Abaque de Gerbert en CE2 et en CM1

Alain Busser

8 juin 2024

1 Repères historiques

Des environs de l'an mil, on ne connaît actuellement que trois documents ayant trait à l'abaque de Gerbert :

- une lettre de Gerbert d'Aurillac portant sur la multiplication, et plus particulièrement sur les ordres de grandeurs (par exemple il y est précisé qu'en multipliant des dizaines par des dizaines, on obtient des centaines),
- un manuscrit de Richer de Reims, ancien élève de Gerbert devenu historien, et qui évoque les détails matériels de l'abaque (par exemple pour les nombres entiers, l'abaque comportait 27 colonnes [1]),
- un manuscrit de Bernelin de Paris, ancien élève de Gerbert, expliquant comment effectuer les multiplications (une page) et les divisions (des dizaines de pages) avec l'abaque de Gerbert.

Notons que l'idée de représenter les nombres négatifs par une autre couleur, qu'on verra plus bas, n'est pas de Gerbert (d'ailleurs Gerbert ne s'en servait pas, il soustrayait mentalement semble-t-il) date de l'an 263 avec un texte de Liu Hui [2].
Du peu de documentation dont on dispose par des contemporains de Gerbert, on ne peut pas déduire grand-chose sur la manière exacte dont ils se servaient de l'abaque (par exemple on ignore totalement comment ils effectuaient les additions et soustractions) :

- L'accent était mis sur les multiplications de deux nombres d'un chiffre non nul (exemple 30×200) et la grande taille de l'abaque permettait de ramener les multiplications de nombres à plusieurs chiffres, à un grand nombre de multiplications faciles de ce genre.
- Bernelin n'utilisait pas le mot « fois » pour énoncer les tables de multiplication, mais des mots comme double, triple etc.
- Pour la multiplication, l'usage était apparemment de disposer les deux nombres à multiplier en dehors de l'abaque (le multiplicande au-dessus de l'abaque, le multiplicateur en-dessous de l'abaque). Cette disposition permet de présenter la division comme une multiplication à trou et facilite son calcul.

Ainsi, l'abaque de Gerbert est composé de trois zones, qu'on peut appeler toit, maison et sous-sol, le tableau dans lequel on effectue les calculs étant la maison : on y ajoute, enlève et déplace des jetons. Par exemple pour poser 18×37 on pose 18 dans le toit et 37 au sous-sol :

				1	8
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				3	7

2 Multiplication en CE 2

2.1 Avec le nomogramme

Les erreurs de lecture sur le nomogramme dépassent rarement l'unité. Par exemple

- $3 \times 8 = 25$
- $4 \times 7 = 27$
- $4 \times 9 = 35$

1. Le plus grand nombre représentable sur l'abaque historique de Gerbert est donc 999999999999999999999999999. Comment s'appelle-t-il ?
2. Voir https ://iremi.univ-reunion.fr/IMG/pdf/liudun33.pdf

- $6 \times 8 = 47$

Ces erreurs sont faciles à corriger à condition qu'on les détecte. Pour cela, on doit tenir compte du fait qu'en multipliant un entier par un nombre pair, le produit est pair. Les élèves sont appliqués lorsqu'ils utilisent le nomogramme, mais ils ne semblent pas connaître ce critère de parité.

2.2 Par addition itérée

L'abaque de Gerbert permet aussi d'effectuer les multiplications par addition itérée. Par exemple pour effectuer 6×30 on peut faire :

					6
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				3	
				3	
				3	
				3	
				3	
				3	
				3	

qui, par simplifications successives, donne

					6
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				6	
				3	
				3	
				3	
				3	
				3	

puis

					6
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				9	
				3	
				3	
				3	
				3	

puis

					6
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			1	2 3 3	
				3	

puis

					6
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			1	5 3	
				3	

et enfin

					6
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			1	8	
				3	

Mais comme il y a plusieurs étapes, il y a plus de risques d'erreur, qu'avec l'utilisation directe des tables de multiplication : on commence par regarder sur le nomogramme combien font 6×3, puis on pose sur l'abaque de Gerbert :

