Chapitre II

Divisions dans $\mathbb{Z}$

1. Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$

a) Définitions

Tout au long du cours, lorsqu'on dira que des nombres sont des entiers, on considérera qu'il s'agit d'entiers relatifs, c'est-à-dire qu'ils sont éléments de $\mathbb{Z}$.

Définition

Soit a et b deux entiers.
On dit que b **divise** a (ou que b **est un diviseur** de a) s'il existe un unique entier k tel que $a = kb$.
On dit aussi que a **est un multiple** de b.

Notation : $b|a$.
Lecture : b divise a.

Si pour tout entier k, $a \neq kb$, alors b ne divise pas a et on note $b \nmid a$.

Exemples

- 54 est un multiple de 3, car $54 = 18 \times 3$.
- -8 est un diviseur de 72, car $72 = -8 \times (-9)$.
- $\forall k \in \mathbb{Z}, 7k \neq 22$, donc 7 n'est pas diviseur de 22.
- 0 ne divise aucun nombre sauf lui-même !
  - En effet, pour tout entier a différent de zéro et pour tout entier k, $k \times 0 \neq a$.
  - Mais, il existe par exemple $k = 5$ pour lequel $k \times 0 = 0$, ce qui prouve que 0 divise 0 !
- Tout nombre divise 0.
- 1 et -1 divisent tout entier.

Propriété

Soit n un entier naturel non nul.
Tout diviseur positif d de n est compris entre 1 et n.

Propriété

Soit a et b deux entiers.
On a les équivalences suivantes : $b|a \iff (-b)|a \iff b|(-a) \iff (-b)|(-a)$

Corollaire

- Les nombres entiers a et $-a$ ont les mêmes diviseurs dans $\mathbb{Z}$.

  Les diviseurs négatifs de a sont les opposés des diviseurs positifs de a. En conséquence, on se restreindra le plus souvent à l'étude de la divisibilité dans $\mathbb{N}$.

- Tout entier non nul n a un nombre **fini** de diviseurs.

Définition ▶ Notations :

$D_{\mathbb{N}}(a)$ désigne l'ensemble des diviseurs dans $\mathbb{N}$ de a.
$D_{\mathbb{Z}}(a)$ désigne l'ensemble des diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de a.

Exemples :

$D_{\mathbb{N}}(0) = \mathbb{N}$ $D_{\mathbb{Z}}(0) = \mathbb{Z}$	$D_{\mathbb{N}}(1) = \{1\}$ $D_{\mathbb{Z}}(1) = \{-1; 1\}$	$D_{\mathbb{N}}(5) = \{1; 5\}$ $D_{\mathbb{Z}}(5) = \{-5; -1; 1; 5\}$

Exercice associé : déterminer les diviseurs de 28 et 36 dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$

$D_{\mathbb{N}}(36) =$	$D_{\mathbb{N}}(28) =$
$D_{\mathbb{Z}}(36) =$	$D_{\mathbb{Z}}(28) =$

b) Autres propriétés fondamentales et très utilisées

Propriété

a, b et c sont des entiers.

Transitivité :

Si $a|b$ et $b|c$,

alors $a|c$

Combinaison linéaire :

Si $a|b$ et $a|c$,

alors $\forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}, a|(mb + nc)$

Démonstrations laissées en exercice :

. . . .

Corollaire

a, b et c sont des entiers ; m et n sont des éléments de $\mathbb{N}^*$.

Combinaisons linéaires :

Si $a\|b$ et $a\|c$, alors $a\|(b+c)$	Si $a\|b$ et $a\|c$, alors $a\|(b-c)$	Si $a\|b$ et $a\|c$, alors $a\|(b^m+c^n)$

Démonstrations laissées en exercice :
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

A titre d'exemple ▶ Utilisation des combinaisons linéaires

On souhaite déterminer l'ensemble des diviseurs communs de 2017 et 2021.

Soit d un diviseur commun de 2017 et de 2021. D'après le corollaire, $d|(2021-2017)$, donc d divise 4.

$$\text{Donc } d \in D_{\mathbb{Z}}(4) = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$$

Comme 2017 est impair (et aussi 2021), d ne peut pas être pair. Ni 2, ni -2, et encore moins 4 et -4 ne sont des diviseurs communs de 2017 et 2021. Par contre 1 et -1 divisent tous les nombres donc les seuls diviseurs communs de 2017 et de 2021 sont 1 et -1.

Recherche

Exercice 1 : Déterminer les entiers n, tels que $2n-3$ divise 14.

