet de renforcer le principe de la numération de position : c'est

en effet celle-ci qui donne la valeur à un jeton. En outre, l'abaque à lignes fonctionne avec des jetons quinaires et la décomposition avec pivot à 5 que cela occasionne, renforce les images mentales et, à terme, les compétences des élèves en calcul mental (Poisard, 2006).

Notre choix a d'ailleurs été renforcé par le fait qu'une recherche-action soit menée depuis plusieurs années par l'institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) de la Réunion, en liaison avec l'ÉSPÉ de Bretagne à Quimper, sur ce sujet. C'est d'ailleurs par cet intermédiaire que nous avons pu nous procurer le *Kit Calculus*, comprenant un abaque à lignes, appelé aussi abaque à jetons, destiné à des élèves de cycle 2, cycle 3, collège et lycée.

3 PROBLÉMATIQUE

Ces apports théoriques nous démontrent que la manipulation est un moyen par lequel tous les enfants passent pour appréhender le monde, le comprendre, tester leurs hypothèses, modéliser, représenter, etc. C'est donc une voie privilégiée, à l'école, pour construire des apprentissages solides, mais également pour remédier à des difficultés. La manipulation sert donc de base sur laquelle les élèves peuvent s'appuyer pour progresser vers l'abstraction.

D'ailleurs, face aux difficultés auxquelles sont confrontés les élèves de nos classes respectives en mathématiques, la manipulation représente une voie très riche à explorer. Les instruments à calculer qui ont jalonné l'histoire des différentes civilisations sont des outils tout à fait pertinents pour permettre cela, notamment dans les domaines qui nous intéressent ici, à savoir la numération et le calcul.

C'est à la lumière de ces éléments, que nous avons trouvé réponse à notre question de départ : l'utilisation des outils à calculer, dont l'abaque à lignes, contribue à diversifier et à renforcer les représentations mentales des élèves sur les nombres et la numération, voire à en créer. La question qui oriente notre expérimentation est donc :

Comment mettre en place des activités de remédiation à une construction insuffisante du nombre et de la numération, au moyen d'un artefact emprunté à l'histoire des mathématiques, et permettant la représentation des nombres ainsi que le calcul ?

Nous faisons l'hypothèse que la manipulation d'instruments à calculer, comme l'abaque à lignes, permettrait aux élèves de cycle 3 rencontrant des difficultés de saisir le sens et les principes de la numération décimale de position et ainsi de progresser en numération (et calcul).

4 CADRE MÉTHODOLOGIQUE

4.1 Contexte

Les activités de remédiation qui seront décrites plus loin ont été menées dans deux écoles faisant partie des réseaux de l'éducation prioritaire. Ces écoles ont deux points communs essentiels : le contexte socio-économique et des difficultés d'apprentissage des élèves généralisées à l'ensemble de l'école.

Du point de vue du contexte socio-économique, ces établissements sont situés en zone urbaine sensible. La majorité des habitations se trouvant à proximité sont des groupements de logements sociaux.

Parmi les familles des élèves fréquentant l'école, beaucoup d'entre elles sont monoparentales et les fratries sont souvent nombreuses. Une grande proportion des parents sont également sans emploi.

4.2 Terrain

Nous avons travaillé cette année dans deux classes⁸ de cycle 3. Ces deux classes font partie d'établissements inscrits dans des réseaux ÉCLAIR et seront classés l'an prochain en REP+.

La classe de CE2/CM1 est située dans une école qui compte un effectif réduit : environ 100 élèves pour 5 classes. La classe de CM1 ayant bénéficié de l'expérimentation est, quant à elle, intégrée à une grosse structure : 12 classes pour plus de 260 élèves.

Le domaine d'apprentissage dans lequel les élèves manifestent le plus de difficultés est la maîtrise de la langue française. En effet, dans nos deux classes, le français n'est pas la langue maternelle de la plupart des élèves. Cependant, les deux établissements diffèrent sur un point : alors que la grande majorité des élèves de l'école Martin Luther King parlent créole à la maison, les élèves de l'école Raphaël Barquisseau parlent plutôt des langues mahoraises : le *shimaoré* et le *kibushi*.

De plus, ces écoles sont dotées de dispositifs spécifiques tels que la présence de maîtres supplémentaires et d'intervenants, dans le cadre de la liaison école-collège. Ces derniers

⁸ La classe de CE2/CM1 de l'école élémentaire Martin Luther King (MLK) et une classe de CM1 de l'école élémentaire Raphaël Barquisseau (RB).

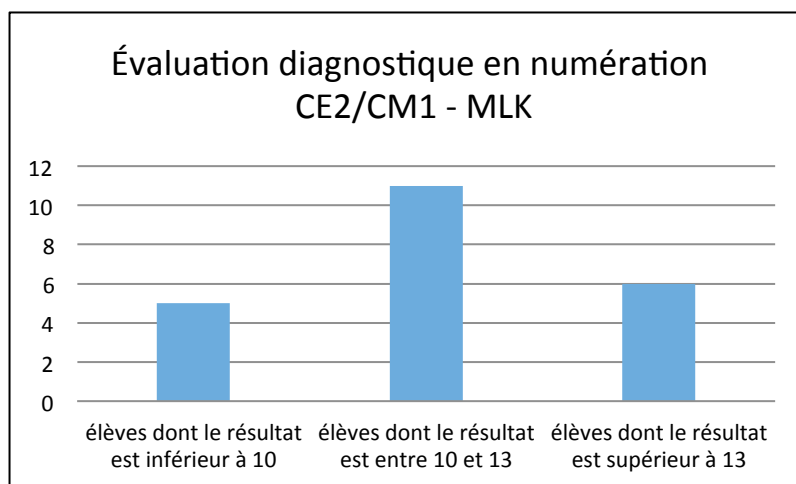
proposent, sur une période donnée, des interventions définies selon les besoins de l'équipe pédagogique, en mathématiques et français principalement. Nous avons nous même bénéficié de ce dispositif pour nos élèves cette année. Des décroissements existent dans chaque école, et nous soulignons un travail en équipe efficient dans ces établissements.

4.3 Population

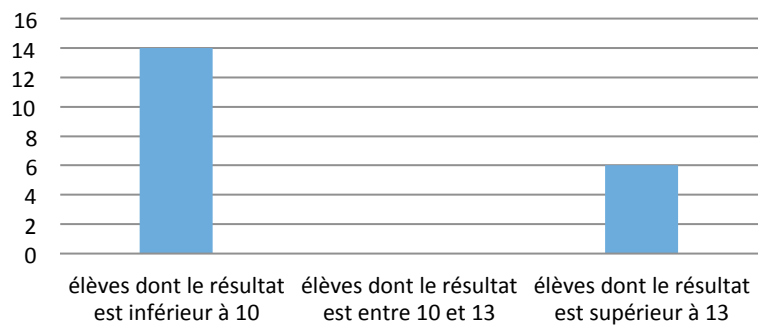
Les deux classes ayant participé à cette expérimentation forment un échantillon qui représente, à plus large échelle, une population d'élèves de cycle 3 présentant des difficultés en numération. Le tableau suivant présente les différentes caractéristiques de notre échantillon.

	Classe de CE2/CM1 MLK	Classe de CM1 RB
<i>Effectif de classe (F/G)</i>	22 (12/10)	22 (11/11)
<i>Élèves ayant été maintenus dans leur scolarité</i>	8	3
<i>Dont élèves ayant été maintenus cette année</i>	2	0
<i>Élèves suivis par le RASED</i>	4	3
<i>Élèves bénéficiant d'un PPRE</i>	3	4

Les compétences en numération posent également problème. Les graphiques suivants indiquent dans quelle proportion les élèves de chacune des classes ont obtenu un résultat supérieur à 13, compris entre 10 et 13 ou encore inférieur à 10, sur 20 points.



Évaluation diagnostique en numération CM1 - RB



5 ACTIVITÉS MENÉES EN CLASSE ET PROGRESSION

Les activités présentées ici ont été expérimentées en classe de CM1 (niveau unique) et en classe de CE2/CM1 (double niveau), dans le contexte décrit précédemment. Ces activités s'articulent autour des propositions de progression parues au Bulletin Officiel Hors-série du 19 juin 2008 (BO 2008) et du Socle commun des connaissances et des compétences.

Les compétences visées sont donc celles du palier 2 du Socle commun dont voici l'extrait qui nous intéresse :

« **Compétence 3 :**

Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique

A) Les principaux éléments de mathématiques

L'élève est capable de :

- écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (jusqu'au centième) et quelques fractions simples
- calculer mentalement en utilisant les quatre opérations » (BO, 2008 : 27)

Ces compétences s'articulent avec les compétences du BO 2008 concernant la numération et le calcul mental.

Pour les élèves de CE2 :

« *Les nombres entiers jusqu'au million*

- Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million.

[...]

Calcul sur des nombres entiers

Calculer mentalement

- Mémoriser et mobiliser les résultats des tables d'addition et de multiplication.
- Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits. » (BO, 2008 :38)

Pour les élèves de CM1 :

« *Les nombres entiers jusqu'au milliard*

- Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard.

[...]

Calcul

Calculer mentalement

- Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers. » (BO, 2008 : 38)

Il existe dans les textes prescriptifs trois types de calcul en cycle 3 : le calcul posé, le calcul mental et le calcul instrumenté. Néanmoins ce dernier type de calcul, « calcul instrumenté », ne fait référence, dans les textes officiels relatifs à l'école primaire, qu'à l'usage de la calculatrice :

« La place du calcul instrumenté : la calculatrice doit faire l'objet d'une utilisation raisonnée.

Le calcul instrumenté est largement répandu dans la vie courante. Chacun, quelle que soit son activité sociale ou professionnelle, peut avoir recours à l'usage d'une calculatrice. Il est donc essentiel que l'école soit en prise avec cette réalité de notre temps. L'enseignement du calcul doit donc faire une place à l'usage des calculatrices. Chaque élève doit disposer d'un tel outil et c'est à l'enseignant de choisir, en fonction de la progression adoptée et de la complexité des calculs, les situations pour lesquelles l'élève peut y avoir recours. La calculatrice sera notamment utilisée pour des grands nombres, pour des séries de calcul, pour des vérifications. Il est néanmoins très important de montrer aux élèves que si le recours à la calculatrice peut se révéler nécessaire pour certains calculs complexes, il est d'autres situations dans lesquelles le calcul mental s'avère plus rapide et plus efficace. On veillera à la vérification des résultats obtenus et on montrera à l'élève qu'il doit toujours y être attentif, par exemple en calculant mentalement un ordre de grandeur. » (MEN, 2007)

Or, l'utilisation d'instruments à calculer, tels que les abaques, peut tout à fait s'inscrire dans ce champ. Ces outils, qui offrent de nombreuses possibilités dans l'enseignement des mathématiques, sont d'ailleurs plus couramment utilisés aux cycles 1 et 2. Nous inscrivons donc notre expérience dans ce domaine et présentons ici des séquences d'apprentissage que nous avons nommées « séquences de calcul instrumenté » même s'il ne s'agit ici aucunement de l'usage de la calculatrice.

Il nous a été difficile de correspondre exactement aux attentes de programmes tout au long de notre progression, car l'expérience navigue entre la remédiation, l'acquisition des compétences en numération et le développement des capacités en calcul mental et, par transfert, des capacités en calcul posé, sans pour autant que cela soit un objectif spécifique des séquences proposées. Outre cela, l'outil privilégié est un instrument à calculer qui ne figure pas dans les programmes actuels.

Il est néanmoins important de rappeler que l'axe principal de notre travail demeure la compréhension du principe de la numération décimale de position. Ainsi ce travail participe au développement des compétences et connaissances se rattachant au domaine de la numération. L'un des obstacles rencontrés a été la mise en place d'une remédiation permettant la reconstruction des bases de la numération, tout en ne reportant pas les apprentissages prévus par les programmes de nos niveaux respectifs (les CM1 devaient pouvoir aborder les nombres décimaux avant la fin de l'année scolaire). Nous avons donc pris le parti de consacrer un créneau horaire de 30 minutes par semaine, dédié à un travail de remédiation, par des activités très progressives avec l'abaque, en plus des habituelles séances de numération. Cette façon de travailler favorise la compréhension de notre système de

numération décimale de position et la construction d'images mentales transférables ensuite à des situations de calcul ou de résolution de problèmes. Nous avons également intégré à notre démarche pédagogique des rituels mathématiques⁹ pour consolider certains apprentissages. Ceux-ci ont d'ailleurs évolué en fonction de notre progression dans les apprentissages.

5.1 Progression

Le tableau ci-dessous présente la progression mise en œuvre lors de cette expérimentation en classe. Les activités des deux domaines d'apprentissage, numération et calcul instrumenté, se sont déroulées en parallèle tout au long de l'année. En revanche, les premières séquences ont été introduites de manière à créer du lien entre les apprentissages de ces deux domaines.

NUMÉRATION	CALCUL INSTRUMENTÉ
<p>Séquence 1 : activités préparatoires (le Fourmillion)</p>	<p>Séquence 1 : représenter et lire les nombres avec l'abaque</p>
<p>Séquence 2 : Nommer, écrire et représenter en écriture chiffrée les nombres jusqu'au milliard</p>	<p>Séquence 2 : l'addition</p> <p>Séquences 3 : la soustraction</p>

Tableau 5.1 : Relation entre les domaines d'apprentissage en mathématiques.

Nous avons donc pris le parti de commencer l'année par une séquence de numération visant à redonner du sens à la numération décimale de position, à comprendre la

⁹ Ces rituels seront présentés dans un chapitre ci-après.

décomposition d'un nombre en groupements de 10, 100, 1000 et à comprendre le passage au rang supérieur, en manipulant des outils tels que des pois du Cap et des enveloppes¹⁰, des compteurs numériques, etc. Ces premières activités de manipulation ont été réalisées en même temps que la première séquence de calcul instrumenté. Cette première séquence axée sur l'utilisation de l'abaque (placer et reconnaître la valeur d'un jeton selon sa position) permet d'une part à l'élève de s'approprier un outil jusqu'à lors inconnu, et d'autre part de s'exercer principalement à la lecture et écriture de nombres. Le registre numérique travaillé étant progressivement élargi, cette séquence de calcul instrumenté mène les élèves tout naturellement vers les grands nombres en numération.

Nous poursuivons ensuite le travail en numération en mettant en place une progression classique¹¹. Cependant, un décalage s'opère rapidement entre ces activités et celles menées en calcul instrumenté, qui progressent plus lentement. Ce décalage est normal puisque le temps d'intégration des principes d'utilisation du nouvel outil qu'est l'abaque suppose l'acquisition de son fonctionnement. Chaque séquence de calcul instrumenté suit elle-même une progression intrinsèque qui sera détaillée dans les chapitres suivants.

5.2 Le matériel utilisé

5.2.1 Le Kit Calculus

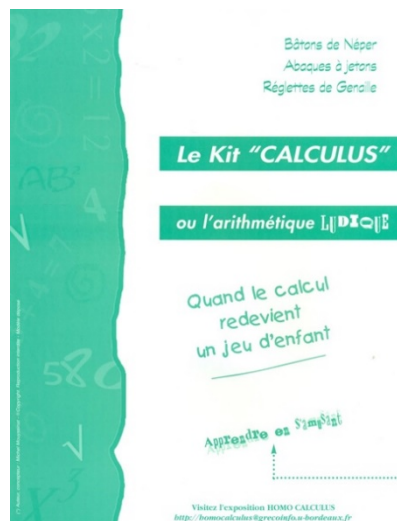


Figure 12: Recto.

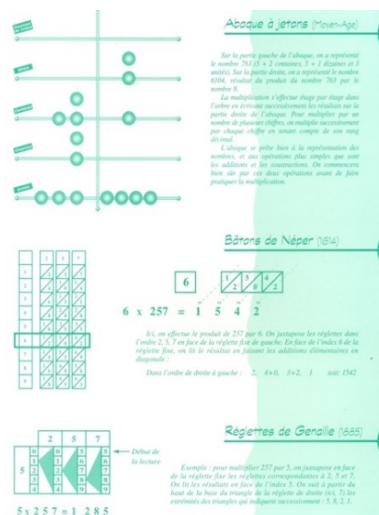


Figure 13: Verso.

¹⁰ Voir annexe A.

¹¹ « Progression classique » définit ici une progression réalisée à partir de théories didactiques et de manuels à disposition dans nos classes respectives prenant en compte une adaptation à nos élèves et à leur progression dans les apprentissages.

Le *Kit Calculus* a été élaboré par Michel Mouyssinat¹². Ce matériel pédagogique se présente sous forme d'un livret regroupant trois outils de calcul anciens : l'abaque à jetons, les bâtons de Néper et les réglettes de Genaille. Ces différents outils permettent une approche pédagogique « nouvelle » pouvant s'étendre du CP au niveau universitaire, poursuivant des objectifs adaptés à chaque niveau : numération, calcul, histoire des mathématiques, etc. Chaque outil possède néanmoins une fonction particulière : l'abaque à jetons permet de travailler la numération et le calcul, mais certaines opérations telles que la division sont compliquées à mettre en œuvre avec cet outil. Les bâtons de Néper, ainsi que les réglettes de Genaille, sont des outils destinés à calculer des produits.

Les objectifs visés et le niveau de nos élèves nous conduiront donc à utiliser en classe uniquement la partie abaque à jetons du *Kit Calculus*.



Figure 14 : Abaque élève (intérieur du kit Calculus).

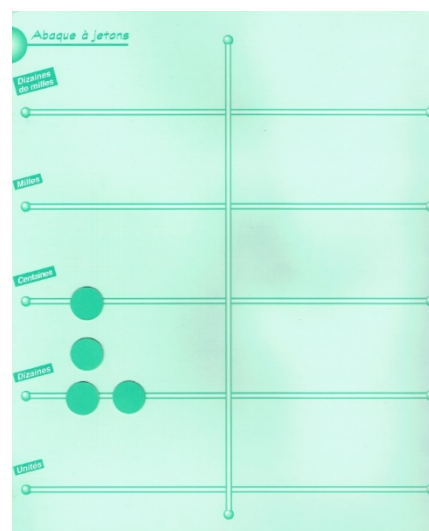


Figure 15 : Abaque collectif aimanté au tableau.

L'abaque à jetons est composé de lignes horizontales, chaque ligne représente un ordre en commençant en bas par l'ordre des unités. L'abaque est séparé en deux par une ligne verticale permettant de représenter un nombre à droite et un autre à gauche.

Pour représenter un nombre, l'utilisateur doit y poser des jetons qui prennent une valeur différente suivant leur position : soit la valeur d'une unité de l'ordre concerné lorsqu'il est sur une ligne (unaire), soit la valeur de cinq unités de l'ordre concerné lorsqu'il est positionné entre deux lignes (quinaire). Par exemple, sur l'abaque ci-dessus (figure 15) le nombre 170 a été représenté.

¹² Ingénieur en informatique et docteur en mathématiques.

Cet outil présente de nombreux avantages dans la construction du nombre à l'école primaire. D'une part, il s'agit de faire manipuler les élèves et, comme nous l'avons vu précédemment, la manipulation permet la création d'images mentales et la conceptualisation des principes de la numération décimale de position. De plus, le nombre est représenté par décomposition ; ainsi l'élève bénéficie d'un outil supplémentaire pour comprendre notre système de numération. D'autre part, l'introduction du quinaire oblige une décomposition additive des nombres à représenter dans chaque ordre, favorisant l'acquisition de procédures de calcul mental.

Un tutoriel, réalisé par Nathalie Daval, est disponible sur le site de l'IREM de la réunion, reprenant point par point le fonctionnement de l'abaque à jetons du *Kit Calculus*.