					6
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				1	8
					3

Ensuite, on dit que 30, c'est 3 dizaines, et on

- décale le jeton 3 d'une colonne vers la gauche,
- décale aussi les deux jetons 1 8 d'une colonne vers la gauche :

					6
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			1	8	
				3	

6×30, c'est 6×3 dizaines, soit 18 dizaines ou 180 (une centaine et 8 dizaines sur l'abaque).

2.3 Par un nombre d'un chiffre non nul

Comme on l'a évoqué plus haut, avec Gerbert, on apprenait à calculer 60×30 avant d'apprendre à calculer 12×7. L'idée est que si on sait effectuer des multiplications comme 60×30 alors on sait effectuer n'importe quelle multiplication, l'algorithme de Gerbert permettant de se ramener à des multiplications de nombres à un seul chiffre non nul. On a testé la progression suivante :

1. Poser et calculer 6×3 :

					6
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				1	8
					3

   (on n'a pas utilisé l'abaque pour trouver 18 ; soit on le savait, soit on a utilisé le nomogramme, soit on a effectué une addition itérée parmi 3+3+3+3+3+3 et 6+6+6)

2. En déduire 60×3 :

				6	
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			1	8	
					3

   Le geste de glisser les jetons 1 et 8 d'une case vers la gauche, est facile parce que ce sont des jetons et que l'abaque est plastifié. On peut les bouger simultanément à l'aide de l'index et du majeur de la main droite par exemple, et on peut même accomplir ce geste en même temps qu'on glisse le 6 lui aussi d'une colonne vers la gauche, par exemple avec l'index de la main gauche. L'abaque de Gerbert est typique d'un enseignement kinesthésique du calcul, parce que justement il n'est pas du calcul posé.

3. En déduire 60×30 :

				6	
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
		1	8		
				3	

L'écriture $6d \times 3d = 18c$ a été rappelée au tableau, tant en CE2 qu'en CM1, et il est clair que ce genre de raisonnement est régulièrement pratiqué dans ces classes, sans que tous les élèves le maîtrisent (y compris en fin de CM1) ni voient le lien avec la manipulation sur l'abaque de Gerbert.

Ensuite (et pour finir compte-tenu de l'heure), a été demandée la multiplication 66×30. Or il y a plusieurs manières de réinvestir ce qu'on vient de voir, pour cela :

- Comme on a déjà 60×30 sur l'abaque de Gerbert, il suffit d'y ajouter 6×30 :

				6	6
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
		1	8 1	8	
				3	

- On peut aussi solliciter le savoir en cours d'acquisition, selon lequel $66 \times 30 = 660 \times 3$ (on décale simultanément le multiplicande vers la gauche et le multiplicateur vers la droite) :

			6	6	
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
		1	8 1	8	
					3

Dans les deux cas, il y a eu un fort taux d'erreurs, aboutissant à un résultat de 1818 ou 360 au lieu de 1980.

3 En CM1

3.1 Multiplication

3.1.1 Avec le nomogramme

En fin de CM1, la connaissance par cœur des tables de multiplication est encore en cours d'acquisition (en fait la majorité des élèves ne savent pas par cœur combien font 6×8 par exemple). Pour plusieurs élèves, le nomogramme est vu comme une aide à la mémorisation des tables de multiplication (ou un prétexte pour ne pas les apprendre ?) et tous ont beaucoup apprécié le fait de pouvoir garder le nomogramme jusqu'au collège.