Exercice 2 : Déterminer les entiers, puis les entiers naturels n, tels que 7 divise $n+23$.

Exercice 3 : On cherche l'ensemble des entiers n tels que $n+1$ divise $n+13$.

1. Déterminer un nombre constant k, qui est une combinaison linéaire de $A = n+1$ et $N = n+13$.
2. Montrer que si $n+1$ divise $n+13$, alors $n+1$ divise k.
3. Donne l'ensemble des entiers tels que $n+1$ divise $n+13$.

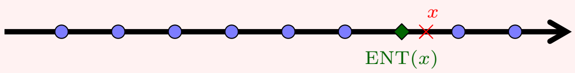
Exercice 4 : équation diophantienne
Déterminer les couples d'entiers naturels $(x; y)$ qui vérifient : $x^2 = 4y^2 + 21$.

Exercice 5 : raisonnement par récurrence
Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est divisible par 3.

2. Division euclidienne par un entier strictement positif

Définition ▶ Partie entière d'un nombre réel

La partie entière d'un réel x, notée $\text{ENT}(x)$, est le nombre entier précédent x.
Plus précisément, tout réel x est compris entre deux entiers consécutifs n au sens large et $n+1$ au sens strict, ce qui signifie que $n \leqslant x < n+1$; on a alors $\text{ENT}(x) = n$.



● *représente les entiers sur la droite graduée.*

Propriété ▶ Définition de la division euclidienne

Soient a un entier, et b un entier naturel non nul.
Il existe un unique couple d'entiers $(q;r)$ satisfaisant les deux conditions :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

L'entier q correspond à la partie entière de $\dfrac{a}{b}$.
Quand on a déterminé les nombres entiers q et r à partir des nombres entiers a et b, on dit qu'on a effectué **la division euclidienne de a par b**.
L'entier q s'appelle **le quotient** de la division euclidienne de a par b et r **le reste**.

Démonstration de l'existence
Soient a un entier, et b un entier naturel, b étant différent de zéro. Par définition de la partie entière, on a :

$$\begin{aligned}
\text{ENT}\left(\frac{a}{b}\right) &\leqslant \frac{a}{b} < \text{ENT}\left(\frac{a}{b}\right) + 1 \\
b \times \text{ENT}\left(\frac{a}{b}\right) &\leqslant a < b \times \text{ENT}\left(\frac{a}{b}\right) + b \quad \text{(en multipliant par b>0)} \\
0 \leqslant a - b \times \underbrace{\text{ENT}\left(\frac{a}{b}\right)}_{q} &< b \quad \text{en soustrayant à chaque membre } b \times \text{ENT}\left(\frac{a}{b}\right) \\
0 \leqslant \underbrace{a - bq}_{r} &< b
\end{aligned}$$

En posant $q = \text{ENT}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ et $r = a - bq$, on obtient un couple $(q;r)$ tel que :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$$

Recherche ▶ Division euclidienne à la main et à la calculatrice

Exercice 6 :

1. Déterminer à la main (comme à l'école primaire) la division euclidienne de 94 837 par 23.
2. En utilisant des instruction Python, déterminer la division euclidienne 598 578 641 par 91 875.
   Aide :
   pour deux entiers a et b,
   - ***a//b*** renvoie le quotient de la division euclidienne de a par b ; il ne faut pas confondre cette instruction avec ***a/b***, qui renvoie le résultat de la division décimale de a par b, éventuellement approché.
   - ***a%b*** renvoie le reste de la division euclidienne de a par b.

```
>>> 28//5
5
>>> 28/5
5.6
>>> 28%5
3
```

```
>>> 13//3
4
>>> 13/3
4.333333333333333
>>> 13%3
1
```

Propriété

Soient a un entier, b un entier naturel, $b \neq 0$.

b divise a si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Propriété

Soit b un entier naturel, $b \geq 2$.
Tout entier a s'écrit sous une, et une seule, des formes :

$$bq, bq+1, bq+2, \cdots\cdots, bq+(b-1), \text{ où } q \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration à chercher

....
....
....
....
....
....
....
....

A titre d'exemple

1. Tout nombre entier s'écrit de la forme $2k$ (nombres pairs) ou $2k+1$ (nombres impairs), avec k entier.
2. Tout nombre entier s'écrit sous une seule de ces formes :

$$5k \quad 5k+1 \quad 5k+2 \quad 5k+3 \quad 5k+4 \quad (k \text{ entier})$$

3. Soit $a = n(n+4)(n-4)$, où n est un entier.
   On souhaite établir que a est un multiple de 3, quelle que soit la valeur de n.