5.2.1.1 Un outil adapté à l'organisation de la classe

Cet outil a été distribué à chaque élève afin que chacun puisse manipuler. Même si certaines activités ont pu être menées en binôme, avec l'utilisation d'un abaque pour deux élèves, il semble important de permettre à chaque individu d'expérimenter son propre outil de manière à ne pas interférer dans les schémas cognitifs¹³ individuels.

Le même matériel a été reproduit au format A2, plastifié, et destiné à être aimanté au tableau. Ce matériel collectif, réalisable à moindre coût, permet une mise en œuvre efficiente des recherches collectives et des phases de mise en commun.

5.2.1.2 Un matériel évolutif

En fonction des besoins et moyens de la classe, ce matériel peut être modifié. Les éléments utiles à l'activité des élèves sont les lignes (pour représenter un nombre, il ne faut que les lignes horizontales, et pour calculer il faut les lignes horizontales et une ligne verticale pour séparer les deux nombres représentés), ainsi que des jetons. Il n'est donc pas fondamental de disposer du *Kit Calculus*, puisque ces lignes peuvent facilement être tracées lorsqu'on ne dispose que de papier et de crayons et les jetons remplacés par d'autres petits objets semblables (pois du Cap).

¹³ Terme emprunté à la psychologie.

Nous avons donc fait évoluer le matériel collectif en cours d'année, en retirant la dénomination de chaque ligne horizontale qui était devenue inutile aux élèves. Les jetons ont également été remplacés par des aimants. La couleur des aimants est aléatoire et ne présente aucun obstacle particulier pour les élèves, puisque que seule la position du jeton sur l'abaque détermine sa valeur. Cette affirmation a été bien intégrée par la totalité des élèves et a été clairement reformulée par ces derniers en réutilisant le vocabulaire approprié : « c'est pas grave la couleur, parce que c'est la position qui compte »¹⁴. Même s'il est indéniable que la couleur a une forte portée affective (certains élèves utilisent intuitivement certaines couleurs ou cherchent au maximum à unifier l'ensemble), cela n'interfère aucunement dans

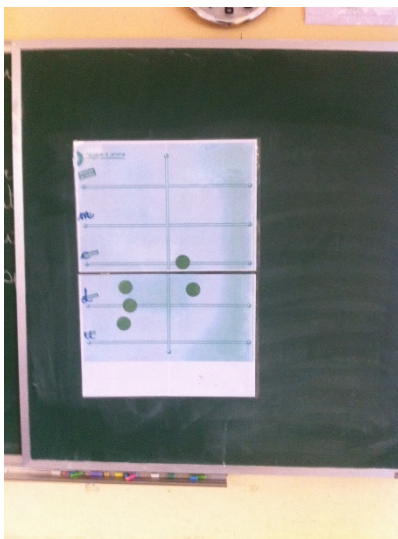


Figure 16: Abaque utilisé en collectif en période 1 et 2.

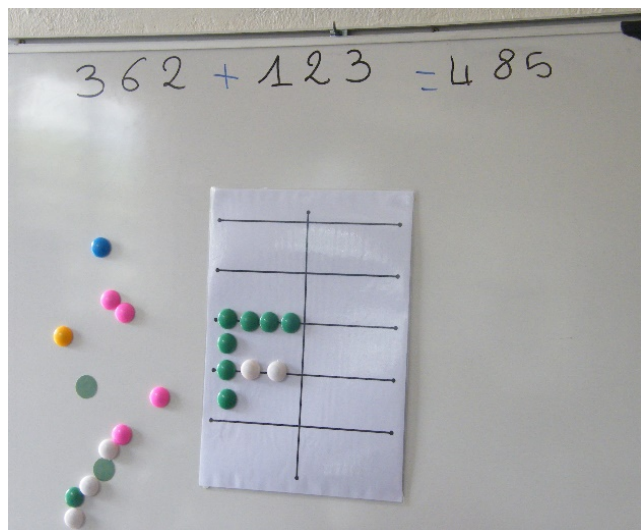


Figure 17: Abaque utilisé en collectif en période 3.

l'apprentissage. Peut-être s'agit-il ici d'un premier pas vers l'abstraction ?

5.3 Les séquences

Les activités décrites dans ce chapitre ont été réellement menées dans nos classes. Elles ont été conçues dans un contexte particulier et pour répondre aux besoins de nos élèves. Ainsi, nous ne pouvons faire abstraction du rythme d'apprentissage de ces derniers et avons mis en place plusieurs séances supplémentaires de remédiation ou de réinvestissement qui n'apparaissent pas dans les tableaux de ce chapitre.

¹⁴ Explication d'une élève de CM1.

Les séquences ont été élaborées dans un souci de rendre les apprentissages très progressifs. Ainsi, les étapes ont été pensées de manière à permettre aux élèves d'appivoiser ce nouvel outil et de progresser de manière réflexive dans la maîtrise de son fonctionnement. Nous proposons donc une approche socio-constructiviste, permettant à chaque élève de construire ses apprentissages en se réajustant au fil de la manipulation¹⁵ et des interactions avec les autres élèves.

¹⁵ La règle suivante : pas plus de quatre jetons sur une ligne, pourra donc temporairement être bravée afin de comprendre certains principes fondamentaux tels que le passage au rang supérieur.

5.3.1 Numération : séquence 1

		Période 2			Séquence de Numération		Nombres de séances 6
<p>Compétence de fin de cycle : - Écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (jusqu'au centième) et quelques fractions simples BO N°3 du 19 juin 2008 Hors-série : - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard</p>							
Objectif de la séquence : Donner du sens à la numération décimale de position							
Séance	Phase	Objectifs de séance	Activité	Matériel	Organisation	Durée (min)	
1	Découverte	Découvrir l'histoire du calcul.	Lecture de texte et observation d'images. Reproduire des situations de dénombrement à la manière de...	Diaporama histoire du calcul, pois du Cap.	Groupe classe	30	
2	Structuration	Comprendre la nécessité des groupements pour dénombrer.	Le Fourmillion	Pois du Cap, petites et grandes enveloppes	En demi-classe	45	
3a	Structuration	Comprendre le sens de notre numération : la numération décimale de position Connaître la valeur des chiffres en fonction de leur position	Représenter une collection à l'aide de pois du Cap (valeur positionnelle et tableau de numération) Représenter une collection en écriture chiffrée.	Tableau de numération et pois du Cap	Groupe classe	45	
3b	Structuration	Connaître la valeur des chiffres en fonction de leur position	Décomposition additive et multiplicative	Tableau de numération	Groupe classe	45	
4	Structuration	Comprendre le passage au rang supérieur	Réaliser un compteur numérique Utiliser un compteur numérique pour dénombrer une collection	Compteur à imprimer/ élève, attaches parisiennes, collection	Groupe classe	45	
5	Réinvestissement	Résoudre un problème en utilisant du matériel à calculer	Résolution de problèmes	Compteur, pois du Cap, petites et grandes enveloppes, tableau de numération	Groupe classe	45	

Tableau 5.2 : Séquence de remédiation sur les grands principes de la numération décimale de position.

Avant d'aborder la découverte de l'abaque à lignes, nous avons souhaité mettre en place une séquence de numération, visant à redonner du sens aux chiffres en fonction de leur position dans le nombre. Pour atteindre cet objectif, nous avons choisi une entrée par l'histoire des mathématiques et avons présenté aux élèves un bref diaporama reprenant les grandes étapes de l'évolution du calcul. À travers cette introduction, les élèves ont découvert des instruments méconnus, mais ont également expérimenté des techniques de dénombrement anciennes : des cailloux pour calculer¹⁶. Partir de l'histoire des mathématiques nous permet donc naturellement de se questionner sur les problèmes posés et les possibilités offertes pour dénombrer une très grande quantité. Nous avons donc pu introduire, à la suite de cette découverte, des activités du type Fourmillion (Valentin *et al.*, 2005) : combien de pois du Cap avons-nous en tout ? Comment organiser cette grande collection pour rendre le résultat lisible rapidement sans avoir à tout recompter ?

Un travail très progressif fut alors mené avec les élèves qui devaient rechercher des solutions efficaces pour résoudre ce problème, avec le matériel mis à disposition (petites et grandes enveloppes, sacs de congélation et boîte). Nous sommes donc partis de quantités organisées selon des critères arbitraires, pour arriver au groupement par 10 et puissances de 10. Ces premières activités de codification des quantités ont permis aux élèves de comprendre la nécessité de l'écriture chiffrée. Ce travail a été mené en plusieurs étapes, passant du concret à l'abstrait : manipulation des unités réelles (pois du Cap) au départ, puis organisation des groupements, et enfin codification de chaque groupement par des chiffres dans le tableau de numération.

Ce qui est intéressant de noter ici, c'est que cette activité a permis à tous les élèves de comprendre le sens de l'écriture chiffrée et de progresser quel que soit leur niveau de départ. Même les élèves ayant un bon niveau en mathématiques en début d'année profitent de cette expérience.

La fabrication des compteurs numériques a participé à la motivation des élèves face aux activités de calcul. Ce matériel a été réutilisé lors de différentes activités et selon les besoins (résolution de problèmes, calcul, outil de remédiation, etc.) pour permettre la compréhension du changement d'ordre.

¹⁶ Une mise en scène a été mise en place en classe pour reproduire une situation de dénombrement d'autrefois: un caillou représente un guerrier, un tas de cailloux est composé avant le combat, chaque guerrier reprend un caillou en rentrant du front. Le nombre de cailloux restants représente la quantité d'homme perdus au combat.

Toutes ces activités ont été des supports à la réactivation des principes de la numération décimale de position.

5.3.2 Calcul instrumenté : séquence 1

		Période 2 Séquence de Mathématiques Calcul instrumenté			Nombres de séances 6	
<p>Compétence de fin de cycle :</p> <p>- Écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (jusqu'au centième) et quelques fractions simples</p> <p>BO N°3 du 19 juin 2008 Hors-série :</p> <p>- Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard</p> <p>Objectif de la séquence : Donner du sens à notre numération en représentant et en comparant des nombres entiers à l'aide d'un abaque historique (étendre progressivement le registre numérique).</p>						
Séance	Phase	Objectifs de séance	Activité	Matériel	Organisation	Durée (min)
1	Découverte	Découvrir le matériel de calcul et son fonctionnement.	Représenter des nombres avec un ou deux jetons. Comparer ces nombres.	Le <i>Kit Calculus</i> , un puis deux jetons.	Groupe classe	30
2	Structuration	Représenter des nombres avec 3 unaires.	Représenter des nombres avec trois jetons. Comparer ces nombres.	Le <i>Kit Calculus</i> , trois jetons.	Groupe classe	30
3	Structuration	Représenter des nombres avec quatre unaires.	Représenter des nombres avec quatre jetons. Comparer ces nombres.	Le <i>Kit Calculus</i> , quatre jetons.	Groupe classe	30
4	Structuration	Représenter des nombres à l'aide du matériel, avec 5 unaires et un quinaire.	Représenter des nombres en utilisant le quinaire. Comparer ces nombres.	Le <i>Kit Calculus</i> , les jetons.	Groupe classe	30
5	Réinvestissement	Lire, écrire et représenter des nombres dans un registre numérique de 0 à 999 999 999.	Jeu Cart'Abaque.	Jeu, ardoises, <i>Kit Calculus</i> , tableau de numération (différenciation), règles du jeu, feuille de score.	Groupe classe	30
6	Évaluation	Lire, écrire, nommer, représenter des nombres dans un registre de 0 à 99 999. Passage de la représentation-abaque à l'écriture chiffrée, et vice-versa.		Le <i>Kit Calculus</i> (individuel et collectif), les jetons, fiche d'évaluation ¹⁷ .	Groupe classe	45

Tableau 5.3: Séquence d'introduction de l'abaque en classe.

¹⁷ Voir proposition de fiche d'évaluation en annexe B.

La première séquence d'utilisation de l'abaque, que nous avons, rappelons-le, appelée « séquence de calcul instrumenté » avait pour objectif la découverte du matériel et de son fonctionnement. Bien qu'un mode d'emploi figure au dos du *Kit Calculus*, nous avons privilégié la réflexion afin de faire émerger les règles d'utilisation par les élèves. Toutes les séances¹⁸ de cette première séquence laissent place à une phase de recherche lors de laquelle les élèves doivent proposer une représentation d'un nombre donné ou rechercher les nombres pouvant être représentés à l'aide d'un nombre restreint de jetons. La phase de mise en commun permet ensuite de valider ou d'invalidier les propositions.

L'objectif poursuivi est de savoir lire et représenter des nombres sur l'abaque. Des activités de recherche de tous les nombres pouvant s'écrire avec un nombre de jetons imposé ont été proposées aux élèves, en faisant varier les modalités entre lecture et écriture des nombres. Nous avons progressivement augmenté le nombre de jetons mis à disposition des élèves, recherchant d'abord les possibilités qu'offrait un seul jeton, puis deux, puis trois, puis quatre, puis cinq, puis nous avons introduit l'utilisation de la quinaire. Le registre numérique a également subi une augmentation progressive.

Cette progressivité permet de faire beaucoup manipuler les élèves afin qu'ils s'approprient le matériel avant de passer au calcul à proprement parler.

Le jeu : Cart'Abaque¹⁹

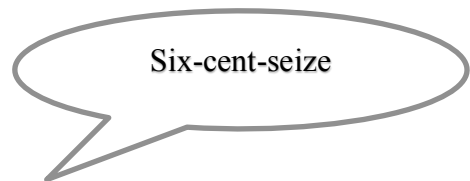
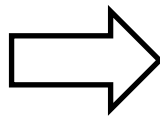
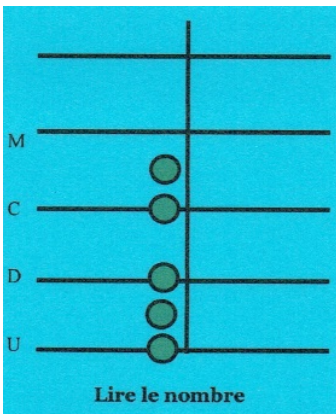
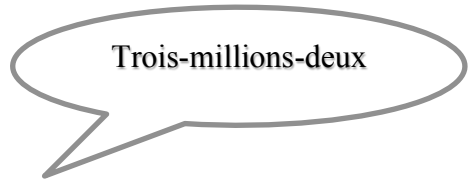
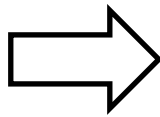
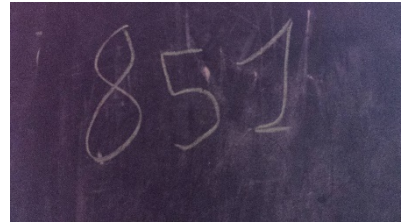
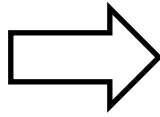
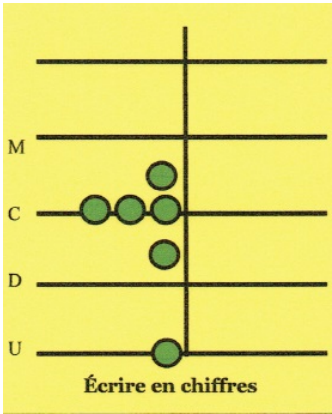
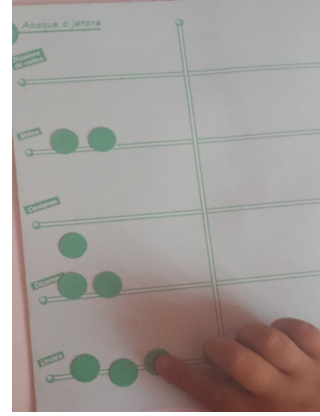
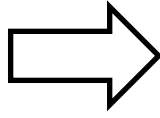
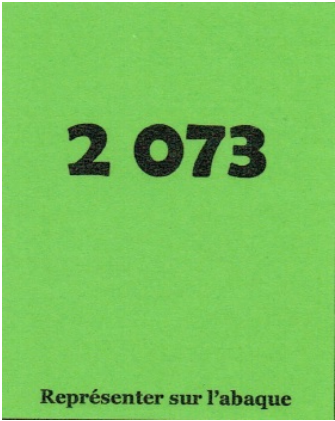
À la fin de la seconde période, nous avons constaté une baisse de motivation de la part des élèves due au caractère répétitif des activités. Pour rendre ludique le travail autour de la lecture et l'écriture des nombres, nous avons conçu un jeu de cartes²⁰ permettant de remobiliser tous les apprentissages réalisés au cours de la séquence sur l'abaque ainsi qu'en numération.

Ce jeu multi-joueurs permet de combiner la lecture et l'écriture des nombres. Il consiste à passer de l'écriture chiffrée à la représentation sur l'abaque et vice versa, en mettant en œuvre diverses procédures :

¹⁸ Quelques propositions de séance sont présentées en annexe C.

¹⁹ Appellation proposée par les élèves de CE2/CM1 de l'école Martin Luther King, Ravine-Blanche.

²⁰ Les cartes imprimables sur papier couleur ainsi que les règles du jeu sont présentées en annexe D.



5.3.3 Calcul instrumenté : séquence 2

		Période 3 Séquence de Mathématiques Calcul instrumenté			Nombres de séances 7	
<p>Compétence de fin de cycle :</p> <p>- Écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (jusqu'au centième) et quelques fractions simples</p> <p>BO N°3 du 19 juin 2008 Hors-série :</p> <p>CE 2 : - Organiser ses calculs pour trouver un résultat par calcul mental, posé, ou à l'aide de la calculatrice.</p> <p>- Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations.</p> <p>CM 1 : - Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes.</p>						
<p>Objectifs généraux :</p> <p><u>Savoirs</u> : Connaître les compléments à 10 et à 5. Connaître les relations entre les nombres.</p> <p><u>Savoir-faire</u> : Représenter deux nombres, les additionner en faisant des groupements-échanges.</p> <p><u>Savoir être</u> : Être attentif, s'engager dans l'activité, faire preuve d'esprit critique envers son travail.</p>						
Séance	Phase	Objectifs de séance	Activité	Matériel	Organisation	Durée (min)
1	Découverte	Additionner deux nombres entiers sans groupement échange. Élaborer une méthode de calcul.	Dictée et lecture de nombre. Représenter deux nombres, les additionner avec l'abaque à jetons.	Cartes de lecture rapide, <i>Kit Calculus</i> .	Groupe classe	30
2	Structuration	Additionner deux nombres entiers avec groupements-échanges : échanger des unaires pour faire des quinaires (<i>réductions</i> ²¹).	Représenter deux nombres, les additionner en faisant des groupements-échange.	Cartes de lecture rapide, <i>Kit Calculus</i> .	Groupe classe	30
3	Structuration	Additionner deux nombres entiers avec groupements-échanges : échanger deux quinaires en unaires de l'ordre supérieur (<i>réductions</i>).	Représenter deux nombres, les additionner en faisant des groupements-échanges.	Cartes de lecture rapide, <i>Kit Calculus</i> .	Groupe classe	30
4a	Consolidation	Additionner deux nombres entiers dans un registre numérique inférieur à 1000.	Représenter deux nombres, les additionner en faisant des groupements-échanges. Défi « Table de calcul » (rapidité).	Cartes de lecture rapide, <i>Kit Calculus</i> , table de calcul.	Groupe classe	30
4b	Consolidation	Additionner deux nombres entiers dans un registre numérique inférieur à 10 000.	Représenter deux nombres, les additionner en faisant des groupements-échanges. Résolution de problèmes.	Cartes de lecture rapide, <i>Kit Calculus</i> , problèmes écrits	Groupe classe	30

Tableau 5.4: De l'addition vers la soustraction (1).