3.1.2 Avec l'abaque

Certains élèves connaissaient l'abaque depuis la classe de CE2, mais pas tous. On a donc commencé par des multiplications de nombres à un chiffre non nul, comme

- 20×30

				2	
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			6		
				3	

- 40×50

				4	
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
		2			
				5	

Puis on est passé à des multiplications dont un seul facteur a un chiffre non nul, comme

- 15×20

				1	5
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			2 1		
				2	

- 25×40

				2	5
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			8 2		
				4	

Ces opérations se sont avérées plus difficiles dans une des classes de CM1, les élèves ne faisant pas systématiquement le passage de 15×20 à $10 \times 20 + 5 \times 20$.
Enfin on est passé à des multiplications de nombres à deux chiffres, pour comparer avec le calcul posé. Par exemple avec 23×34 la multiplication produit ces quatre termes à additionner :

				2	3
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			6		
				9	
				8	
				1	2
				3	4

L'ordre dans lequel ont été placés les termes importe peu sur le résultat (l'addition est commutative) mais les erreurs sur le placement horizontal induisent des résultats faux pour l'addition. D'ailleurs le fait d'additionner en commençant par la gauche permet d'avoir rapidement un ordre de grandeur du résultat. Par exemple en commençant par un groupement-échange sur les jetons 1 et 9 de la colonne des dizaines on arrive à

				2	3
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			6		
			1		
				8	
					2
				3	4

qui donne rapidement le résultat de la multiplication :

				2	3
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			7	8	2
				3	4

3.1.3 Analyse d'erreurs

La multiplication 35×25 a ensuite été demandée. Un exemple de calcul correct est celui-ci (on a commencé par la droite) :

				3	5
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				2	5
			1		
			1	5	
			6		
				2	5

Des élèves (un binôme) sont arrivés à ceci, probablement par oubli de certains jetons :

				3	5
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
					5
			1		
			1		
			6		
				2	5

Il semble qu'ils ont essayé d'imiter un calcul posé. C'était une erreur de donner les jetons des deux couleurs pour la multiplication, en effet les jetons rouges ont une signification que l'on verra plus bas (soustraction).

Ensuite on a demandé aux élèves d'effectuer la multiplication 102×23 pour les habituer à l'absence de jeton 0 qui n'existe pas parce qu'on n'en a pas besoin.
Il y a eu des résultats corrects :

			1		2
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
		2	3	4	6
				2	3

Ce calcul en cours est intéressant parce qu'il montre l'ordre dans lequel les produits partiels sont effectués (le 4 est placé en dernier) :

			1		2
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
					6
			3		
		2			
				2	3

Ici il y a carrément eu oubli de certains produits partiels :

			1		2
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			3		6
				2	3

Et ici, il semble que les élèves aient additionné les centaines avec les unités pour multiplier 23 par la somme 1+2=3 :

			1		2
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				6	9
				2	3

3.2 Division

C'est ici qu'on voit pourquoi on met les facteurs en-dehors de l'abaque : une division est une multiplication à trous. On place donc le produit connu (le dividende) dans l'abaque, le facteur connu (le diviseur) dans le toit, et le facteur inconnu (le quotient) apparaîtra progressivement dans le sous-sol.

3.2.1 Par un diviseur d'un chiffre

Par exemple, si on veut diviser 56 par 3, on veut savoir, en fait, quel nombre a un triple égal à 56. Calculer le quotient de 56 par 3, c'est remplir $3 \times ? = 56$. On met donc 56 dans l'abaque et 3 au-dessus de l'abaque :

					3
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				5	6

Pour effectuer la division,

- on commence par diviser 5 (le jeton le plus à gauche) par 3. Le quotient est 1 mais en fait, c'est 50 qu'on divise par 3 donc le quotient est 10 (5 dizaines divisées par 3, c'est 1 dizaine)

					3
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				5	6
				1	

- Mais le nombre 30 est présent deux fois dans l'abaque, une première sous la forme 3×10 codé entre le sous-sol et le toit, et l'autre dans le nombre 50 qu'on a divisé par 3. Il va falloir supprimer cette redondance, et tout d'abord la coder, en rouge (couleur qui représente les quantités négatives). $10 \times 3 = 30$:

					3
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				5 3	6
				1	

- La règle de simplification (en fait ce sont des soustractions) est **si deux jetons de couleur différente sont dans une même colonne, ils se neutralisent mutuellement et on peut les enlever**. On prépare donc cela, en remplaçant le 5 par un 2 et un 3 :

					3
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				2 3 3	6
				1	

- On enlève les deux jetons qui sont opposés, et à ce stade il reste 26 à diviser par 3 :

					3
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				2	6
				1	

- Une rapide manip sur le nomogramme permet de se rappeler que $8 \times 3 = 24$ qui est à peine plus petit que 26 (le suivant de la table de 3 est 27 qui est trop grand), on ajoute donc un 8 en bas, dans la colonne des unités :

					3
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				2	6
				1	8

- Mais à nouveau il y a une redondance, le produit de 8 par 3, implicite entre le sous-sol et le toit, est à soustraire de 26 :

					3
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				2 2	6 4
				1	8

- La colonne des dizaines est virtuellement déjà vide, puisqu'il y a des jetons de couleur différente mais de même valeur, qui se neutralisent mutuellement :

					3
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
					6 4
				1	8

- Pour la colonne des unités, on peut effectuer directement la soustraction, ou comme précédemment casser le 6 en 2 et 4 :

					3
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
					2 4 4
				1	8

- La division est maintenant terminée, on constate que l'abaque n'est pas entièrement vide, il y a un reste (2) et le quotient est 18 :

					3
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
					2
				1	8

En effet si on calcule (par exemple sur l'abaque de Gerbert) 18×3 on ne trouve pas 56 mais 54 : il reste 2.
Gerbert appelait *division d'or* cette façon d'effectuer une division [3].
Après avoir divisé 56 par 3, on a divisé 156 par 3. En partant de

3. Voir https ://iremi.univ-reunion.fr/spip.php ?article1141

					3
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			1	5	6

on arrive à

					3
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				5	2

ce qui veut dire que $52 \times 3 = 156$ et que la division n'a pas de reste.
La division de 108 par 4 est intéressante car elle peut se faire de plusieurs manières.

1. On peut faire comme précédemment,
   - en commençant par diviser 10 par 4 (on ne peut pas diviser 1 par 4) :

					4
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			1		8
				2	

   (comme 10 divisé par 4 donne 2 avec un reste 2, 10 dizaines divisées par 4 donnent 2 dizaines avec un reste de 2 dizaines),
   - puis en codant le produit partiel $20 \times 4 = 80$ en rouge :

					4
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			1	8	8
				2	

- puis en cassant la centaine en 2 dizaines et 8 dizaines pour la simplification :

					4
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				2 8 8	8
				2	

- Il reste alors 28 à diviser par 4 ce qui finit rapidement la division :

					4
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				2	8
				2	

- en effet $4 \times 7 = 28$:

					4
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				2 2	8 8
				2	7

2. Mais on pouvait aussi directement diviser 100 par 4 (les élèves de CM1 sont censés savoir que ça fait 25) :

					4
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			1 1		8
				2	5

Il ne reste alors plus qu'à diviser 8 par 4 :

					4
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
					8 8
				2	5 2

On a également divisé 102 par 9 :

					9
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			1		2

- Comme on ne peut pas partager 1 en 9, on ne peut pas directement partager 1 centaine en 9. Mais on peut partager 10 dizaines en 9 parce qu'on peut partager 10 en 9 (1 part chacun, il reste une part) :

					9
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			1		2
				1	

- Une dizaine fois 9, cela fait 9 dizaines :

					9
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			1	9	2
				1	

- Comme il n'y a rien en vis-à-vis du jeton rouge, on casse la centaine en 1 dizaine et 9 dizaines :

					9
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				1 9 9	2
				1	

- Une fois la simplification des dizaines effectuée, il ne reste plus qu'à diviser 12 par 9 :

					9
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				1	2
				1	

- Là encore le quotient est 1 mais ce n'est plus une dizaine, c'est une unité :

					9
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				1	2 9
				1	1

- On peut casser la dizaine en 1 et 9 ou directement casser la douzaine en 3 et 9 :

					9
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
					3 9 9
				1	1

Les élèves ont choisi de casser la dizaine ou la douzaine, selon leur connaissance des décompositions additives.