   On peut utiliser le **raisonnement par disjonction de cas** suivant : tout entier n s'écrit sous une et une seule des formes suivantes : $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$, où k est une entier.

   - s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k$: alors $a = 3k(n+4)(n-4) = 3 \times \underbrace{k(n+4)(n-4)}_{\in\mathbb{Z}}$, donc 3 divise a.
   - s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k+1$: alors $a = n(n+4)(3k+1-4) = n(n+4)(3k-3) = 3 \times \underbrace{n(n+4)(k-1)}_{\in\mathbb{Z}}$, donc 3 divise a.
   - s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k+2$: alors $a = n(3k+2+4)(n-4) = n(3k+6)(n-4) = 3 \times \underbrace{n(k+2)(n-4)}_{\in\mathbb{Z}}$, donc 3 divise a.

   Ce raisonnement justifie que quelque soit l'entier n, a est divisible par 3.

Recherche

Exercice 7 : La différence entre deux entiers naturels est 538. Si on divise l'un par l'autre, le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces deux entiers ?

Exercice 8 : Si on divise un entier A par 6, le reste est 4. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de A par 18 ?

Exercice 9 : Le reste de la division euclidienne de 1789 par l'entier naturel b est 497.
Déterminer les valeurs possibles de b et du quotient.

Exercice 10 : Soit n un entier non multiple de 5.
Démontrer que n^2 s'écrit sous l'une des formes $5k+1$ ou $5k-1$, avec k entier.
On pourra raisonner par disjonction de cas.

Algorithme et Python 1

Compléter la fonction Python ci-dessous qui détermine, pour un entier naturel n, la liste ordonnée de ses diviseurs naturels.

Algorithme en pseudo-code
Saisir un entier naturel n
$l \leftarrow [1;n]$
Pour d allant de 2 à $n-1$
Si . . . .
On ajoute d dans la liste l
Renvoyer la liste l rangée dans l'ordre croissant

Codage en Python

```
def liste_des_diviseurs(n) :
    l=[1,n]
    for d in range(2,n) :
        if ............  :
            l+=[d]
    return(sorted(l))
```

```
>>> liste_des_diviseurs(63)
[1, 3, 7, 9, 21, 63]
```

```
>>> liste_des_diviseurs(1024)
[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128
, 256, 512, 1024]
```

Remarque : Cette fonction peut aussi s'écrire comme ci-dessous ; on dit que la liste des diviseurs est obtenue « en compréhension ».

Codage en Python

```
def liste_des_diviseurs(n) :
    return [d for d in range(1,n+1) if .......]
```

Ce programme se trouve sur la plate-forme Jupyter.

3. Congruences modulo n

a) Entiers congrus modulo n

En guise d'explications

Lorsque la trotteuse d'une montre à aiguilles réalise un tour de 60 secondes, elle revient à son point de départ. Elle a effectué un cycle de 60 secondes. On ne peut pas pour autant dire que 60 est égal à 0 !
On dira que « 60 est congru à 0 modulo 60 » et on note :

$$\boxed{60 \equiv 0 \mod 60} \text{ ou } \boxed{60 \equiv 0 \quad (60)}$$

De même imaginons que nous sommes au mois d'avril, soit au 4ème mois de l'année. Pour savoir à quel mois nous serons dans 18 mois, on prendra en compte qu'une année correspond à un cycle de 12 mois. Tous les 12 mois on revient au mois initial.
Si on ajoute 18 mois au 4ème mois de l'année, on devrait se trouver au 22ème mois de l'année mais dans un cycle de 12 mois, on a :

$$\boxed{12 \equiv 0 \mod 12} \text{ ou } \boxed{12 \equiv 0 \quad (12)}$$

Et donc $22 \equiv 10 \quad (12)$; 18 mois après le mois d'avril, on se retrouve donc au 10ème mois de l'année suivante soit au mois d'octobre.