²¹ Terme emprunté à Alain Schärli, *Compter du bout des doigts*.

Le calcul, à proprement dire, commence réellement dans cette séquence. L'addition avec l'abaque est introduite par une situation-problème menant à l'établissement d'une procédure experte directement issue des tâtonnements des élèves. Il appartenait ici à ces derniers d'expérimenter et de trouver des solutions à partir de leurs acquis, solutions qui ont été débattues, réfutées ou validées en groupe classe.

Cette recherche fut menée sous le contrôle didactique des enseignantes, qui ont pris le parti de n'introduire la notion de groupement-échange qu'après avoir abordé des additions simples, c'est-à-dire sans retenue et sans utiliser le quinaire. Nous avons ensuite complexifié la tâche et annoncé que l'on attendait un résultat juste, mais représenté avec le moins de jetons possible. Ainsi nous imposons aux élèves de réfléchir aux groupements-échanges réalisables à cette étape.

Pour élargir notre champs d'action, rompre avec une relative monotonie, et contextualiser l'usage de l'abaque, nous avons également proposé aux élèves des activités de réinvestissement reposant principalement sur des résolutions de problèmes et des défis chronométrés (table de calcul²²).

Nous pouvons synthétiser notre démarche comme suit :

Activité	Réponses attendues des élèves
Addition sans groupement-échange	Faire passer les jetons de droite à gauche, et lire le nouveau nombre
Addition avec groupement-échange sans changement d'ordre	Procédure précédente et échange de 5 unaires pour faire un quinaire
Addition avec groupement-échange avec changement d'ordre	Procédure précédente et échange de 2 quinaires pour faire une unaire de l'ordre supérieur
Addition avec groupement-échange	Toutes les procédures précédentes, avec un registre numérique supérieur à 1 000, faire émerger la façon de vérifier son résultat
Résolution de problèmes et défi « table de calcul »	Calculer rapidement en appliquant les procédures précédentes

²² Voir annexe E.

5.3.4 Calcul instrumenté : séquence 3

Le tableau ci-dessous représente la suite prévue de la séquence 2. Néanmoins, compte tenu des difficultés rencontrées, cette partie a été reportée pour privilégier l'entraînement et la compréhension du principe de passage à l'ordre supérieur. Nous reviendrons sur ces difficultés dans un autre chapitre.

Nous avons réalisé à ce jour uniquement la séance de découverte de la soustraction. Celle-ci constitue pour nous l'une des évaluations de la compréhension des principes de la numération décimale de position. En effet, si les élèves ont bien compris et assimilé le principe de groupement et de passage à l'ordre supérieur, ils seront en mesure, une fois confrontés à la soustraction, d'effectuer la réciproque et de faire des dégroupements-échanges (ce que Schärliig nomme les *amplifications*).

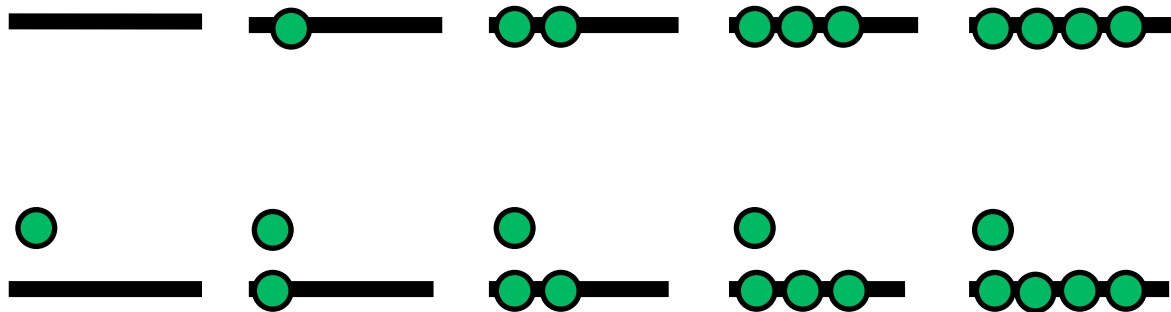
Séance	Phase	Objectifs de séance	Activité	Matériel	Organisation	Durée (min)
5	Découverte	Soustraire un nombre entier à un autre en faisant des groupements-échanges : échanger des unaires en deux quinaires de l'ordre inférieur et des quinaires en 5 unaires.	Représenter deux nombres, faire une soustraction (recherche et expérimentation de méthodes → émergence d'une procédure experte)	<i>Kit Calculus.</i>	Groupe classe	30
6	Structuration	Soustraire un nombre entier à un autre en faisant des groupements-échanges : échanger des unaires de l'ordre supérieur en deux quinaires et des quinaires en 5 unaires.	Représenter deux nombres, faire une soustraction en faisant des dégroupements-échange.	<i>Kit Calculus, problèmes simples</i>	Groupe classe	30
7	Réinvestissement et évaluation	Additionner ou soustraire des nombres entiers en faisant des groupements et dégroupements-échanges.	Représenter les nombres et effectuer l'opération adéquate, en fonction du contexte.	Abaque à jetons Problèmes simples	Groupe classe	30/45

Tableau 5.5 : De l'addition à la soustraction (2).

5.4 Les activités ritualisées

En sus des activités prévues dans le déroulement de chaque séance de calcul instrumenté, des activités ritualisées ont été mises en place. Ces activités sont courtes et reconduites à l'identique ou presque, mais la progressivité des apprentissages n'en est pas exclue. Il s'agit bien de faire progresser nos élèves dans l'acquisition de certaines compétences mais aussi de systématiser certaines procédures.

Au fil des séances, nous avons privilégié la reconnaissance rapide des représentations types pouvant intervenir dans la lecture des nombres sur l'abaque. Ces représentations sont au nombre de 10 et présentées ci-dessous :



Les cartes sont montrées très rapidement aux élèves, qui doivent traduire ce qu'ils perçoivent sur une ardoise en écriture chiffrée.

L'intérêt de ces cartes de lecture rapide réside dans la reconnaissance des représentations, mais également dans la perception des relations entre les nombres. Ainsi, 8 est perçu comme 5 (un quinaire) et 3 (3 unaires).

L'organisation spatiale devient donc une aide à la mémorisation, créant ainsi de solides et pertinentes représentations mentales. Cette activité s'appuie également sur la capacité qu'ont tous les êtres humains à subitiser²³. Cela est rendu possible par le fait qu'il n'y a jamais plus de quatre objets sur une ligne horizontale.

²³ « Il s'agit de la perception d'une quantité sans avoir recours au comptage. Selon Mandler et Shebo (1982), le subitizing fonctionne jusqu'à 4 : on a les mêmes temps de dénombrement pour 1, 2, 3 et 4, alors que ce temps augmente linéairement à partir de 4. » (Desbrosses, 2007).

5.5 Les difficultés rencontrées

Les difficultés rencontrées lors de la mise en œuvre des activités sont d'ordres divers. Nous allons ici essayer d'évoquer chaque difficulté en fonction des compétences visées, de les analyser brièvement et d'exposer quelques pistes de remédiation possibles.

- Lire, écrire, nommer :

Les activités de lecture, écriture et dénomination des nombres ont causé plusieurs types de difficultés. En effet, en dehors des difficultés courantes liées aux particularités de l'oralisation des nombres dans notre langue (irrégularités de la suite orale) (Tiennent, 2013a), nous avons constaté chez nos élèves et de manière générale des difficultés à passer d'une représentation à l'autre (de l'écriture abaque à l'écriture chiffrée et vice versa). N'omettons pas de rappeler ici cependant, que dans le contexte où nous avons exercé nos fonctions cette année, le passage de l'écriture chiffrée à l'écriture en lettre et l'inverse fait elle-même objet d'obstacle important pour les élèves.

Rarement, certains élèves ayant déjà des difficultés à écrire les nombres au début de l'année, continuent à rencontrer ces difficultés malgré l'utilisation de l'abaque et la lente progressivité des apprentissages.

Par exemple, lors de l'évaluation diagnostique, Samuel²⁴ doit écrire en chiffres le nombre « cinq-cent-soixante-dix-neuf ». Il écrit alors : 5079. En cours d'expérimentation, ce même élève doit transcrire « deux-cent-soixante-trois » présenté sur l'abaque en écriture chiffrée. Il écrit alors 2063. La confrontation à cette erreur récurrente nous rappelle que le travail réalisé n'est en rien une solution universelle, ni ne garantit le progrès de tous. Néanmoins, la persistance des difficultés rencontrées par cet élève peut être attribuable à son absentéisme. Malgré cela, nous constatons tout de même un léger progrès lorsque l'on compare ses évaluations de début et de fin d'année.

- Calculer :

L'une des premières difficultés observées dans chacune des classes, fut celle de la manipulation. Nous ne parlerons pas ici des difficultés de motricité engendrées par l'outil utilisé (jetons trop fins), mais bien des difficultés de manipulation lors des groupements-échanges. En effet, nous avons souvent constaté qu'un résultat erroné provenait d'un oubli de

²⁴ Prénom fictif.

retrait de jetons lors des manipulations d'échange. Prenons l'exemple de l'échange de 5 unaires pour 1 quinaire. Les élèves qui produisent des résultats erronés procèdent ainsi : ils comptent 5 unaires et savent qu'il faudra les échanger contre une quinaire, ils prennent alors l'un des unaires déjà placés sur l'abaque et le déplacent en position de quinaire mais oublient ensuite d'enlever les quatre unaires restant sur le plateau. Ils les comptabilisent donc dans le résultat obtenu. Cette difficulté n'est pas uniquement imputable au compte des élèves puisqu'elle relève probablement d'un apprentissage par mimétisme. Les jeunes enseignantes que nous sommes ont manipulé de cette façon les jetons au tableau, sans toutefois commettre cette erreur, ne mesurant pas l'impact de ce simple geste exécuté de manière inconsciente. Nous ne reviendrons pas ici sur les théories du mimétisme dans les apprentissages, mais souhaitons simplement relever la nécessité d'adopter des gestes justes pour ne pas créer d'obstacles.

Pour remédier à cela, le groupement-échange peut être scindé en deux actions : d'abord retirer les 5 unaires, puis seulement ensuite reprendre un jeton pour le placer à la position de quinaire. Les actions de grouper puis d'échanger ainsi introduites minimisent les risques de confusion et étayent la compréhension du principe de position : 5 jetons qui valent 1 sont remplacés par 1 jeton qui vaut 5.

Le type de groupement-échange présenté ci-dessus n'a généralement pas posé de problème de compréhension aux élèves, suite à cette remédiation. Le groupement-échange qui a généré le plus d'obstacle est celui de deux quinaires contre un unaire de l'ordre supérieur. En effet, l'élève ne se trouve plus ici uniquement face un problème de commodité dans la représentation (représenter avec le moins de jetons possible), mais il entre réellement dans les principes de la numération. Le problème qui se pose ici vient du fait qu'il n'y a pas groupement d'unités seulement, mais groupement de quinaires *et* changement d'ordre. Les deux quinaires dans l'espace des unités valent 1 unaire sur la ligne des dizaines, donc 10 unités équivalent à 1 dizaine. L'incompréhension de cette équivalence peut être due à une confusion entre valeur et quantité et une bonne compréhension de la numération décimale de position est nécessaire pour dépasser cet obstacle.

La remédiation proposée consistait à itérer l'expérience de groupement-échange avec changement d'ordre pour familiariser les élèves à ce type d'échange et ainsi les aider à surmonter cette difficulté. Bien que la répétition produise son effet en renforçant les images

mentales, cet obstacle n'est pas surmontable en si peu de temps, car cela relève des difficultés intrinsèques au principe de numération.

Malgré ces quelques difficultés, nous remarquons que le travail effectué cette année a permis aux élèves de progresser dans les compétences du lire, écrire et nommer les nombres jusqu'aux milliards (aux millions pour les CE2²⁵). Le niveau de départ des élèves étant très hétérogène, il semblerait que l'expérience ait été profitable à tous. Certains ont développé la capacité de créer des images mentales tellement fortes qu'ils n'ont plus besoin de manipuler pour calculer, utilisant l'abaque en fin d'année par simple contrat didactique.

Voici quelques exemples de progrès réalisés en numération par deux de nos élèves que nous appellerons élèves A et B.

Élève A :

<p>Ecris en chiffres les nombres suivants :</p> <p>Douze mille cent quarante huit → 12 048</p> <p>Trois cent quatre vingt quatorze → 300 494</p> <p>Huit mille cinquante deux → 8000 520</p> <p>Cinq cent soixante dix neuf → 500 799 79</p>	<p>Souligne le chiffre des unités. 100 - 427 - 3 - 7804</p> <p>Souligne le chiffre des centaines. 421 - 7507 - 843 048 - 14 000</p> <p>Souligne le chiffre des milliers. 74 000 - 651 028 - 3 654</p>
---	---

Figure 18: Évaluation diagnostique, août 2015.

c d u	m c d u	m c d u
6 4 5	2 5 7 7	8 7 6 0
-	-	7 8 6 0
m c d u		
9 9 8 8		
-		

Figure 19: Dictée de nombres : les « chiffres des » sont dictés dans le désordre, l'élève doit recomposer le nombre, février 2015.

²⁵ Ce registre correspond aux prescriptions des instructions officielles, mais en réalité les CE2 ont aussi travaillé sur les nombres jusqu'aux milliards.

3.500 000 150 ✓
 4.1450 000 250 ✓
 5.60000 000 ✓

Figure 20: Dictée de nombres, mai 2015.

Élève B :

Ecris en chiffres les nombres suivants :

Douze mille cent quarante huit → 12.148.....

Trois cent quatre vingt quatorze → 384.....

Huit mille cinquante deux → 8.52.....

Cinq cent soixante dix neuf → 579.....

Figure 21: Évaluation diagnostique, août 2014.

3. Ecris en chiffres les nombres suivants :

Douze-mille-cent-quarante-huit : 12.148.....

Cinquante-mille-trois-cent-quatre-vingts : 50.380.....

Quatre-vingt-huit-mille-cinquante-deux : 88.052.....

Trente-neuf-mille-quatorze : 39.014.....

Figure22: Évaluation bilan, mai 2015.

5.6 Prolongements

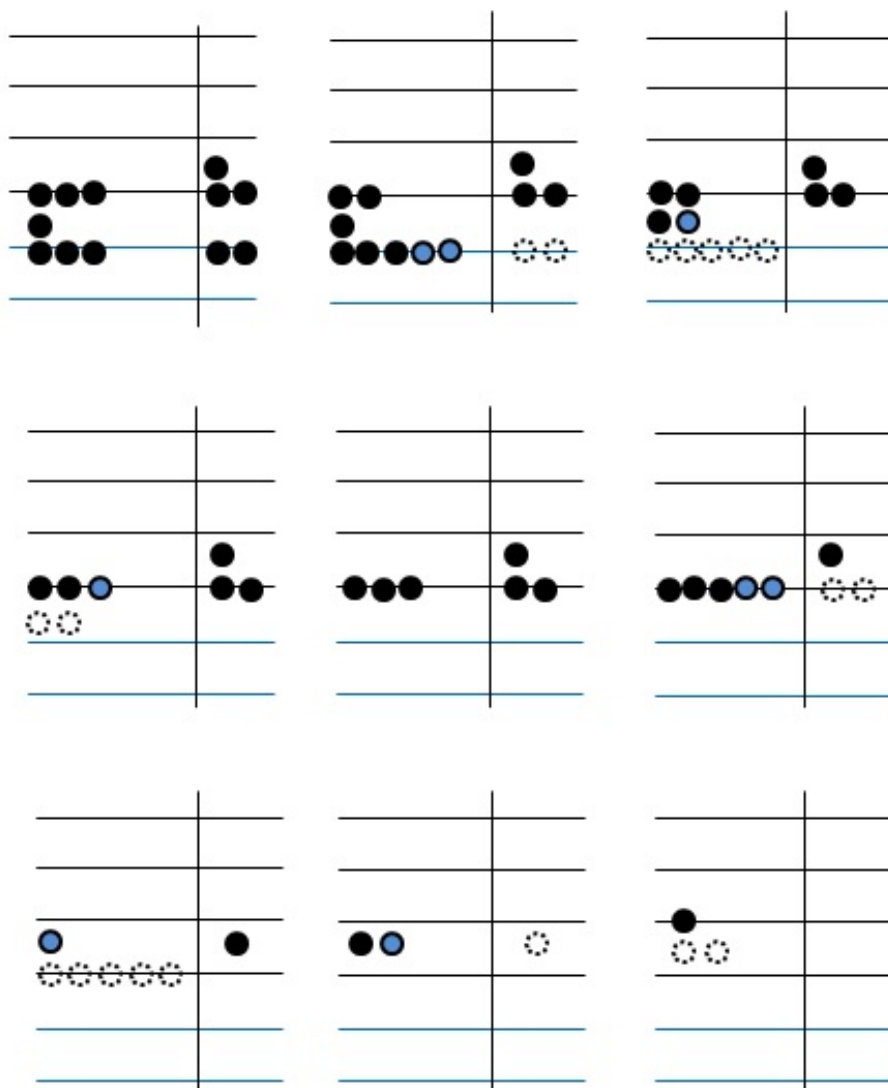
Le travail mené en classe et présenté tout au long de ce chapitre a été prolongé par une séquence sur la soustraction. La première séance de cette séquence a été très importante pour mesurer les progrès de compréhension de notre système de numération. En effet, nous avons proposé aux élèves un petit défi consistant à réaliser une soustraction avec l'abaque alors même que cette procédure n'avait pas fait l'objet d'un apprentissage auparavant.

Ce défi permet à l'élève de réaliser le calcul de manière réfléchie, c'est donc un exercice ouvert aux procédures personnelles mais permettant de savoir si les élèves sont capables de réinvestir les principes acquis dans une situation-problème. Nos attentes en ce sens, correspondent à une capacité à faire des dégroupements-échanges pour pouvoir soustraire un nombre de jetons donné. Il est nécessaire pour réaliser ce dégroupement-échange de voir les jetons (et par extension les chiffres dans un nombre) comme le codage d'une quantité régie par des équivalences. Ainsi dans l'opération $30 - 5$, 30 équivaut à 3 dizaines et équivaut aussi à 30 unités auxquelles nous pouvons soustraire 5 unités. Mais 30 équivaut également à 2 dizaines et 10 unités auxquelles nous pouvons soustraire 5 unités. Le résultat : 25, est lui égal à 2 dizaines et 5 unités ou encore 5 quinaires, ou encore 25 unaires/unités. L'abaque permet ainsi de visualiser ces différentes décompositions du même résultat, avant d'aboutir à une représentation conventionnelle qui serait : 2 unaires à l'ordre des dizaines et un quinaire à l'ordre des unités sur l'abaque, et donc 2 dizaines et 5 unités soit 25 en écriture chiffrée. La réussite de cet exercice réside donc dans le fait que les élèves soient capables d'utiliser ces équivalences afin de résoudre la soustraction proposée.

Au-delà de ce travail engagé sur la soustraction, l'utilisation de l'abaque à lignes pourrait se révéler être un outil intéressant pour aider les élèves à voir qu'un nombre décimal n'est pas un couple d'entiers, ce qui est de surcroît une difficulté très courante lors de cet apprentissage.