Après simplification, on a le quotient 11 et le reste 3. On peut vérifier que $11 \times 9 = 99$ et que $99 + 3 = 102$.
Ensuite on a divisé 120 par 9 :

					9
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			1	2	

- Le début ressemble beaucoup à ce qu'on a vu dans la division précédente : 12 dizaines peuvent être partagées en 9 fois 1 dizaine :

					9
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				3 9 9	
				1	

- Il reste alors 30 à diviser par 9. Les élèves ne connaissent pas encore la table de 9 mais ils connaissent celle de 3 et ont le nomogramme pour vérifier que $9 \times 3 = 27$. Le quotient de 30 par 9 est donc 3 :

					9
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				3 2	7
				1	3

- Si on casse les 3 dizaines en 1 dizaine et 2 dizaines on simplifie la colonne des dizaines. Ensuite la dizaine restante peut être cassée en 3 et 7 unités :

					9
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
					3 7 7
				1	3

On a alors le quotient 13 et le reste 3.

4 Conclusion

Le programme insiste beaucoup (par exemple pour la résolution de problèmes) sur la compétence *représenter*, or le nomogramme permet de représenter sur un même graphique toutes les tables de multiplication. C'est donc un outil intéressant à expérimenter pendant l'apprentissage des tables de multiplication. De toute manière effectuer des mesures est une activité que beaucoup d'élèves adorent et on dispose peut-être là d'un levier de réconciliation.
La multiplication avec l'abaque de Gerbert soulage la charge cognitive (il n'y a pas de retenue, on a beaucoup de produits partiels mais ils sont simples) et lorsque les élèves comprennent pourquoi la multiplication posée donne le même résultat, leur compréhension du sens de la multiplication et de l'algorithme enseigné s'est considérablement agrandie. De surcroît, l'abaque est un outil de manipulation, et est adapté aux élèves mobilisant surtout le canal kinesthésique. L'abaque de Gerbert s'inscrit donc pleinement dans le triptyque *manipuler-verbaliser-abstraite* de la méthode dite « de Singapour ».
La division avec l'abaque de Gerbert semble bien marcher même chez des élèves ayant déjà commencé à découvrir la division posée. Elle est d'emblée décrite comme une multiplication à trou (lorsque je partage 32 cartes entre 4 joueurs, je trouve que chaque joueur a 8 cartes, parce que $8 \times 4 = 32$). La principale difficulté liée à cette « division d'or » est le manque de maîtrise de la soustraction en CM1. La division avec l'abaque de Gerbert (qu'on peut aborder avant la division posée) marche bien, mais marcherait encore mieux si elle était précédée d'une initiation à la soustraction, avec l'usage des jetons de deux couleurs. C'était d'ailleurs une erreur de mélanger les jetons des deux couleurs, il aurait fallu n'utiliser dans un premier temps, que les jetons noirs. Bref, le besoin se fait sentir d'une progression pluriannuelle basée sur l'abaque de Gerbert, menée en parallèle avec l'apprentissage du calcul posé, et allant jusqu'aux décimaux (quand on sait que pour multiplier par cent on décale les jetons de deux colonnes vers la gauche, on devine aisément comment on divise par cent).

Laetitia Bègue (école Aristide Briand)
Coralie Besset (école Aristide Briand)
Gilles Lebon (école Aristide Briand)
Julien Bominthe (lycée Roland Garros)
Alain Busser (lycée Roland Garros)
Patrick Schilli (lycée Roland Garros)