Exercice 11 :
Quel jour de la semaine sommes-nous 50 jours après le lundi de Pâques ?
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Et 500 jours après ?
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 12 :
Compléter les pointillés :

$$12 \equiv \dots\dots\dots \quad (10)$$
$$20 \equiv \dots\dots\dots \quad (8)$$
$$6 \equiv \dots\dots\dots \quad (7)$$
$$105 \equiv \dots\dots\dots \quad (26)$$
$$-15 \equiv \dots\dots\dots \quad (60)$$

$$-3 \equiv \dots\dots\dots \quad (12)$$
$$4 \times n \equiv \dots\dots\dots \quad (n)$$
$$2 \times n + 3 \equiv \dots\dots\dots \quad (n)$$
$$n^2 - 3n + 8 \equiv \dots\dots\dots \quad (n)$$
$$(-1)^n + 1 \equiv \dots\dots\dots \quad (2)$$

Définition

Si deux entiers a et b ont le même reste dans la division euclidienne par un entier $n \geqslant 2$, on dit que a et b sont congrus modulo n, et on note $a \equiv b\ [n]$.

Soit $n \geqslant 2$ un entier ; on a vu précédemment que tout entier a s'écrit de manière unique sous une des formes suivantes, où $k \in \mathbb{Z}$:

- kn (si dans la division euclidienne de a par n, il reste 0) ;
- $kn+1$ (si dans la division euclidienne de a par n, il reste 1) ;
- $kn+2$ (si dans la division euclidienne de a par n, il reste 2) ;

$\vdots$

- $kn+(n-1)$ (si dans la division euclidienne de a par n, il reste $n-1$).

On dit alors que tous les entiers s'écrivant de la forme

- kn sont congrus à 0 modulo n ;
- $(kn+1)$ sont congrus à 1 modulo n ;
- $(kn+2)$ sont congrus à 2 modulo n ;

$\vdots$

- $[kn+(n-1)]$ sont congrus à $n-1$ modulo n .

Par exemple, pour $n=7$: 1 ; 8 ; 15 ; 22 ainsi que -6 ; -13 ; -20 et -27 ont pour reste 1 dans la division euclidienne par 7 : on dit que tous ces entiers sont congrus modulo 7, et on note : $1 \equiv 8\ [7]$, $-20 \equiv 15\ [7]$, $22 \equiv -6\ [7]$, etc...

De même, 2 ; 9 ; 16 ; 23 ainsi que -5 ; -12 ; -19 et -26 ont pour reste 2 dans la division euclidienne par 7 : tous ces entiers sont congrus modulo 7, et on note : $2 \equiv 16\ [7]$, $-26 \equiv -19\ [7]$, $-12 \equiv 23\ [7]$, etc...

En revanche, 1 et 2 ne sont pas congrus modulo 7 ; par conséquent, aucun des entiers congrus à 1 modulo 7 n'est congru à un entier congru à 2 modulo 7 : -6 n'est pas congru à -12 modulo 7, 8 n'est pas congru à 23 modulo 7, etc...

Propriété

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$.
Tout entier a est congru modulo n à un et un seul de ces entiers :

$$0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ ...\ ;\ n-1.$$

Propriété ▶ Relation d'équivalence

Pour n'importe quel entier naturel $n \geqslant 2$, la congruence modulo n est une relation d'équivalence, c'est-à-dire qu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- **La réflexivité :** $\forall a \in \mathbb{Z}, a \equiv a\ [n]$.
- **La symétrie :** $\forall (a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$ si $a \equiv b\ [n]$,

  alors $b \equiv a\ [n]$.
- **La transitivité :** $\forall (a;b;c) \in \mathbb{Z}^3,$ si $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$,

  alors $a \equiv c\ [n]$.

Recherche

Exercice 13 :

- Donner des entiers congrus à 5 modulo 14 :
- Donner des entiers congrus à -7 modulo 9 :
- Donner des entiers congrus à 1 modulo 30 :

Exercice 14 : Le calendrier

1. En 2016, le 4 août était un jeudi. Quel jour de la semaine était le 28 août ?
2. En 2018, le 14 juillet était un samedi. Quel jour de la semaine était le 14 juillet 2019 ?
3. En 2018, le 14 juillet était un samedi. Quel jour de la semaine était le 14 juillet 2017 ?
4. En 2018, le 1$^{\text{er}}$ janvier était un lundi. Quel jour de la semaine était le dernier jour de l'année ?
5. En 2016, le 1$^{\text{er}}$ janvier était un vendredi. Quel jour de la semaine était le dernier jour de l'année 2016 ?

Propriété ▶ Lien entre congruence et divisibilité

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et soient a et b deux entiers.

$$\boxed{a \equiv b\ [n] \iff a - b \equiv 0\ [n]}$$

Exercice 15 : un exercice corrigé par une vidéo d'Yvan Monka.
Démontrer que $214 \equiv 25 \quad (9)$.