Voici une démonstration d'un calcul faisant intervenir des nombres décimaux « $2,8 + 7,2$ » réalisé avec un tel matériel:

- Lignes de la partie entière
- Lignes de la partie fractionnaire
- Jetons placés sur l'abaque
- ⊙ Ancienne position de jetons venant d'être déplacés
- Nouvelle position de jetons venant d'être déplacés



Au cours de cette expérience nous avons constaté que l'utilisation de cet outil permet de remédier à certaines difficultés des élèves en numération, mais qu'il permet aussi de construire le nombre en s'appuyant sur le sens (il faut néanmoins considérer l'obstacle supplémentaire que constitue le quinaire si l'on souhaite mettre en place ce type d'activité en cycle 2). Il apparaît donc que l'utilisation de ce matériel peut être bénéfique quel que soit le niveau de classe à partir de l'entrée dans la numération, mais il semble également, au vu du temps consacré à la compréhension de son fonctionnement, que cette démarche n'est

envisageable sur le terrain uniquement si cet outil a été utilisé dès cette période et que les élèves en connaissent bien le fonctionnement.

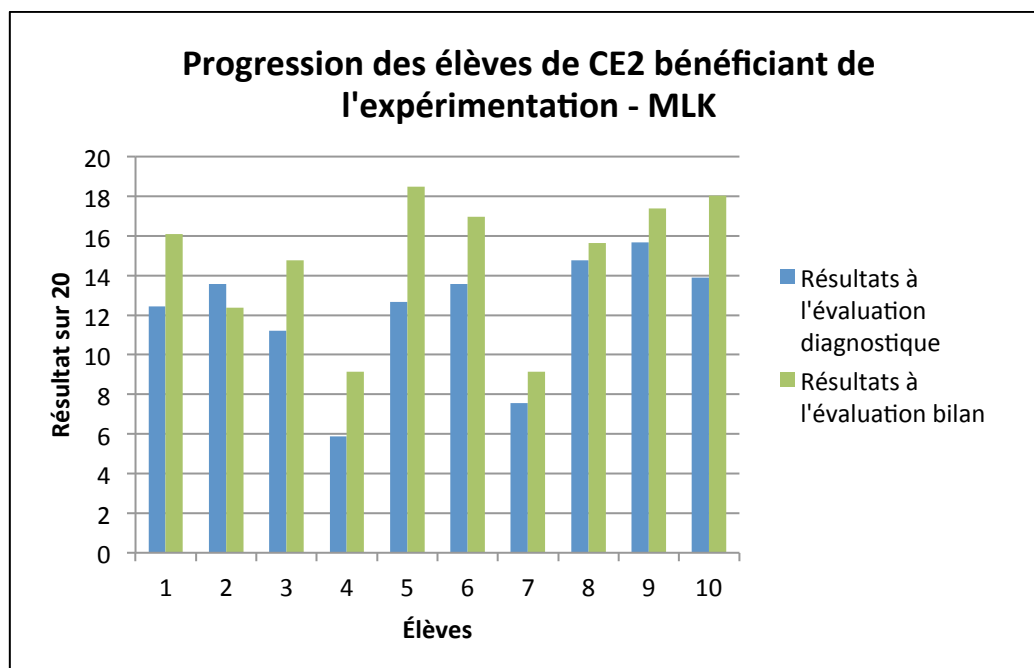
L'efficacité de cet outil en remédiation pourrait être plus grande si l'élève le manipule d'ores et déjà avec aisance et rapidité. C'est pourquoi nous suggérons que l'abaque à lignes puisse devenir un outil de cycle voire un outil d'école, après une formation adaptée des enseignants ou en utilisant l'expérience d'un(e) enseignant(e) ayant mis en œuvre ce dispositif comme nous l'avons fait cette année.

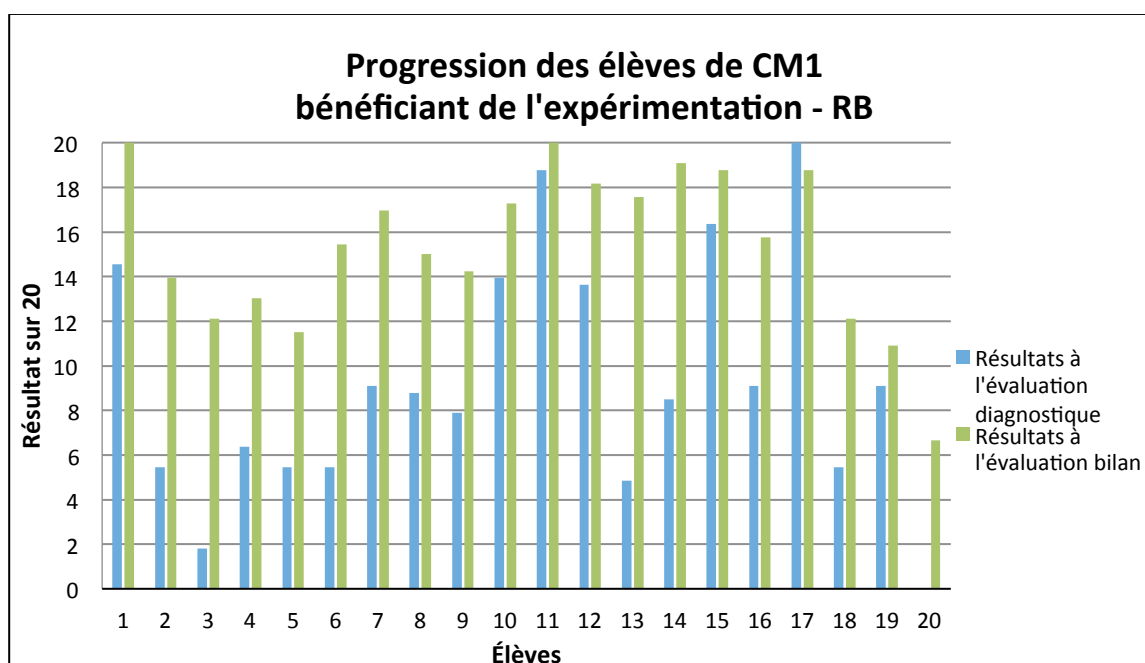
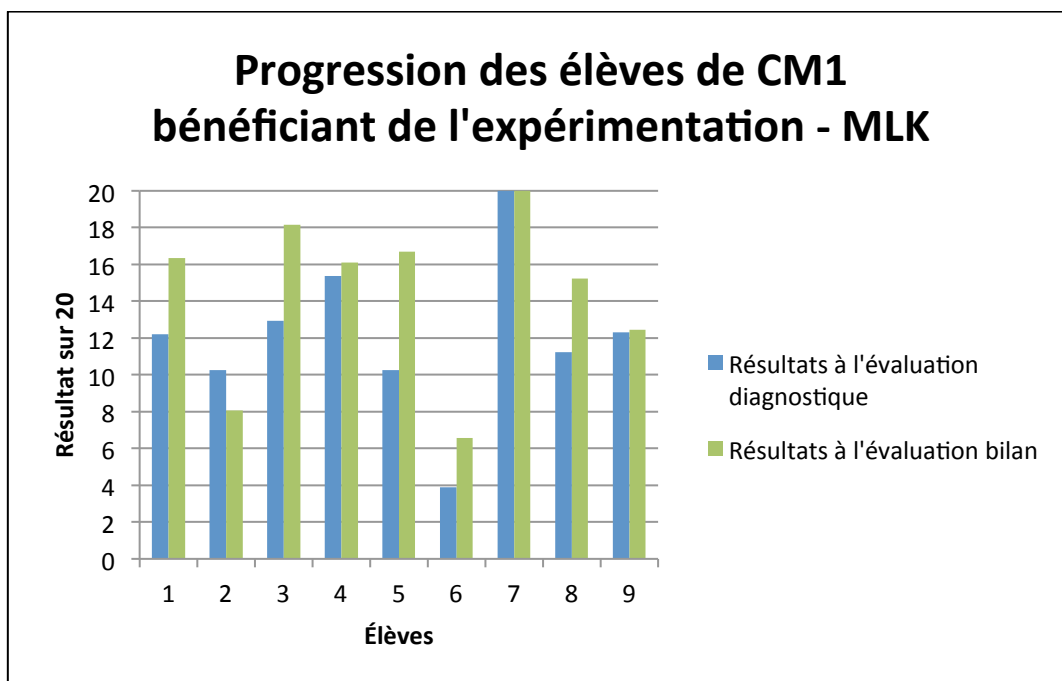
6 RÉSULTATS DE L'EXPÉRIMENTATION

Afin de vérifier l'efficacité de ce dispositif et des différentes activités mises en place pour remédier aux difficultés auxquelles se confrontaient nos élèves, nous nous basons principalement sur les résultats aux évaluations. Nous les utilisons pour faire deux comparaisons : la première est intra-classe, c'est-à-dire que chaque élève est comparé à lui-même afin de voir son progrès, et la seconde est inter-classe, c'est la progression moyenne de nos classes qui sera mise en comparaison avec le progrès réalisé dans une classe n'ayant pas bénéficié de ce système de remédiation.

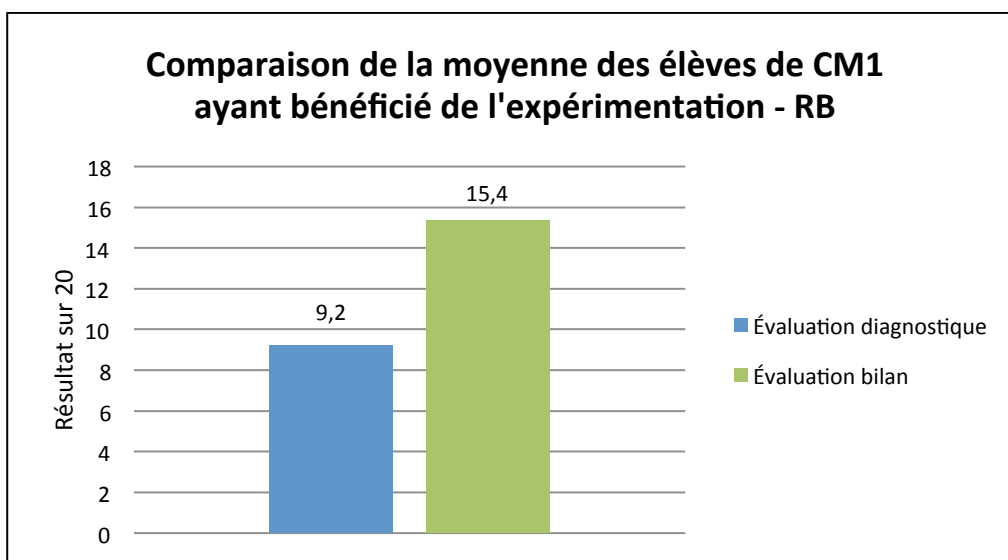
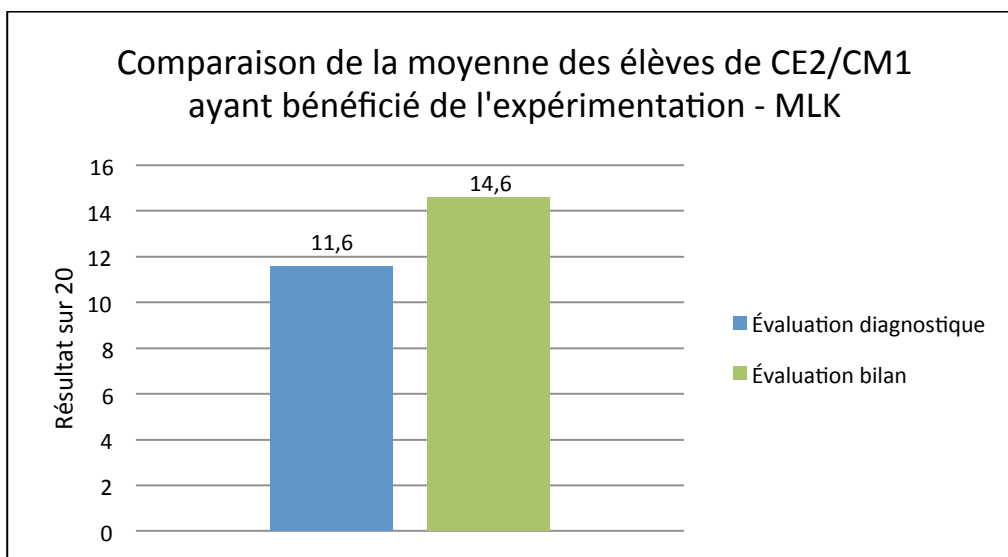
6.1 Comparaison des évaluations intra-classe

Tout d'abord, il est évident que l'un des indicateurs d'efficacité de l'utilisation de l'abaque est le progrès réalisé par nos élèves depuis le début de l'année scolaire. Pour mesurer ce progrès, nous avons à nouveau fait passer à nos élèves l'évaluation qui nous avait permis de diagnostiquer les difficultés en numération. La comparaison entre les résultats obtenus à l'évaluation au début de l'année et à l'évaluation de fin d'année, que l'on nommera « évaluation bilan », nous informe donc sur le progrès réalisé. Les graphiques suivants présentent les données respectives des classes ayant bénéficié de l'expérimentation et ayant alors travaillé avec le *Kit Calculus*.





Ces graphiques nous permettent de voir que la quasi-totalité des élèves ont progressé dans la maîtrise des compétences en numération au cours de l'année. On notera que trois élèves ont cependant régressé, mais cela peut être attribuable à d'autres facteurs. Cette progression est également visible en comparant les moyennes des résultats de tous les élèves à l'évaluation diagnostique et à l'évaluation bilan.



Ces résultats nous démontrent que les élèves de nos deux classes ont fait des progrès notables en numération au courant de l'année scolaire. En effet, la moyenne générale de la classe de CE2/CM1 s'est améliorée de 3 points sur 20. En revanche, la classe de CM1, qui témoignait de plus grandes difficultés au début de l'année, marque une amélioration plus grande ; la moyenne générale des élèves s'est améliorée de 6,2 points sur 20.

Au vu de ces graphiques, il nous est possible de dire que les activités de remédiation que nous avons mises en place sont efficaces pour faire progresser les élèves en numération. Plus précisément, on remarque que le progrès est généralisé à presque l'ensemble des élèves, même aux meilleurs élèves. Il est d'autant plus intéressant de remarquer que les élèves les plus en difficulté, soit ceux de la classe de CM1, sont aussi ceux qui ont manifesté les

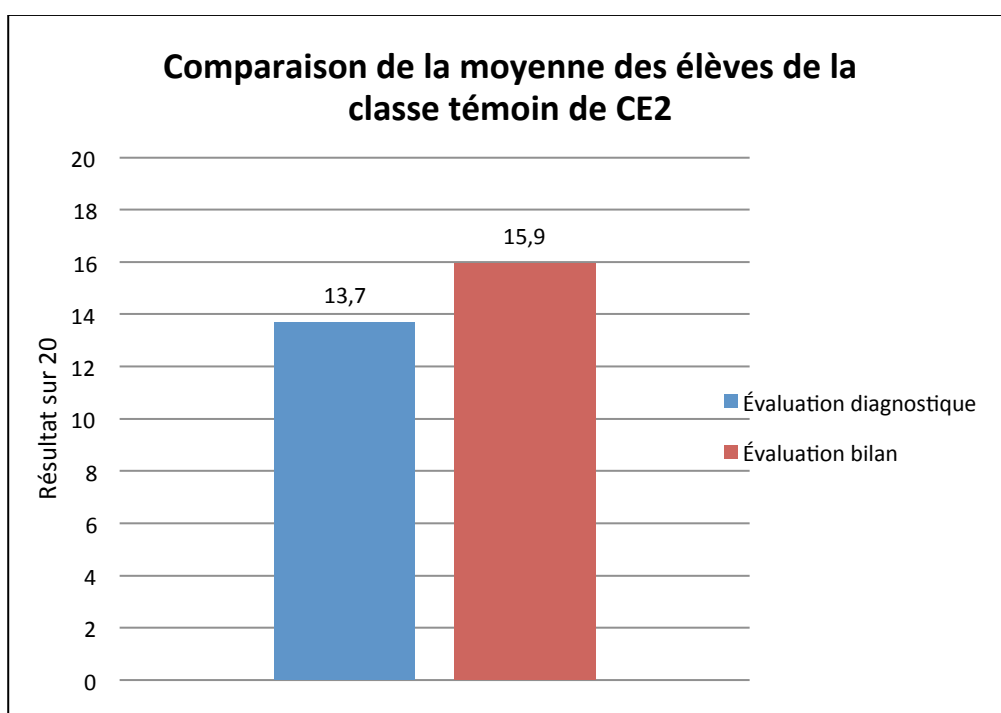
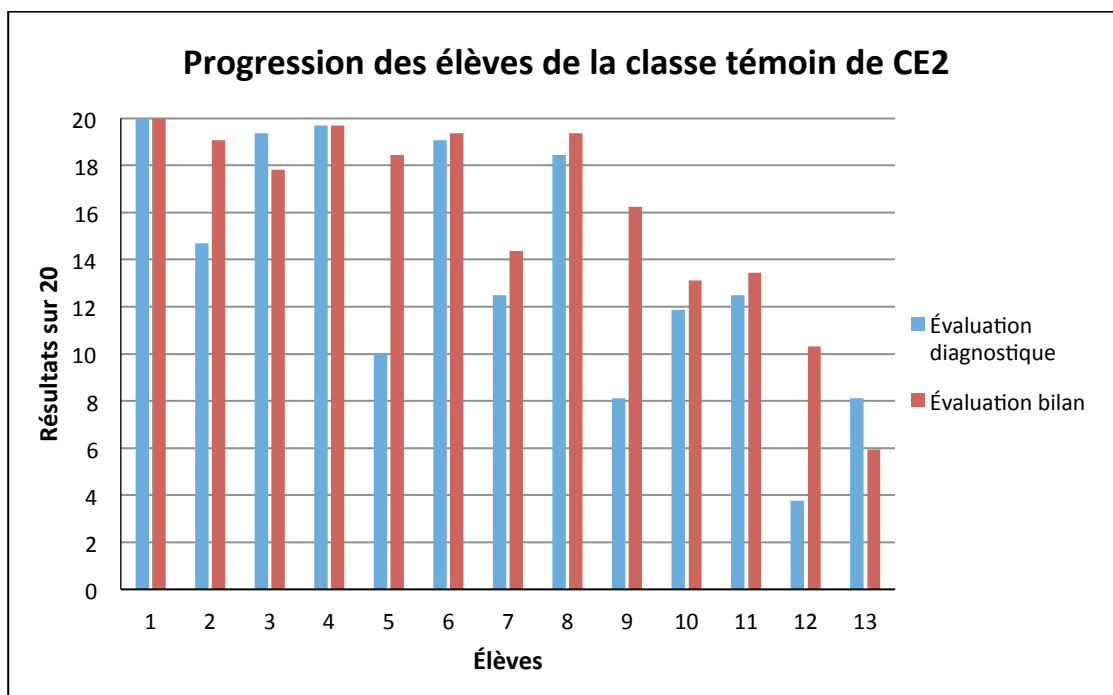
améliorations les plus significatives. Cela tend à justifier l'utilisation de l'abaque comme un outil de remédiation en numération.

En ce qui a trait aux trois élèves de l'échantillon qui ont eu un résultat inférieur à l'évaluation bilan par rapport à l'évaluation diagnostique, nous pouvons expliquer cette régression par d'autres facteurs. En effet, l'élève de la classe de CM1 dont le résultat a baissé était la première de la classe depuis le début de l'année. En cours d'année, un nouvel élève est arrivé dans la classe et l'a « détrônée ». Au quotidien, on remarque que l'élève en question manifeste moins de motivation vis-à-vis des activités, ce qui peut expliquer cette baisse. Pour la classe de CE2/CM1, la diminution des résultats de deux élèves trouvent des explications différentes. L'élève qui est en CE2 manifeste, depuis le milieu de l'année, un retard important par rapport aux autres élèves de son niveau. En effet, on suspecte des troubles d'apprentissage nécessitant probablement une prise en charge plus spécifique : difficultés à la mémorisation, problèmes de repérage dans l'espace, etc. En revanche, l'élève de CM1 a baissé les bras face aux apprentissages scolaires, elle semble avoir des centres d'intérêts qui se rapprochent plus de ceux d'une adolescente, ce qui nuit à sa concentration en classe.