La correction d'Y. Monka se trouve ici.

b) Opérations compatibles avec la congruence

Propriété 1

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$, a, b, c et d des entiers relatifs vérifiant : $\begin{cases} a \equiv b\ [n] \\ c \equiv d\ [n] \end{cases}$

- La congruence modulo n est compatible avec l'addition : $a + c \equiv b + d\ [n]$.
- La congruence modulo n est compatible avec la multiplication : $a \times c \equiv b \times d\ [n]$.
- La congruence modulo n est compatible avec les puissances : $\forall k \in \mathbb{N}, a^k \equiv b^k\ [n]$.

A titre d'exemple

La propriété précédente va permettre de simplifier des expressions numériques ou littérales dans les congruences modulo un entier naturel.
Par exemple :

- $64 \equiv 1\ [9]$, donc pour tout entier naturel n, $64^n \equiv 1^n\ [9]$.
  Comme $1^n = 1$, toutes les puissances de 64 sont congrues à 1 modulo 9.
- Soient x et y deux entiers : on s'intéresse à l'expression $24x^2 + 15x - 7y$ modulo 6.
  $24 \equiv 0\ [6]$, $15 \equiv 3\ [6]$ et $7 \equiv 1\ [6]$: ainsi $24x^2 + 15x - 7y \equiv 3x - y\ [6]$.

1. Montrons que le produit de deux entiers consécutifs est divisible par 2 :

Soit n un entier ; l'entier suivant est $n+1$. Il s'agit de montrer que 2 divise $n(n+1)$, c'est-à-dire que $n(n+1) \equiv 0$ [2].

On raisonne par disjonction de cas :

- si $n \equiv 0\ [2]$:
  alors $n(n+1) \equiv 0(n+1)\ [2]$, donc on a $n(n+1) \equiv 0\ [2]$.
- si $n \equiv 1\ [2]$:
  alors $n+1 \equiv 1+1\ [2]$, et $2 \equiv 0\ [2]$, donc on a $n+1 \equiv 0\ [2]$.
  Ainsi $n(n+1) \equiv n \times 0\ [2]$, donc on a $n(n+1) \equiv 0\ [2]$.

Ceci justifie que le produit de deux entiers consécutifs est divisible par 2.

2. Déterminons le reste dans la division euclidienne de $5^{1\,789}$ par 3 :

   Observons tout d'abord ce qu'il en est des premières puissances de 5 :

   $$5^1 \equiv 2\ [3]\,;\ 5^2 \equiv 2^2\ [3],\text{ et } 4 \equiv 1\ [3] : \text{donc } 5^2 \equiv 1\ [3].$$

   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on alors $\left(5^2\right)^k \equiv 1^k\ [3]$, d'où : $5^{2k} \equiv 1\ [3]$; autrement dit, toutes les puissances paires de 5 sont congrus à 1 modulo 3.

   $1789 = 2 \times 894 + 1$: donc $5^{2\times 894} \equiv 1\ [3]$.
   Ainsi $5^{2\times 894} \times 5^1 \equiv 1 \times 5 \equiv 2\ [3]$.
   D'où $5^{2\times 894+1} \equiv 2$ [3], c'est-à-dire : $5^{1\,789} \equiv 2\ [3]$: dans la division euclidienne de $5^{1\,789}$ par 3, il reste 2.

3. Déterminons le chiffre des unités de $2\ 003^{2\ 003}$.

   Le chiffre des unités d'un entier est son reste modulo 10...
   Observons tout d'abord ce qu'il en est des premières puissances de $2\,003$:

   $$2\,003^1 \equiv 3\ [10]\,;\ 2\,003^2 \equiv 3^2 \equiv -1\ [10]\,;\ 2\,003^3 \equiv -1 \times 3 \equiv -3\ [10]\,;\ 2\,003^4 \equiv \left(2\,003^2\right)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1\ [10].$$

   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a alors $\left(2\,003^4\right)^k \equiv 1^k\ [10]$, d'où : $2\,003^{4k} \equiv 1\ [10]$.

   $2\,003 = 4 \times 500 + 3$: donc $2\,003^{4\times 500} \equiv 1\ [10]$.
   Ainsi $2\,003^{2\,003} \equiv 2\,003^{4\times 500+3} \equiv 2\,003^{4\times 500} \times 2\,003^3 \equiv 1 \times (-3) \equiv 7\ [10]$.
   Le chiffre des unités de $2\,003^{2\,003}$ est 7.