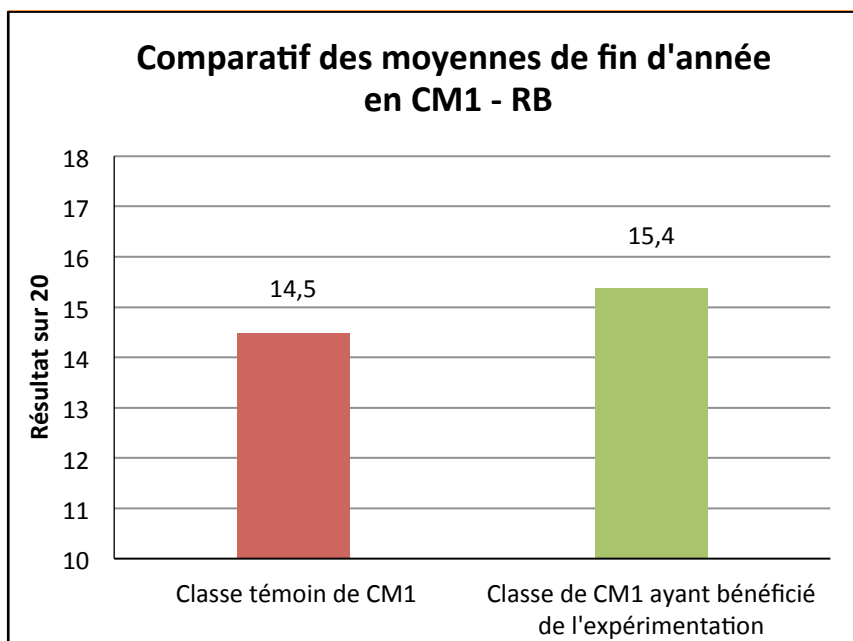
6.2 Comparaison des évaluations inter-classe

Ce progrès est déjà un indicateur de l'efficacité du dispositif testé, mais à lui seul il n'est pas très significatif. En effet, il est du devoir de tout enseignant de faire progresser ses élèves. L'amélioration remarquée entre les résultats de l'évaluation diagnostique et de l'évaluation bilan prend tout son sens en comparaison avec le progrès noté chez des élèves du même niveau, étant scolarisés dans le même contexte, mais n'ayant pas travaillé avec l'abaque.

Nous avons donc choisi de comparer nos résultats avec ceux de deux classes témoins (une de CE2 et une de CM1), de l'école élémentaire Raphaël Barquiseau. L'école élémentaire Martin Luther King n'ayant que peu d'effectifs, tous les élèves de CE2 et de CM1 ont bénéficié de l'expérimentation ; aucune comparaison n'est donc possible au sein de cet établissement. Afin que cette analyse soit possible, les enseignants de ces deux classes témoins ont accepté de faire repasser à leurs élèves leurs évaluations diagnostiques.



Cependant, l'enseignant de la classe témoin de CM1 n'a pas été en mesure de nous communiquer les résultats de l'évaluation diagnostique de ses élèves. Ainsi, pour les CM1 de l'école élémentaire Raphaël Barquisseau, ce sont les moyennes de fin d'année de chacune des classes qui seront mises en comparaison.



Ces comparatifs nous permettent d'éclairer les progrès de nos élèves en numération. En effet, la moyenne générale de la classe témoin de CE2 a progressé de 2,2 points sur 20 au cours de l'année, ce qui est inférieur à ce que nous avons pu noter dans nos classes. En regardant de plus près les résultats individuels de la classe témoin de CE2, nous remarquons que les élèves manifestant le plus de difficulté en début d'année ont fait un progrès considérable, mais on ne peut pas en dire autant des élèves ayant déjà des compétences certaines en numération. Or, nous pouvons observer dans les classes ayant bénéficié de l'expérimentation que le progrès est présent même chez ces derniers, hormis quelques exceptions. En ce sens, on peut donc dire que l'abaque est un excellent outil de remédiation, mais qu'il permet également de faire progresser les meilleurs élèves.

6.3 Un nouveau défi : la soustraction

La dernière façon d'évaluer le travail réalisé et ses bénéfices auprès des élèves était de soumettre ces derniers à une situation-problème. En effet, après avoir longuement travaillé sur la représentation des nombres et sur l'addition, demander aux élèves de réaliser une soustraction avec le matériel à calculer était pour nous une forme d'évaluation. Les élèves devaient, pour ce faire, comprendre le sens de la soustraction, ils devaient ensuite réinvestir leurs connaissances sur la représentation des nombres, puis mobiliser leurs savoirs sur l'addition et en faire en quelque sorte la réciproque, c'est-à-dire réaliser des dégroupements-échanges.

Les soustractions proposées aux élèves étaient de difficulté croissante :

Soustraction	Procédure à mettre en œuvre
345 – 213	Cette soustraction est assez simple et la difficulté se pose à l'ordre des unités : il faut dégrouper le jeton quinaire de 345 pour ensuite y soustraire les 3 unités de 213. Il n'y a cependant pas de changement d'ordre dans ce cas de figure.
210 - 104	Ici, la difficulté réside dans le fait qu'il faille effectuer des dégroupements successifs : la dizaine de 210 s'échange contre deux quinaires de l'ordre inférieur. Une de ces quinaires s'échange ensuite contre 5 unaires (ou les deux quinaires s'échangent contre 10 unaires), desquelles on peut soustraire les quatre unités de 104.

Notre objectif lors de cette séance était de faire émerger des procédures pour réaliser une soustraction et de voir quelles étaient les explications et justifications des élèves par rapport à leur procédure. Notre objectif a été atteint dans les deux classes et les élèves ont proposé des procédures différentes.

La première procédure observée consistait à représenter les deux termes de la soustraction respectivement sur les parties gauche et droite de l'abaque et d'y retirer simultanément le même nombre de jetons des deux côtés, en se servant des deux mains jusqu'à ce qu'une des colonnes, celle qui contenait le moins de jetons au départ, soit vide.

La seconde procédure, que moins d'élèves ont proposée, n'utilisait que la partie gauche de l'abaque, sur laquelle était représenté le premier terme de la soustraction. Puis les élèves y retiraient le nombre de jetons correspondant au chiffre de chacun des ordres du second terme. Lors de la mise en commun, un inconvénient à cette démarche a d'ailleurs été soulevé. Un élève a mentionné que sans la soustraction écrite sous les yeux, il serait difficile de se rappeler du nombre de jetons à retirer.

Lorsque nous avons observé les élèves en action, lors de la phase de recherche, nous avons noté quelques points intéressants. Pour la première opération, la plupart des élèves n'ont pas eu besoin de procéder de manière effective aux dégroupements-échanges du

quinaire en 5 unaires ; ils ont plutôt calculé mentalement. Ce sont les élèves les plus en difficulté qui ont procédé au dégroupement.

Pour ce qui est de la seconde soustraction, le taux de réussite a été plus bas. En effet, on se retrouve ici face à la même difficulté que pour l'addition, la compréhension des principes de numération garantit la réussite et comme nous l'avons déjà évoqué, il s'agit d'une difficulté intrinsèque à la numération qui, pour être surmontée demandera plus de temps.

Pour cette activité, nos observations ont été différentes dans les deux classes. Bien que tous les élèves de la classe de CE2/CM1 n'aient pas réussi, beaucoup de ceux qui ont réussi n'ont pas eu besoin de procéder au dégroupement, ils ont là encore calculé mentalement. Cela démontre donc que le travail sur l'abaque permet effectivement de mener vers l'abstraction, puisque les élèves n'ont pas eu besoin de passer par la manipulation concrète. Néanmoins, il convient de noter que ce ne sont pas nécessairement les meilleurs élèves qui ont réussi à résoudre cette soustraction. Dans la classe de CM1, on a également pu observer que certains élèves ont procédé par calcul mental. Cependant, des élèves en grande difficulté en début d'année ont procédé instinctivement au dégroupement-échange afin de trouver le résultat. Cet échange concret est une nécessité pour les élèves qui cheminent encore vers l'abstraction.

Voyant que certains élèves réussissaient par calcul mental, nous avons essayé de les mener, par de l'étagage, à réaliser le dégroupement-échange, pensant que cela permettrait de renforcer leurs représentations. Cela n'a pas eu l'effet escompté et nous pensons donc que lorsque les élèves ont atteint un certain niveau d'abstraction, cela n'est pas nécessaire. Nous préconisons de ne pas induire le dégroupement-échange, au risque de créer de la confusion.

En ce qui concerne les élèves n'ayant pas réussi à résoudre cette seconde soustraction, une erreur a été récurrente. Au lieu de soustraire les quatre unaires de 104 à la dizaine de 210, ils ont rabattu les quatre jetons sur la partie gauche de l'abaque, procédant ainsi inconsciemment à une addition à l'ordre des unités. Nous attribuons cette erreur à deux facteurs. Le premier se rapporte au contrat didactique, car nous avons travaillé pendant très longtemps sur l'addition où il fallait rabattre les jetons pour résoudre l'équation. Les élèves ont pu procéder de la sorte par « réflexe ». Le second facteur est d'ordre pédagogique : nous avons soumis nos élèves à deux soustractions de difficulté différente lors d'une même séance, ce qui était peut-être un peu trop rapide. Si nous avions à reprendre ce travail sur la soustraction, nous laisserions davantage le temps à nos élèves de s'exercer à résoudre des

soustractions simples avant de passer à un niveau de difficulté supérieur, un peu à l'image de la progression très lente que nous avons suivi depuis le début du travail avec l'abaque.

7 CONCLUSION

Les apprentissages liés à la numération à l'école primaire ne sont pas des plus faciles, d'autant plus en contexte francophone, pour les irrégularités de la langue qu'on lui connaît. Il s'agit d'apprendre un code partagé (notre numération) et d'en comprendre la logique sous-jacente (les groupements par 10 et puissances de 10). D'ailleurs, pour beaucoup d'enfants, cela représente des obstacles, qui sont généralement franchis au cours du cycle 2 de l'école primaire. Cependant, si on passe trop rapidement, à ce moment, à des activités abstraites sur les nombres, ou si les élèves ne manipulent pas suffisamment, ces difficultés peuvent persister jusqu'au cycle 3, voire après.

Dans ce cas, il faut y remédier, sous peine de cumuler les obstacles et les difficultés. Lorsque les activités abstraites sur les nombres ne font pas sens pour les élèves (c'est-à-dire, lorsqu'ils réalisent des opérations de manière automatique, sans comprendre pourquoi ils le font), la manipulation est un moyen efficace pour réinstaller des représentations mentales opérationnelles et ce, quel que soit l'âge des élèves.

C'est le cas auquel nous avons été confrontées cette année et qui nous a permis de tester notre dispositif de remédiation à l'aide des abaques à lignes. Comme nous l'avons dit précédemment, les résultats de notre expérimentation sont satisfaisants. En effet, nous avons noté que tous les élèves ont progressé. Ces résultats sont d'autant plus significatifs que ce sont les élèves les plus en difficulté qui se sont le plus améliorés dans la maîtrise des compétences. De ce fait, nous pouvons dire que la remédiation à une construction insuffisante du nombre par l'utilisation de l'abaque à lignes est efficace. Il est cependant important de respecter un rythme de travail très progressif de manière à ce que les élèves puissent s'approprier et intérioriser des procédures idoines. Il est primordial que ces procédures émergent de leurs propres recherches, qu'elles aient été confrontées au point de vue des autres élèves puis validées par le groupe.

Les résultats présentés dans ce mémoire sont significatifs, mais pour aller plus loin et évaluer l'impact de la manipulation de l'abaque à lignes sur la compréhension des élèves, il serait intéressant de proposer une démarche d'analyse de données qualitative afin de compléter nos résultats chiffrés et de traduire au plus juste les avancées cognitives de nos élèves. Effectivement, en écoutant nos élèves interagir lors des séances, nous avons remarqué,

dans leurs prises de paroles, que des liens se tissent entre les différents domaines mathématiques et s'enrichissent à la lumière des nouveaux apprentissages.

8 BIBLIOGRAPHIE

Livres et articles

- BARON, Liliane, 1995, *De la construction mathématique à sa représentation*, Éditions Magnard, Belgique.
- BRISSIAUD, Rémi, 2014, « École, programmes et neurosciences : Évitions un nouveau dogmatisme ! », *Le café pédagogique*, Consulté sur internet le 5 juin 2015 (<http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2014/03/21032014Article635309778291938360.aspx>).
- BRISSIAUD, Rémi, 2013, *Apprendre à calculer à l'école : Les pièges à éviter en contexte francophone*, Éditions Retz, Paris.
- BRISSIAUD, Rémi, 2012, « Le nombre à l'école maternelle : des changements en vue, mais dans quel sens ? », *Le café pédagogique*, Consulté sur internet le 5 juin 2015 (http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2012/03/16032012_RBrisiaud.aspx).
- BRISSIAUD, Rémi, 2005, *Comment les enfants apprennent à calculer : Le rôle du langage, des représentations figurées et du calcul dans la conceptualisation des nombres*, Éditions Retz, Paris.
- Conseil supérieur des programmes, 2015a, *Projet de programme pour le cycle 2*, Ministère de l'éducation nationale, Paris.
- Conseil supérieur des programmes, 2015b, *Projet de programme pour le cycle 3*, Ministère de l'éducation nationale, Paris.
- DAVAL, Nathalie, 2014, « Les abaques, outils de numération et de calcul », *IREM de la Réunion*, Consulté sur internet le 20 mars 2015 (<http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article753>).
- DESBROSSES, Stéphane, 2007, « La quantification : le subitizing », *Psychoweb*, Consulté sur internet le 9 juin 2015 (<http://www.psychoweb.fr/articles/psychologie-du-developpement/51-la-quantification-le-subitizing.html>).
- HENDRICK, Joanne, 1997, *L'enfant, une approche globale pour son développement*, Presses de l'Université du Québec, Québec.
- JOHSUA, Alberte, Claude MAURIN, 1993, *Les structures numériques à l'école primaire*, Volume 1, Éditions Ellipses, Paris.
- Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, « Fascicule 3 », *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la 6^e année*, Consulté sur internet le 14 mars 2015 (<http://www.curriculum.org/secretariat/files/020110fGuideMathematiques.pdf>).
- Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2009, « Le passage à l'abstrait dans l'apprentissage des mathématiques au cycle intermédiaire », *De la théorie à la pratique*, Consulté sur internet le 14 mars 2015 (<https://www.edu.gov.on.ca/fre/teachers/studentssuccess/monographie6.pdf>).

- Ministère de l'Éducation nationale, 2015, « Programme d'enseignement de l'école maternelle », *Bulletin officiel spécial n°2 du 26 mars 2015*, Paris.
- Ministère de l'Éducation nationale, 2008, « Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire », *Bulletin officiel n°3 du 19 juin 2008 Hors-série*, Paris.
- Ministère de l'Éducation nationale, 2007, « Mise en œuvre du socle commun de connaissance et de compétences : l'enseignement du calcul », *Bulletin officiel n°10 du 08 mars 2007*, Consulté sur internet le 25 mai 2015 (<http://www.education.gouv.fr/bo/2007/10/MENE0700408C.htm>)
- MLOUKA, Moncef, Bernard HIDOINE, 2006, « Machines à calculer », *Interstices*, Consulté sur internet le 10 juin 2015 (https://interstices.info/jcms/c_15272/machines-a-calculer).
- PEILLON, Vincent, 2013, « Communication en Conseil des ministres : les résultats de l'enquête Pisa (Programme international pour le suivi des acquis des élèves) », *education.gouv.fr*, Consulté sur internet le 3 juin 2015 (<http://www.education.gouv.fr/cid75515/communication-en-conseil-des-ministres-les-resultats-de-l-enquete-pisa.html>)
- PIAGET, J., A. SZEMINSKA, 1991, *La genèse du nombre chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, Lausanne.
- POISARD, Caroline, 2006, *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer*, Université de Provence, Aix-Marseille I.
- RAYNAL, Françoise, Alain RIEUNIER, 1997, *Pédagogie, dictionnaire des concepts clés : apprentissage, formation, psychologie cognitive*, ESF Éditeur, Paris.
- ROCHA, Céline, 2012, *Le rôle de la manipulation dans la résolution de problèmes au cycle 2*, Consulté sur internet le 14 mars 2015 (<http://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00742788/document>).
- SCHÄRLIG, Alain, 2006, *Compter du bout des doigts. Cailloux, jetons et bouliers, de Périclès à nos jours*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.
- TIENNOT, Luc, 2013a, *Mathématiques pour le CRPÉ : Épreuve d'admissibilité, Master MEÉF – M1. Tome 3 : la didactique et l'APÉ*, Université de la Réunion.
- TIENNOT, Luc, 2013b, *Mathématiques pour le CRPÉ : Épreuve d'admissibilité, Master MEÉF – M1. Tome 2 : les mathématiques*, Université de la Réunion.
- VALENTIN, Dominique et al., 2005, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CP*, Collection ERMEL, Éditions Hatier, Paris.
- ZAGO, Laure, 2005, « Le cerveau en action : Le cas du raisonnement arithmétique », *Les bases cérébrales du raisonnement arithmétique : du calculateur commun au calculateur prodige*, Consulté sur internet le 5 juin 2015 (<http://www.apmep.fr/IMG/pdf/zago.pdf>).

Ressources internet

MEIRIEU, Philippe, « Remédiation », *Site de Philippe Meirieu : Histoire et actualité de la pédagogie*, Consulté sur internet le 29 mai 2015 (<http://www.meirieu.com/DICTIONNAIRE/remediation.htm>).

DEHAENE, Stanislas, 2011, « La bosse des maths », *Les mardis de l'Espace des sciences*, conférence filmée, consultée sur internet le 5 juin 2015 (<https://www.youtube.com/watch?v=0yCWPAelZBo>).

9 ANNEXES

Liste des annexes

- A. Progressivité des apprentissages à partir de l'activité le Fourmillion.....p.65
- B. Proposition d'évaluation à l'issue de la première séquence de calcul instrumenté...p.67
- C. Séances d'apprentissage en calcul instrumenté.....p.70
- D. Cartes imprimables sur papier couleur, règles du jeu et feuilles de score pour la mise en œuvre du jeu Cart' Abaque.....p.85
- E. Table de calcul pour le défi « table de calcul » proposé en séance 4a de la séquence 2 de calcul instrumenté.....p.94

Annexe A :

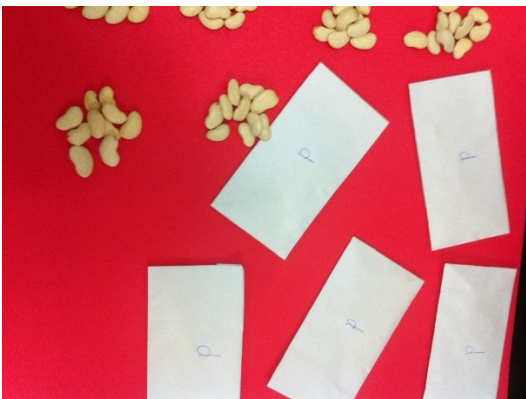
Progressivité des apprentissages à partir de l'activité le Fourmillion



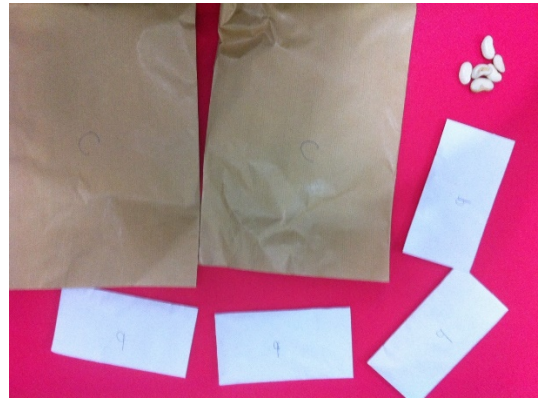
Importante collection à dénombrer.



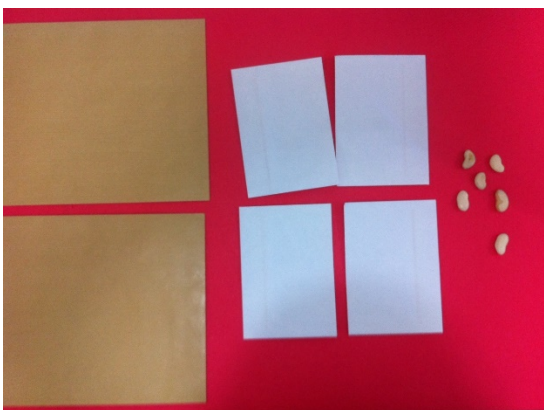
Groupements par 10.



Les élèves sont en train de matérialiser les groupements.



Les groupements ont été matérialisés.



C'est l'enveloppe qui représente la quantité.



C'est la position du pois du Cap qui lui donne sa valeur.

Annexe B :

Proposition d'évaluation à l'issue de la
première séquence de calcul
instrumenté.


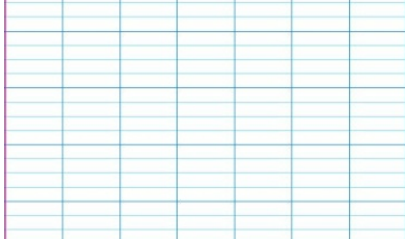
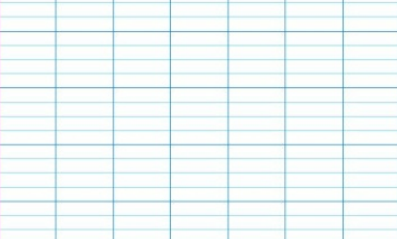
NOM : _____

PRÉNOM : _____

Période 2 - Évaluation de mathématiques

Calculs posés			Écrire les nombres			Représenter sur l'abaque			Décomposer, recomposer			Comparer		
A	EA	NA	A	EA	NA	A	EA	NA	A	EA	NA	A	EA	NA

1. Pose et effectue les calculs suivants :

a) $13\ 564 + 2\ 368$	b) $751 - 481$	c) $1\ 234 - 149$
		

2. Écris ces nombres en chiffres. Fais attention à laisser des espaces aux bons endroits.

Deux-millions-trois-cent-cinquante-mille-cent → _____

Deux-cent-quatorze-mille-six-cent-douze → _____

Cent-quarante-cinq-millions-trois-cent-cinquante-sept-mille-deux-cents
→ _____

3. Écris ces nombres en lettres.

187 490
→ _____

138 621 400
→ _____

4. Écris les nombres qui sont dictés.

--	--	--

5. Compare les nombres. Ajoute le bon signe (<, > ou =)

- a) 355 49
- b) 4 932 4 783
- c) 123 458 123 485
- d) 986 762 490 986 762 490

6. Décompose ces nombres.

a) $7\,908 \rightarrow$ _____

b) $12\,459 \rightarrow$ _____

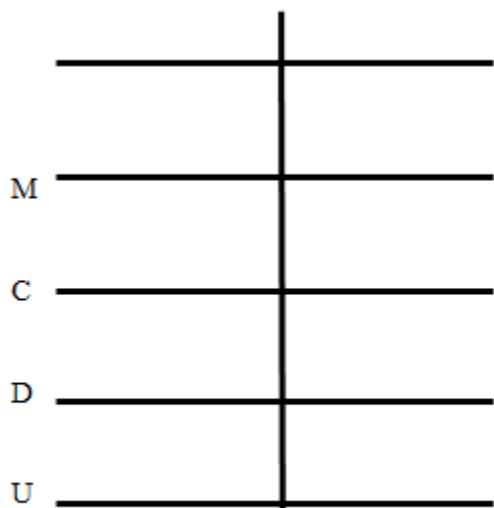
7. Recompose ces nombres.

a) $1\,000 + 300 + 30 + 9 \rightarrow$ _____

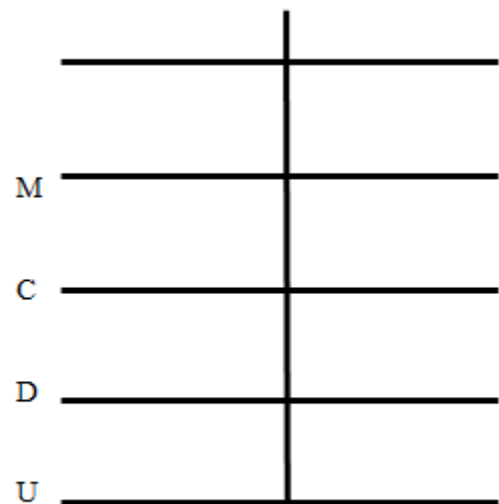
b) $9\,000 + 40 + 5 \rightarrow$ _____

8. Représente les nombres sur l'abaque en dessinant les jetons. Aide-toi de ton abaque avant d'écrire.

a) 743



b) 258



Annexe C :
Séances d'apprentissage en calcul
instrumenté.

		Période 2 Séance 1 sur 6 Calcul instrumenté			Séquence de mathématiques
Mathématiques Calcul instrumenté Cycle : 3 Niveau : CE2-CM1 Durée : 30 min		Compétence de fin de cycle : - Écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (jusqu'au centième) et quelques fractions simples BO N°3 du 19 juin 2008 Hors-série : - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard			
Phase d'apprentissage : Découverte		Matériel : <i>Kit Calculus</i> , un puis deux jetons. Dispositif : La Martinière			
Objectif de la séance : Découvrir le matériel de calcul et son fonctionnement Objectif opérationnel : Représenter des nombres avec un ou deux jetons Objectif langagier : abaque, jetons, lexique des nombres					
Phases durée	Déroulement/Activité	Consignes	Critères de réussite	Rôle de l'enseignant	observations
1 5 min	<u>Découverte</u> Expliquer le fonctionnement du plateau de l'abaque, distribuer le matériel, indiquer que l'on ne va utiliser que la partie de gauche.		Être attentif	Apporte des connaissances, donne des informations, des explications.	
2 15 min	<u>Recherche</u> Activité 1. <i>Avec une unaire</i> Matériel : le plateau, un jeton. Dispositif : La Martinière Mise en commun : abaque reproduit au tableau	<u>Consigne :</u> - Représenter 1. - Représenter 10. - Représenter 100. - Avec ce matériel, quel est le plus grand nombre que je peux représenter ?	Représenter correctement les nombres : retrouver le modèle du tableau après recherche	Aide les élèves dans leurs recherches, rappelle le fonctionnement au besoin, donne un exemple en cas de difficulté.	Faire manipuler les élèves au tableau lors de la mise en commun, les autres se corrigent sur leur abaque.

<p>3 5 min</p>	<p>Activité 2. <i>Avec deux unaires</i> Matériel : le plateau, deux jetons. Dispositif : La Martinière, individuel.</p> <p><u>Institutionnalisation</u> Reformuler et faire reformuler le fonctionnement de l'abaque</p>	<p><u>Consigne :</u> – Représenter 2. – Représenter 20. – Représenter 200. – Représenter 11. – Représenter 110. – Représenter 101. – Il y-a-t-il un autre nombre que je peux représenter ? – Avec ce matériel, quel est le plus grand nombre que je peux représenter ? – En utilisant tous les jetons, quel est le plus petit nombre que je peux représenter ?</p>	<p>Comprendre qu'un jeton ne représente pas le même nombre selon sa position sur le plateau</p>		
---------------------------	---	---	---	--	--

		Période 2 Séance 2 sur 6 Calcul instrumenté		Séquence de mathématiques	
Mathématiques Calcul instrumenté		Compétence de fin de cycle : - Écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (jusqu'au centième) et quelques fractions simples			
Cycle : 3 Niveau : CE2-CM1 Durée : 30 min		BO N°3 du 19 juin 2008 Hors-série : - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard			
Phase d'apprentissage : Découverte		Matériel : le plateau, trois jetons Dispositif : La Martinière			
Objectif de la séance : Découvrir le matériel de calcul et son fonctionnement Nommer les nombres					
Objectif opérationnel : Représenter des nombres avec trois jetons					
Objectif langagier : abaque, jetons, lexique des nombres					
Phases durée	Déroulement/Activité	Consignes	Critères de réussite	Rôle de l'enseignant	observations
1 5 min	Rappel -Comment ça s'appelle ? -Comment on s'en sert ? -Qu'est-ce qu'on avait fait la dernière fois ?		Participer. Utiliser vocabulaire approprié.	le Valide les réponses des élèves, apporte des compléments.	
2 15 min	<u>Recherche</u> Activité 3 <i>Avec trois unaires</i> Matériel : le plateau, trois jetons. Dispositif : La Martinière par deux.	<u>Consigne :</u> - Représenter 3. - Représenter 30. - Représenter 300. - Représenter 12. - Représenter 120. - Représenter 111.	Représenter correctement les nombres. Chercher toutes les possibilités de	Aide les élèves dans leurs recherches, rappelle le fonctionnement au besoin, donne un exemple en cas de	Faire manipuler les élèves au tableau lors de la mise en commun, les autres se corrigent sur leur abaque

	<p>Mise en commun : abaque reproduit au tableau</p>	<p>– Il y-a-t-il d'autres nombres que je peux représenter ? Dispositif : un élève représente un nombre sur l'abaque, son binôme le représente sur l'ardoise... La validation passe par la désignation orale (s'il y a conflit, possibilité d'appeler la maîtresse).</p> <p><u>Mise en commun.</u> Verbalisation sur les difficultés.</p> <p><u>Évaluation de la compréhension des élèves</u> La maîtresse représente des nombres sur l'abaque au tableau et les élèves doivent les écrire sur le cahier du jour.</p>	<p>nombres représentables avec 3 jetons. En trouver quelques-uns.</p>	<p>difficulté.</p>	
<p>3 5 min</p>	<p><u>Institutionnalisation</u> Reformuler et faire reformuler le fonctionnement de l'abaque.</p>		<p>Comprendre qu'un jeton ne représente pas le même nombre selon sa position sur le plateau</p>		

		Période 2 Séance 3 sur 6 Calcul instrumenté		Séquence de mathématiques	
Mathématiques Calcul instrumenté Cycle : 3 Niveau : CE2-CM1 Durée : 30 min		Compétence de fin de cycle : - Écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (jusqu'au centième) et quelques fractions simples BO N°3 du 19 juin 2008 Hors-série : - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard			
Phase d'apprentissage : Découverte		Matériel : le plateau, quatre jetons Dispositif : La Martinière			
Objectif de la séance : Découvrir le matériel de calcul et son fonctionnement, nommer les nombres Objectif opérationnel : Représenter des nombres avec quatre jetons					
Phases durée	Déroulement/Activité	Consignes	Critères de réussite	Rôle de l'enseignant	observations
1 5 min	Rappel -Comment ça s'appelle ? -Comment on s'en sert ? -Qu'est-ce qu'on avait fait la dernière fois ?		Participer Utiliser le vocabulaire approprié	Valide les réponses des élèves, apporte des compléments.	
2 15 min	<u>Recherche</u> Activité 4 <i>Avec quatre unaires</i> Matériel : le plateau, quatre jetons. Dispositif : La Martinière par deux. Mise en commun : abaque reproduit au tableau	<u>Consigne :</u> - Représenter 4. - Représenter 40. - Représenter 4 000. - Représenter 40 000. - Représenter 211. - Représenter 130. - Représenter 2 020. - Représenter 10 102.	Représenter correctement les nombres Chercher toutes les possibilités de nombres représentables	Aide les élèves dans leurs recherches, rappelle le fonctionnement au besoin, donne un exemple en cas de difficulté	Faire manipuler les élèves au tableau lors de la mise en commun, les autres se corrigent sur leur plateau

<p>3 5 min</p>	<p><u>Institutionnalisation</u> Reformuler et faire reformuler le fonctionnement de l'abaque.</p>	<p>– Représenter 21 010. – Il y-a-t-il d'autres nombres que je peux représenter ? Dispositif : un élève représente un nombre sur l'abaque, son binôme le représente sur l'ardoise... La validation passe par la désignation orale (s'il y a conflit, possibilité d'appeler la maîtresse).</p> <p><u>Mise en commun.</u> Verbalisation sur les difficultés. <u>Évaluation formative</u> Les élèves doivent les écrire sur le cahier du jour les nombres représentés au tableau → 2 011, 10 300, 121, 11 110</p>	<p>avec 4 jetons. En trouver quelques-uns.</p> <p>Un jeton ne représente pas le même nombre selon sa position sur le plateau</p>	
---------------------------	---	--	--	--

		Période 2 Séance 4 sur 6 Calcul instrumenté			Séquence de mathématiques
Mathématiques Calcul instrumenté Cycle : 3 Niveau : CE2-CM1 Durée : 30 min		Compétence de fin de cycle : - Écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (jusqu'au centième) et quelques fractions simples BO N°3 du 19 juin 2008 Hors-série : - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard			
Phase d'apprentissage : Découverte		Matériel : le plateau, cinq jetons, abaque au tableau Dispositif : La Martinière			
Objectif de la séance : Découvrir le matériel de calcul et son fonctionnement, Nommer les nombres					
Objectif opérationnel : Représenter des nombres avec quatre jetons					
Phases durée	Déroulement/Activité	Consignes	Critères de réussite	Rôle de l'enseignant	observations
1 5 min	<u>Rappel</u> Verbalisation sur ce que les élèves ont appris jusqu'à maintenant.	Pouvez-vous me dire ce que vous avez appris jusqu'à maintenant avec cet abaque. Est-ce que c'est difficile ou facile pour vous ?	Représentation des nombres avec 1, 2, 3 et 4 jetons. Les élèves peuvent identifier leurs difficultés et réussites.	Pose des questions, accorde le droit de parole	
2 15 min	<u>Recherche</u> Activité 5 Introduire la nécessité de grouper avec un quinaire.	<u>Consigne :</u> - Représenter 5 - Représenter 50 - Représenter 500 - Maintenant, à vous de me dire de combien de jetons vous avez besoin pour représenter 99. Et 999 ? Et	Représenter correctement les nombres Chercher le nombre de jetons pour 999 (27 jetons).	Aide les élèves dans leurs recherches, rappelle le fonctionnement au besoin, donne un exemple en cas de difficulté	

<p>5 min</p>	<p>Activité 6 Avec un quinaire et une unaire</p>	<p>9999 ? on n'aurait même pas assez de jetons... - Il faut simplifier la lecture ... Les gens qui utilisaient les abaques pour compter au Moyen Âge ont décidé que pour représenter 5, ils allaient utiliser un seul jeton, qui vaut 5... Pensez-vous qu'ils le placent sur la barre, comme les autres jetons ? Pourquoi ? à placé au-dessus de la barre. - En utilisant notre nouveau code, représentez à nouveau 5 ? Représenter 50 ? Puis 500.</p> <p>À partir de maintenant, on voudra toujours représenter les nombres en utilisant le moins possible de jetons. - Représenter 6, 10, 510, 501...</p>	<p>Laisser un petit temps de recherche, les élèves font des propositions...</p>	<p>Si ça n'émerge pas, enchaîne sur la suite.</p>	
<p>3 5 min</p>	<p><u>Institutionnalisation</u> Reformuler et faire reformuler le fonctionnement de l'abaque.</p>	<p>Qu'est-ce qu'on a appris de nouveau aujourd'hui ? (jeton qui représente 5) Pourquoi on ne le place pas sur la barre ? (parce que sinon on pense qu'il vaut 1, c'est sa position qui lui donne sa valeur, comme dans notre système de numération) Quel est l'objectif lorsqu'on utilise l'abaque à partir de maintenant ? (utiliser le moins de jetons possible)</p>	<p>Un jeton ne représente pas le même nombre selon sa position sur le plateau</p>		

		Période 3			Séance 1/6
		Séquence de mathématiques : Calcul instrumenté			
MATHEMATIQUES	Compétence de fin de cycle :				
Cycle : 3	- Écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (jusqu'au centième) et quelques fractions simples				
Niveau : CE2 -CM1	BO N°3 du 19 juin 2008 Hors-série :				
Durée : 35 min	CE 2 : - Organiser ses calculs pour trouver un résultat par calcul mental, posé, ou à l'aide de la calculatrice. - Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations. CM 1 : - Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes.				
Phase d'apprentissage : Découverte			Matériel : abaque et jetons collectifs, abaques et jetons individuels, cartes constellations, cahier du jour.		
Objectif de la séance : Additionner deux nombres entiers sans groupement-échange. Apprendre une méthode de calcul.					
Objectif opérationnel : Écrire, lire, nommer un nombre entier avec un abaque à ligne.					
Objectif langagier : ligne, colonnes, gauche, droite.					
Prérequis : Savoir représenter des nombres entiers sur l'abaque à jetons, en facilitant la lecture.					
Phases durée	Déroulement/Activité	Consignes	Critères de réussite	Rôle de l'enseignant	Observations
1 10 min	<u>Mise en activité</u> Lecture rapide de constellations représentées sur l'abaque à ligne. Dispositif La Matinière : Présenter rapidement une carte des constellations à savoir lire pour lire tous les nombres représentés sur l'abaque. Demander d'écrire le nombre sur l'ardoise. Faire lire 5 cartes. Noter au tableau un nombre entier. Demander de représenter ce nombre sur l'abaque.	Je vous montre rapidement une carte où est représenté un nombre sur l'abaque. Écrivez sur l'ardoise le nombre qui était représenté. Représentez le nombre écrit au tableau sur votre abaque.			En demandant aux élèves qui ont représenté correctement

	<p>Demander à un élève de venir le représenter au tableau. Demander aux élèves de lever le doigt s'ils ont juste.</p> <p>annoncer l'objectif des séances à venir : Nous avons appris à représenter des nombres sur l'abaque. Maintenant nous allons apprendre à faire des calculs avec l'abaque. Nous allons commencer par additionner deux nombres.</p>				le nombre de lever le doigt, repérer les élèves qui rencontrent des difficultés pour remédiation.
2 10 min	<p><u>Recherche</u></p> <p>Présenter une addition simple au tableau : $112 + 212 =$ Donner la consigne.</p> <p>Normalement les élèves savent parfaitement représenter ces deux nombres, si la tâche paraît difficile, indiquer que pour commencer, l'un des nombre peut être écrit à gauche, l'autre à droite sur l'abaque.</p>	<p>Vous allez chercher comment additionner ces deux nombres sur votre abaque. Vous avez maintenant le droit d'utiliser les deux colonnes (à droite et à gauche)</p>	<p>Représenter chaque nombre indépendamment sur la partie gauche et la partie droite.</p> <p>Les rassembler en faisant attention à garder les rangs de chaque jetons, et lire le nombre obtenu: 324</p>	<p>Repérer les procédures intéressantes pour la mise en commun.</p>	
3 10 min	<p><u>Mise en commun</u></p> <p>Demander aux élèves de s'exprimer sur cette recherche : difficultés ou pas. Qui pense avoir réussi ? Pourquoi ?</p> <p>Demander de lire quelques nombres représentés sur l'abaque à ce moment et les noter au tableau.</p>		<p>Tâtonner pour arriver à dégager une procédure experte.</p>	<p>Gère les interactions, pose des questions pour soulever des interrogations ou réactiver des connaissances sur</p>	La

	<p>Comparer ces résultats avec le résultat de l'addition en ligne. (profiter de ce moment pour faire un retour sur les ordres de grandeur)</p> <p>Inviter des élèves dont on a repéré les procédures ou des volontaires au tableau. Faire expliciter la démarche, reformuler au besoin, étape par étape. Discuter avec l'ensemble de la classe autour de la démarche proposée, est-ce possible de faire comme ça, a-t-on le droit de..., sinon comment pourrait-on faire ?</p> <p>Arriver à faire dégager une procédure experte : représenter le premier nombre à gauche, le second à droite, les regrouper en faisant attention à ne pas les changer de ligne. Lire le résultat obtenu.</p>			le nombre.	représentation des nombres à gauche ou à droite ici n'a que peu d'importance mais il est préférable d'habituer les élèves à cette disposition pour les apprentissages ultérieurs.
4 5 min	<p>Évaluation formative : $222 + 101 =$ $3211 + 1101 =$ $361 + 123 =$ Correction collective au tableau.</p>	Faites ces calculs avec l'abaque et écrivez le résultat dans le cahier du jour.		Circuler pour repérer les difficultés et apporter son aide.	