Développer les automatismes avec Labomep/wim's

Exercice 16 Appliquer les règles de calcul sur les congruences

1. La congruence est compatible avec l'addition
2. La congruence est compatible avec la multiplication
3. La congruence est compatible avec les puissances
4. La congruence est compatible avec les combinaisons linéaires

Somme Produit Puissance Combinaison linéaire

Recherche

Exercice 17 : Démontrer que le produit de trois entiers consécutifs est divisible par 3.

Exercice 18 :

1. Démontrer, par disjonction de cas *, que pour tout entier naturel n, $3n^3 + 5n + 1$ est impair.
2. En déduire que ce nombre n'est jamais divisible par $n(n+1)$.

* On pourra distinguer les 2 cas : n pair et n impair.

Exercice 19 :
Pour un entier n quelconque, on pose :

$$\mathrm{A}(n) = n^4 + 1.$$

Etablir que, pour tout entier n, $\mathrm{A}(n)$ n'est un pas multiple de 3.

Exercice 20 : Soit n un entier. On pose :

$$h(n) = (n-11)(n-22)(n-33).$$

Etablir que $h(n)$ est un multiple de 3 pour tout entier n.

Exercice 21 : On donne $a \equiv 6$ [11] et $b \equiv 5$ [11].

1. Déterminer le reste de la division par 11 de :

   a) $-5a$
   b) $2a + 3b$
   c) $a^2 + b^2$
   d) $2a^2 - 3b$
   e) ab
   f) $-2b^3$

2. Démontrer que $a^2 - b^2$ est divisible par 11.

Exercice 22 : Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des nombres suivants :

a) 50^{100}
b) 100
c) 100^3
d) $50^{100} + 100^{100}$

Exercice 23 : Quel est le chiffre des unités de $503^{1\,089}$?

Exercice 24 : Quel est le chiffre des unités de $2\,002^{2\,002}$?

Exercice 25 : Discuter, en fonction des différentes valeurs de l'entier naturel n, des restes de la division euclidienne de 2^n par 7.

Algorithme et Python

Soit n un entier supérieur à 2 : compléter la fonction Python ci-dessous qui renvoie, s'il existe, l'inverse modulo n d'un entier a (on admet que s'il existe, cet inverse est unique modulo n).

Algorithme en pseudo-code
Saisir un entier naturel n
Saisir un entier a
Pour i allant de 1 à $n-1$
Si . . . .
Renvoyer i

Codage en Python

```
def inverse_de_a_mod_n(a,n) :
    for i in range(1,n) :
        if ............ :
            return(i)
```

```
>>> inverse_de_a_mod_n(5,8)
5

>>> inverse_de_a_mod_n(8,11)
7
```

```
>>> inverse_de_a_mod_n(6,8)

>>> inverse_de_a_mod_n(11,8)
3
```

Ce programme se trouve sur la plate-forme Jupyter.

c) Résolution d'équation

Recherche ▶ Exercices avec corrigés en vidéos

Cette sous partie sera abordée par la résolution d'exercices. on peut commencer par étudier des exercices pour lesquels des corrections sont données en vidéos :

Exercice 26
Déterminer les entiers x tels que : $6 + x \equiv 5 \quad [3]$ Une correction.

Exercice 27
Déterminer les entiers x tels que : $3x \equiv 5 \quad [4]$ Une correction.

Exercice 26 **Exercice 27**

Recherche

Exercice 28 :

1. a) Compléter le tableau ci-dessous :

x	0	1	2	3	4	5	6
reste de $3x$ modulo 7							

   b) Trouver un entier m tel que $3m \equiv 1[7]$.
   On dit que ce nombre m est un inverse de 3 modulo 7, car $3 \times m$ est congru à 1 modulo 7.

c) Résoudre l'équation $3x \equiv 4$ [7].

2. Résoudre l'équation $5x \equiv 2$ [9].

3. Résoudre l'équation $12x \equiv 3$ [5].

4. Résoudre l'équation $3x \equiv 2$ [6].

5. Résoudre l'équation $2x \equiv 4$ [6].

Exercice 29 **:** On considère l'équation diophantienne (E) : $4x^2 + 3y^2 = 11$, où l'inconnue est le couple d'entiers $(x; y)$.

1. Montrer que si $(x; y)$ est un couple-solution, alors $4x^2 \equiv 2$ [3].

2. Résoudre l'équation (E).

Exercice 30 **Des questions classiques pour faire le bilan.**