		Période 3			Séance 2/6
		Séquence de mathématiques : Calcul instrumenté			
MATHEMATIQUES	Compétence de fin de cycle :				
Cycle : 3	- Écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (jusqu'au centième) et quelques fractions simples				
Niveau : CE2-CM1	BO N°3 du 19 juin 2008 Hors-série :				
Durée : 35 min	CE 2 : - Organiser ses calculs pour trouver un résultat par calcul mental, posé, ou à l'aide de la calculatrice.				
	- Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations.				
	CM 1 : - Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes.				
Phase d'apprentissage : Structuration			Matériel : abaque et jetons collectifs, abaques et jetons individuels, cartes constellations, cahier du jour.		
Objectif de la séance : Additionner deux nombres entiers avec groupements-échanges : échanger des unaires pour faire des quinaires et des quinaires en unaires de l'ordre supérieur (<i>réductions</i> ²⁶).					
Objectif opérationnel : Écrire, lire, nommer un nombre entier avec un abaque à ligne, échanger plusieurs jetons par un jeton en respectant les règles d'échange.					
Objectif langagier : ligne, colonnes, gauche, droite, grouper, échanger.					
Prérequis : Savoir représenter des nombres entiers sur l'abaque à jetons, en facilitant la lecture. Additionner deux nombres entiers sans groupement-échange.					
Phases durée	Déroulement/Activité	Consignes	Critères de réussite	Rôle de l'enseignant	Observations
1 10 min	<u>Mise en activité</u> Lecture rapide de constellations représentées sur l'abaque à ligne. Dispositif : La Matinière. Présenter rapidement une carte des constellations à savoir lire pour lire tous les nombres représentés sur l'abaque. Demander d'écrire le nombre sur l'ardoise. Faire lire 5 cartes.	Je vous montre rapidement une carte ou est représenté un nombre sur l'abaque. Écrivez sur l'ardoise le nombre qui était représenté.			

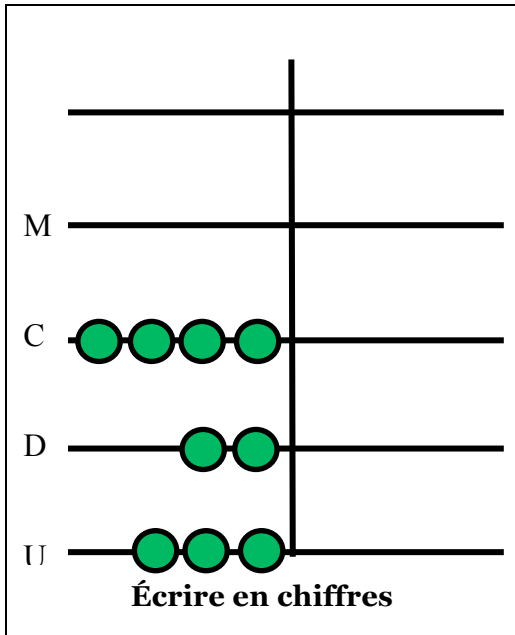
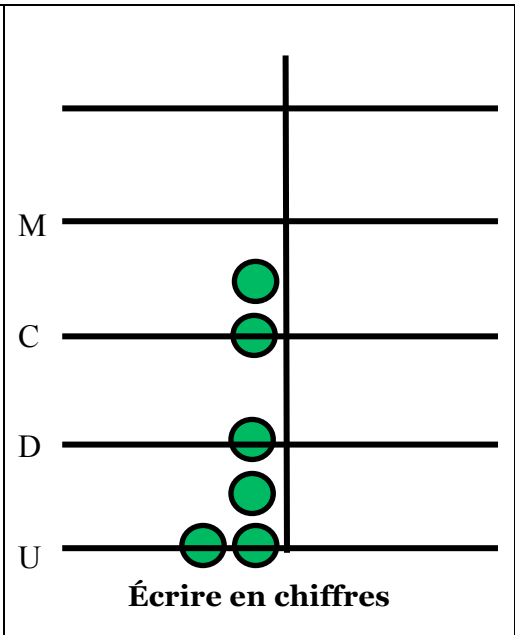
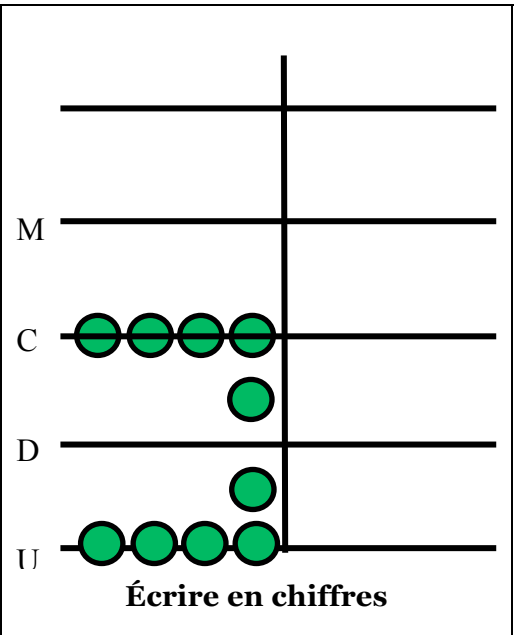
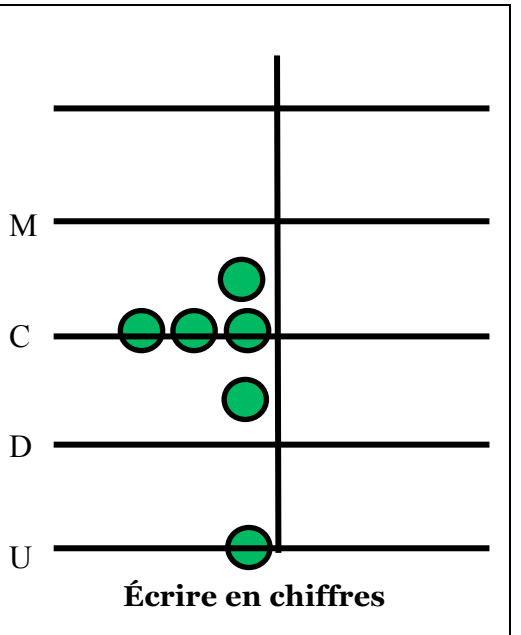
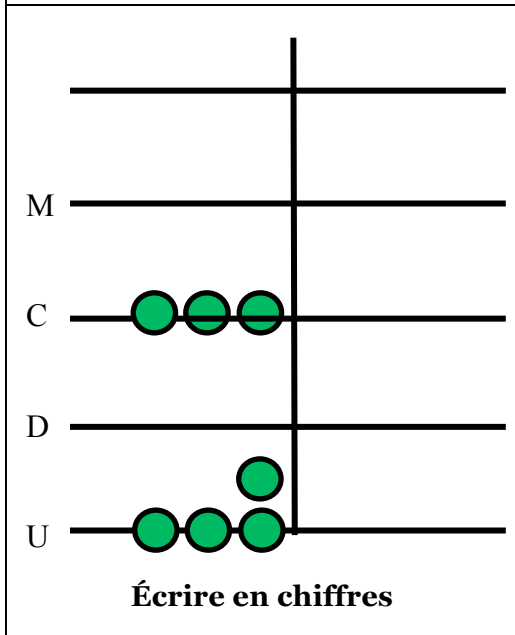
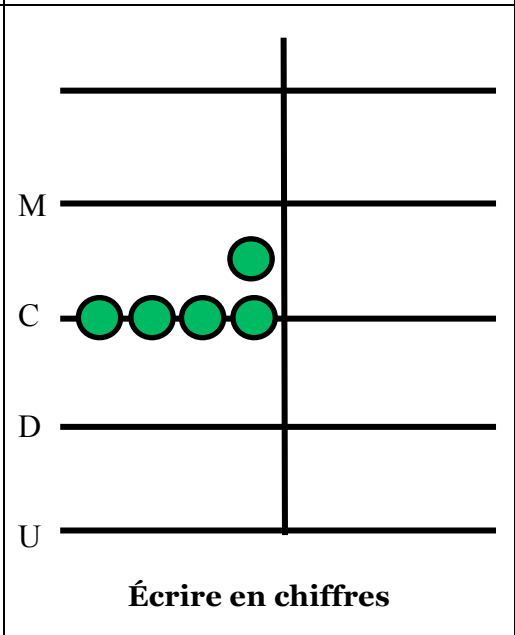
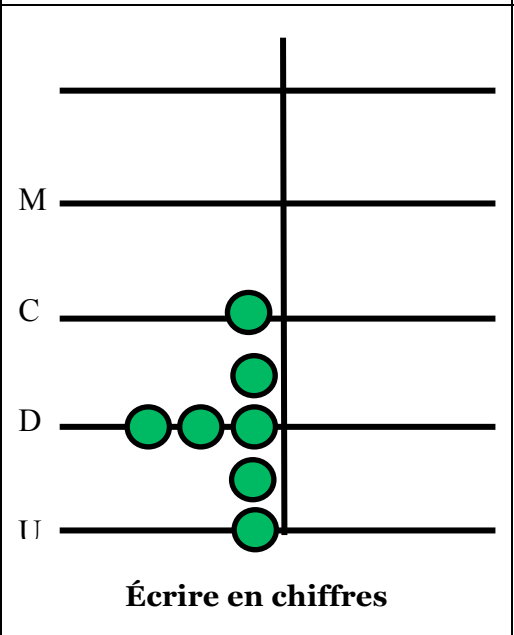
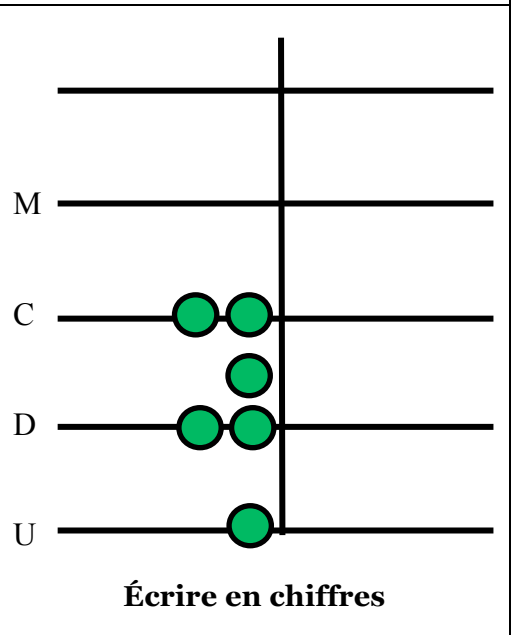
²⁶ Terme emprunté à Alain SCHÄRLING, *Compter du bout des doigts*.

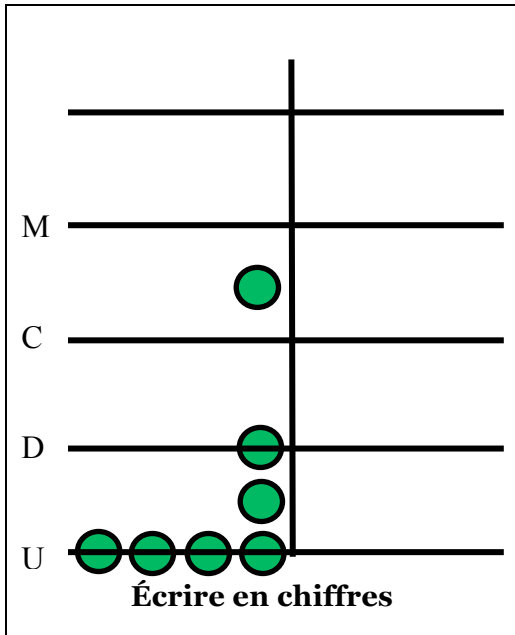
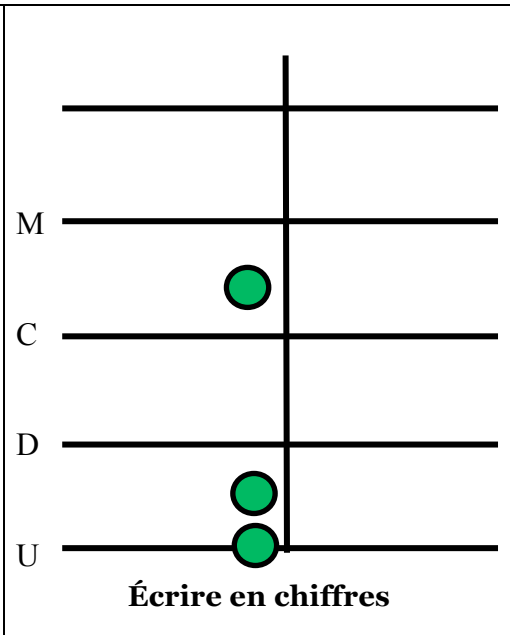
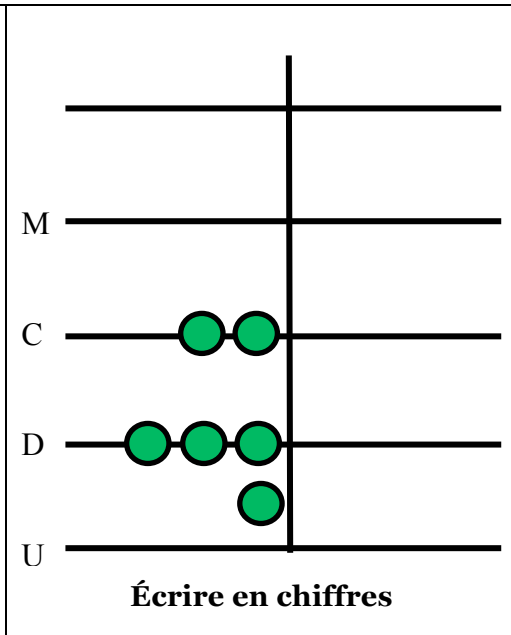
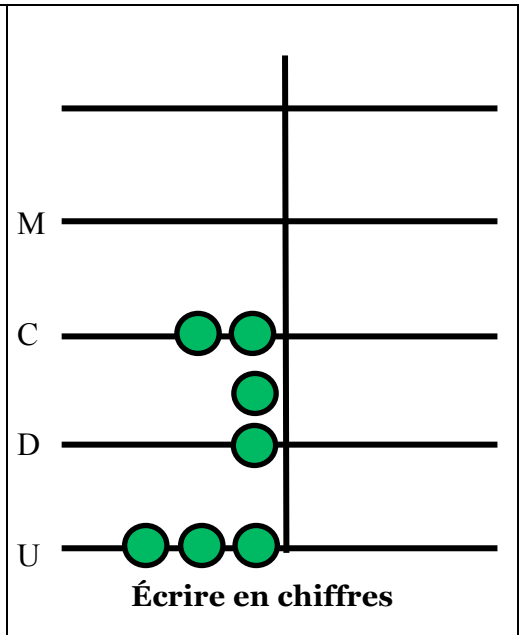
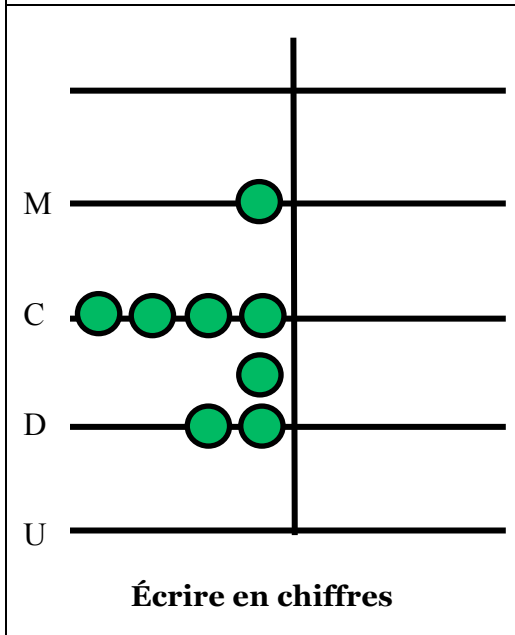
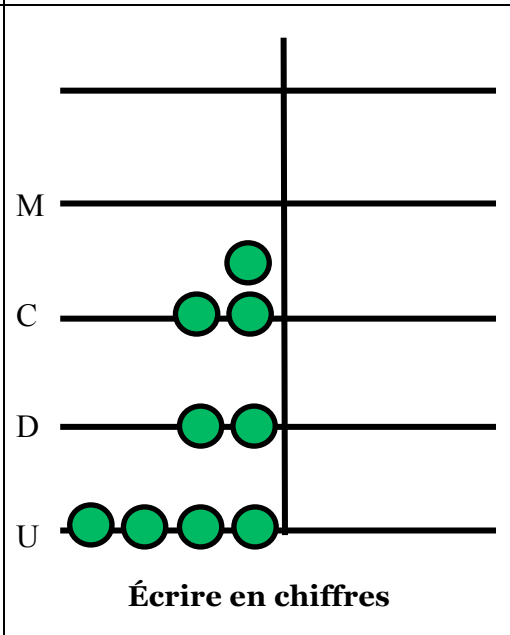
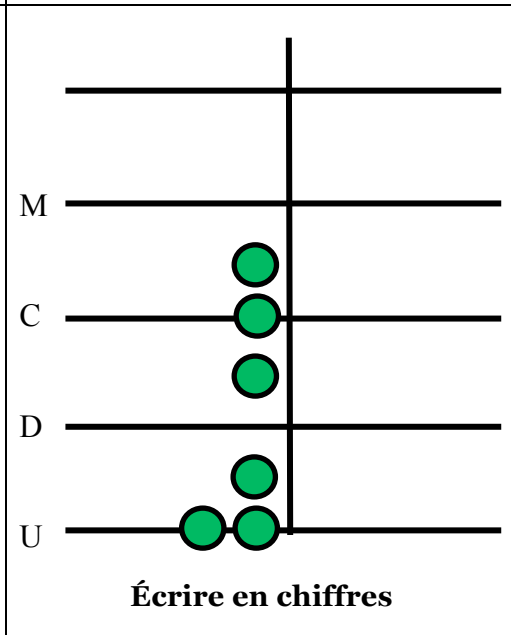
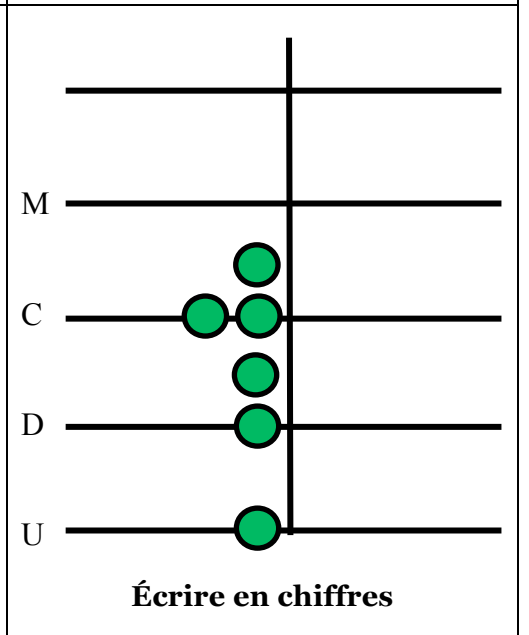
<p>2 10 min</p>	<p>Noter au tableau un nombre entier. Demander de représenter ce nombre sur l'abaque. Demander à un élève de venir le représenter au tableau. Demander aux élèves de lever le doigt s'ils ont juste.</p> <p>Rappel de ce qui a été fait à la séance précédente -On a utilisé les deux parties de l'abaque, on a représenté 2 nombres en même temps -On a additionné les deux nombres, on a compté les jetons sur chaque ligne pour trouver le nombre qu'il y avait en tout. → BUT : faire émerger le fait que, une fois les jetons ramenés à gauche, il fallait les compter pour savoir combien il y en avait à chaque ordre.</p> <p>annoncer l'objectif de la séance : Nous allons continuer à faire des additions mais cette fois il faudra représenter le résultat final avec le moins de jetons possible.</p> <p><u>Recherche</u></p> <p>Présenter une addition au tableau : $324 + 131 =$ Donner la consigne.</p>	<p>Représentez le nombre écrit au tableau sur votre abaque.</p> <p>Vous allez additionner ces deux nombres sur votre abaque. Quand c'est fait, essayer de chercher comment représenter ce nouveau nombre avec le moins de jetons possible.</p>	<p>Représenter chaque nombre indépendamment sur la partie gauche et la partie droite.</p> <p>Les rassembler en faisant attention à garder les rangs de chaque jetons, et lire le nombre obtenu: 455</p>	<p>Repérer les procédures intéressantes pour la mise en commun.</p>	<p>En demandant aux élèves qui ont représenté correctement le nombre de lever le doigt, repérer les élèves qui rencontrent des difficultés pour remédiation.</p> <p>Faire comprendre avec la consigne que le travail se fait en 2 étapes : résolution du calcul, groupements-échanges.</p>
----------------------------	--	--	---	---	--

<p>3 10 min</p>	<p><u>Mise en commun</u></p> <p>Demander aux élèves de s'exprimer sur cette recherche : difficultés ou pas. Qui pense avoir réussi ? Pourquoi ?</p> <p>Faire intervenir un élève au tableau pour résoudre le calcul sur l'abaque. Un autre qui pose l'addition. Comparer les résultats</p> <p>S'il n'y a pas eu de groupements-échanges le résultat est correct mais difficilement lisible. Inviter alors les élèves à : reproduire ce résultat sur leur abaque puis à chercher ce que l'on pourrait effectuer comme échange pour avoir le moins de jetons possible. Mise en commun au tableau avec explicitation des manipulations.</p> <p>Sinon, s'appuyer sur une démarche d'élève.</p>		<p>Tâtonner pour arriver à dégager une procédure experte : effectuer l'addition et faire des échanges lorsque c'est possible.</p>	<p>Gère les interactions, pose des questions pour soulever des interrogations ou réactiver des connaissances sur le nombre.</p>	<p>Faire un rappel sur les échanges entre 5 unaires et 1 quinaire au besoin.</p>
<p>4 5 min</p>	<p><u>Évaluation formative :</u> 432 + 121 = 3211 + 2144 = 361 + 224 = Correction collective au tableau.</p>	<p>Faites ces calculs avec l'abaque et écrire le résultat dans le cahier du jour.</p>		<p>Circuler pour repérer les difficultés et apporter son aide.</p>	

Annexe D :

Cartes imprimables sur papier couleur,
règles du jeu et feuilles de score pour la
mise en œuvre du jeu Cart'Abaque.

 <p>M</p> <p>C 4</p> <p>D 2</p> <p>U 3</p> <p>Écrire en chiffres</p>	 <p>M</p> <p>C 1</p> <p>D 3</p> <p>U 2</p> <p>Écrire en chiffres</p>	 <p>M</p> <p>C 4</p> <p>D 1</p> <p>U 4</p> <p>Écrire en chiffres</p>	 <p>M</p> <p>C 2</p> <p>D 1</p> <p>U 3</p> <p>Écrire en chiffres</p>
 <p>M</p> <p>C 3</p> <p>D 1</p> <p>U 3</p> <p>Écrire en chiffres</p>	 <p>M</p> <p>C 1</p> <p>D 1</p> <p>U 1</p> <p>Écrire en chiffres</p>	 <p>M</p> <p>C 1</p> <p>D 2</p> <p>U 2</p> <p>Écrire en chiffres</p>	 <p>M</p> <p>C 2</p> <p>D 2</p> <p>U 2</p> <p>Écrire en chiffres</p>

 <p>M</p> <p>C</p> <p>D</p> <p>U</p> <p>Écrire en chiffres</p>	 <p>M</p> <p>C</p> <p>D</p> <p>U</p> <p>Écrire en chiffres</p>	 <p>M</p> <p>C</p> <p>D</p> <p>U</p> <p>Écrire en chiffres</p>	 <p>M</p> <p>C</p> <p>D</p> <p>U</p> <p>Écrire en chiffres</p>
 <p>M</p> <p>C</p> <p>D</p> <p>U</p> <p>Écrire en chiffres</p>	 <p>M</p> <p>C</p> <p>D</p> <p>U</p> <p>Écrire en chiffres</p>	 <p>M</p> <p>C</p> <p>D</p> <p>U</p> <p>Écrire en chiffres</p>	 <p>M</p> <p>C</p> <p>D</p> <p>U</p> <p>Écrire en chiffres</p>

421

Représenter sur l'abaque

163

Représenter sur l'abaque

750

Représenter sur l'abaque

615

Représenter sur l'abaque

275

Représenter sur l'abaque

349

Représenter sur l'abaque

1 260

Représenter sur l'abaque

556

Représenter sur l'abaque

812

Représenter sur l'abaque

565

Représenter sur l'abaque

913

Représenter sur l'abaque

717

Représenter sur l'abaque

439

Représenter sur l'abaque

624

Représenter sur l'abaque

1 547

Représenter sur l'abaque

2 073

Représenter sur l'abaque

1 345 984

Lire le nombre

24 112 062

Lire le nombre

3 450 976

Lire le nombre

124 543 789

Lire le nombre

432 567 009

Lire le nombre

3 000 002

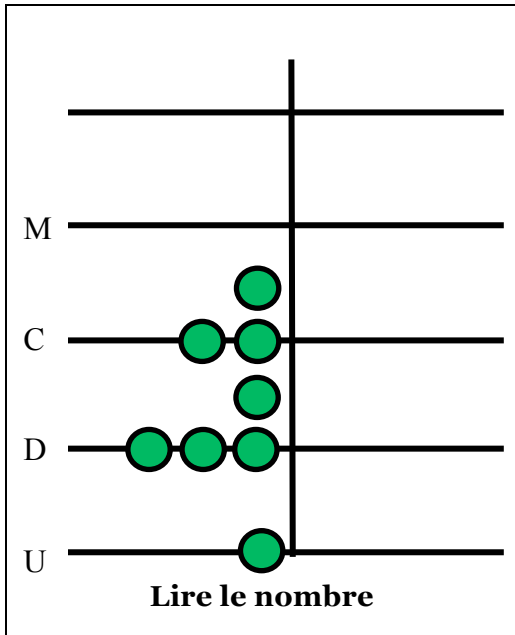
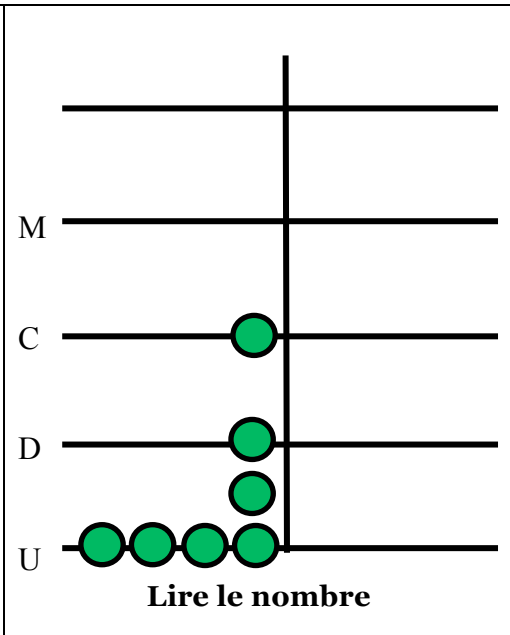
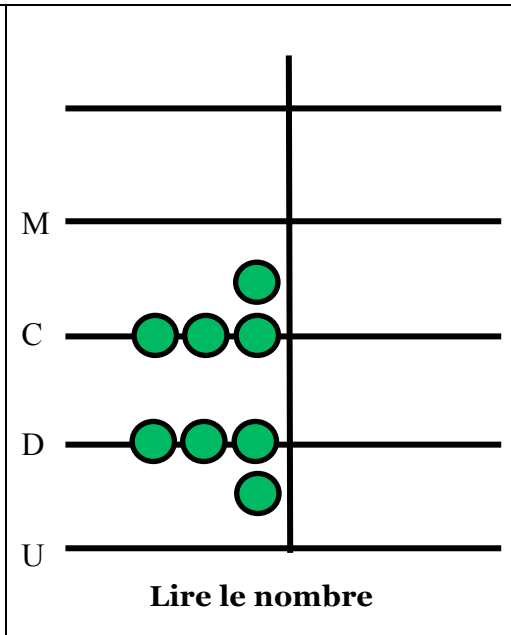
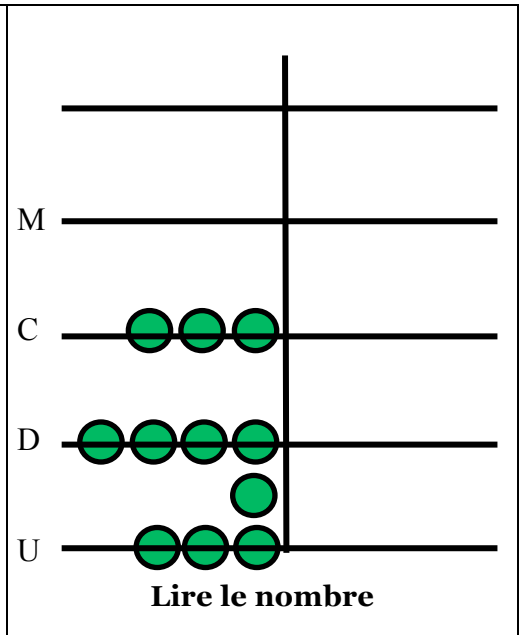
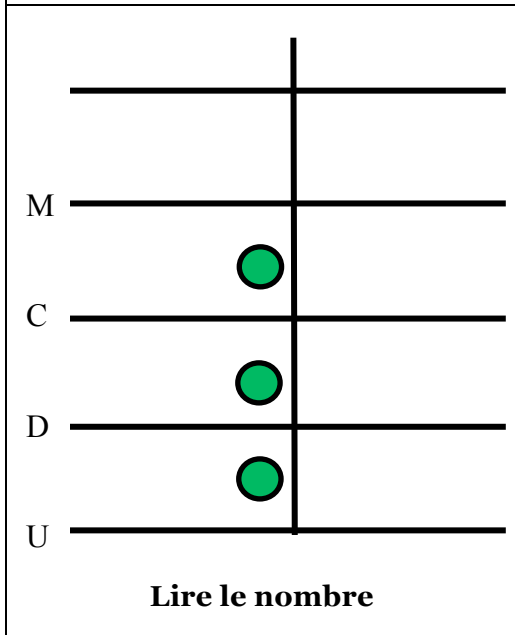
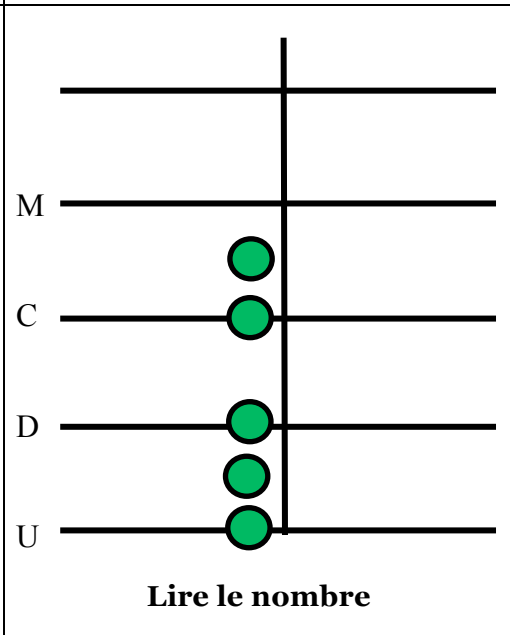
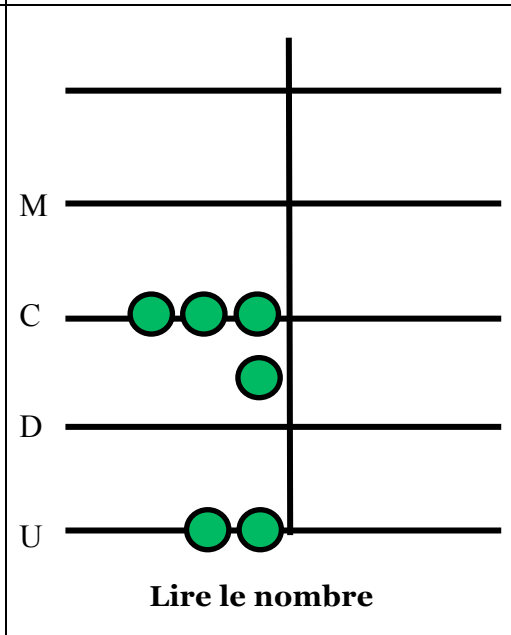
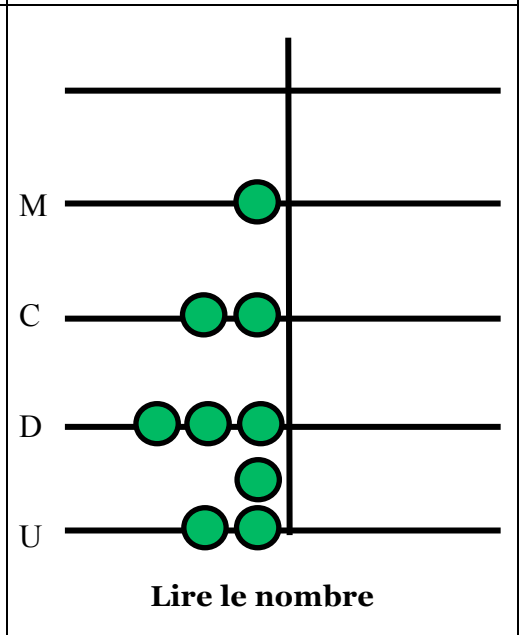
Lire le nombre

45 190 930

Lire le nombre

987 035

Lire le nombre

 <p>M</p> <p>C</p> <p>D</p> <p>U</p> <p>Lire le nombre</p>	 <p>M</p> <p>C</p> <p>D</p> <p>U</p> <p>Lire le nombre</p>	 <p>M</p> <p>C</p> <p>D</p> <p>U</p> <p>Lire le nombre</p>	 <p>M</p> <p>C</p> <p>D</p> <p>U</p> <p>Lire le nombre</p>
 <p>M</p> <p>C</p> <p>D</p> <p>U</p> <p>Lire le nombre</p>	 <p>M</p> <p>C</p> <p>D</p> <p>U</p> <p>Lire le nombre</p>	 <p>M</p> <p>C</p> <p>D</p> <p>U</p> <p>Lire le nombre</p>	 <p>M</p> <p>C</p> <p>D</p> <p>U</p> <p>Lire le nombre</p>

Règles du jeu

Ce qu'il faut faire :

 J'écris en chiffres le nombre représenté

 Je représente le nombre sur l'abaque

 Je lis le nombre représenté à voix haute

Sur la feuille de score :

Si je me trompe, je mets un rond : 

Si je donne une bonne réponse je mets une croix : 

Le gagnant est celui qui a le plus de  sur sa feuille de score.

Règles du jeu

Ce qu'il faut faire :

 J'écris en chiffres le nombre représenté

 Je représente le nombre sur l'abaque

 Je lis le nombre représenté à voix haute

Sur la feuille de score :

Si je me trompe, je mets un rond : 

Si je donne une bonne réponse je mets une croix : 

Le gagnant est celui qui a le plus de  sur sa feuille de score.

Compilation des réponses

Date :

Prénom du joueur :

Carte	○ ou ✕									
Rose										
Jaune										
Vert										

Total de ✕ :

Compilation des réponses

Date :

Prénom du joueur :

Carte	○ ou ✕									
Rose										
Jaune										
Vert										

Total de ✕ :

Compilation des réponses

Date :

Prénom du joueur :

Carte	○ ou ✕									
Rose										
Jaune										
Vert										

Total de ✕ :

Compilation des réponses

Date :

Prénom du joueur :

Carte	○ ou ✕									
Rose										
Jaune										
Vert										

Total de ✕ :

Annexe E :

Table de calcul pour le défi « table de calcul » proposé en séance 4a de la séquence 2 de calcul instrumenté.

<i>DEFI CALCUL</i> +	2325	658	800	99
328				
25				
1630				
1111				
754				

<i>DEFI CALCUL</i> +	2325	658	800	99
328	2653	986	1128	427
25	2350	683	825	124
1630	3955	2288	2430	1729
1111	3436	1769	1911	1210
754	3079	1412	1554	853

Résumé

Les instruments à calculer empruntés à l'histoire des mathématiques sont des outils efficaces pour remédier à des difficultés en numération. En effet, ils permettent de manipuler, de réaliser concrètement les groupements-échanges et donc de se représenter les principes de la numération décimale de position. Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé auprès de deux classes de cycle 3 dont la plupart des élèves manifestaient une pauvre construction du nombre ainsi que des représentations non-opérationnelles de la numération. Nous avons donc mis en place des activités de remédiation avec un abaque à lignes et présentons ici notre démarche ainsi que les effets observés.

Mots-clés : Abaque, numération, remédiation, cycle 3, enseignement des mathématiques.

Abstract

The calculating tools borrowed from the history of mathematics are effective in providing remediation to difficulties with numeration. In fact, they allow to manipulate, to realize concretely grouping and exchange, and to represent the principles of decimal positional numeration. The work presented in this document has been realized in two classes of key stage 2, where most of the pupils were showing a deficient construction of the concept of number, as well as non-operational representation of numeration. Consequently, we have set in place remediating activities with an abacus and we are here presenting our approach and the results observed.

Key words: Abacus, numeration, remediation, key stage 2, teaching of mathematics.