Construire le sens de la division par le partage de billets

L'algorithme de la division est souvent difficile à comprendre pour les élèves car il n'a aucun sens pour eux.
Pour leur enseigner cet algorithme, nous avons voulu le raccrocher à une situation « clef » qui leur soit parlante : le partage d'un trésor. Nous nous sommes ainsi largement inspirées des activités prônées par ERMEL, ou par R. Brissiaud dans le manuel « J'apprends les Maths ».

Nous avons programmé une activité filée sur plusieurs semaines, afin de laisser aux élèves le temps de digérer cet algorithme. Nous faisions une séance « division » par semaine.

Pour cette activité, il faut une très grande quantité de billets. Le mieux est de les fabriquer en imprimant les valeurs sur des papiers de couleurs différentes, et de les plastifier pour faciliter la préhension. L'idéal pour une classe de 24 élèves est d'avoir environ 50 billets de 1000€, 200 billets de 100€, 200 billets de 10€ et 200 pièces de 1€... Mais pour les pièces il vaut mieux acheter les petites pièces en plastique du commerce !

Séance 1 : définition des conditions du partage

La première séance a pour but d'habituer les élèves à la manipulation des billets et de faire comprendre la notion de division euclidienne. L'énoncé était le suivant : « Vous êtes 4 pirates et vous avez trouvé un trésor d'une valeur de 403€. Vous voulez le partager en appliquant les conditions suivantes :

- Le partage doit être équitable
- Il n'existe dans la banque des pirates que des billets de 1000€, 100€, 10 € et des pièces de 1€
- Lors du partage, il est possible d'échanger les billets de la manière suivante : 1 billet de 1000€ contre 10 billets de 100€, 1 billet de 100€ contre 10 billets de 10€, 1 billet de 10€ contre 10 pièces de 1€
- Vous devez recevoir la plus grande somme d'argent possible, et s'il reste de l'argent, vous le donnerez au capitaine »

On demande aux élèves de se placer par groupes de 4, et on leur distribue leur « trésor », à savoir 4 billets de 100€ et 3 pièces de 1€. Si l'effectif des élèves n'est pas 4, demander d'imaginer des élèves fictifs, représentés par les chaises par exemple...

Les élèves font leur « partage »... Qui n'est souvent pas équitable : lors de la mise en commun, on insiste sur ce que cela signifie. Ils sont souvent gênés par les 3 pièces, veulent absolument les distribuer, et donc « lèsent » un de leur camarade...
On met en évidence « ce que chacun reçoit » et « le reste ».

Séance 2 : introduction du vocabulaire de la division euclidienne, unicité du résultat

On passe ensuite au deuxième partage : le trésor vaut 648€. On peut écrire au tableau 648 : 4 ?
Ici ils vont devoir échanger 2 billets de 100€ contre 20 billets de 10€...
À l'issue de ce partage, on peut introduire le vocabulaire de la division euclidienne : le quotient, q, c'est ce que chacun reçoit, et le reste, r, c'est ce qui reste. Ces résultats doivent vérifier $4 \times q + r = 648$.
On met en évidence le fait que ce calcul produit 2 résultats, le quotient et le reste, c'est pour quoi on a écrit un « ? » et non un « = » après 648:4...
Ici on obtient $q=162$ et $r=0$.

Si l'un des groupes fait une erreur de partage, on peut s'en servir pour illustrer la division euclidienne et le fait que le reste doit toujours être inférieur eu diviseur. Par exemple il se peut qu'un groupe n'ait pas pensé à échanger les billets, il trouve alors q= 112 et r=200. Le calcul $4 \times q + r$ donne pourtant bien 648 ! Alors qui a raison ? Reprendre les conditions du problème et noter que la dernière ligne précise qu'on doit avoir la plus grande somme possible.
On peut alors faire expliciter les restes possibles dans une division euclidienne par 4, à savoir 3,2,1 ou 0...

Séance 3 : entraînement avec des divisions par 4

Toujours par groupes de 4 : distribuer les billets aux élèves afin qu'ils réalisent leur partage... Par exemple pour les divisions euclidiennes suivantes :
3025 : 4 ? (q=756 , r = 1)
5103 : 4 ? (q = 1275 , r 3)

Séance 4 : changement de diviseur

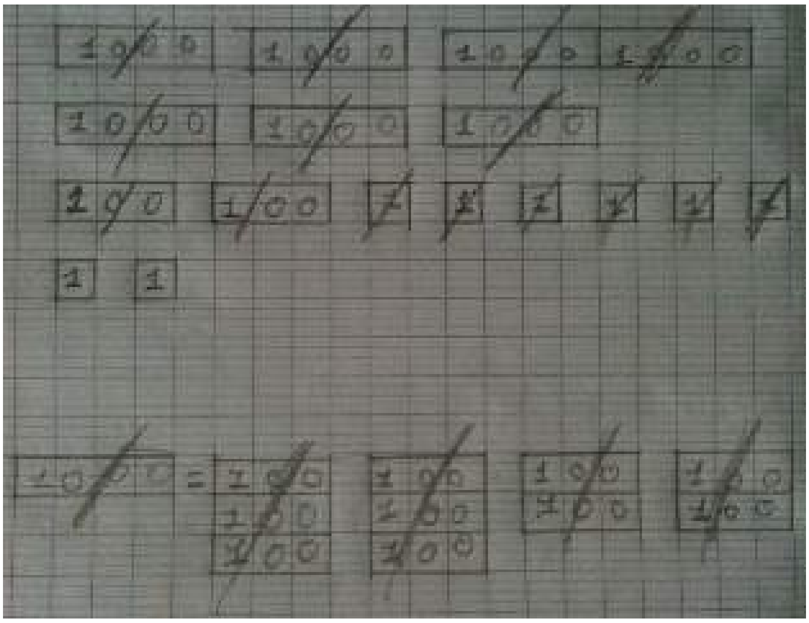
Écrire le problème « 5662 : 5 ? »
Laisser volontairement les élèves se placer par 4... Certains vont spontanément partager en 4. On aura ainsi 2 résultats potentiellement justes :
q = 1134 , r = 2 qui vérifie $5 \times q + r = 5662$
q = 1415, r = 2 qui vérifie $4 \times q + r = 5662$

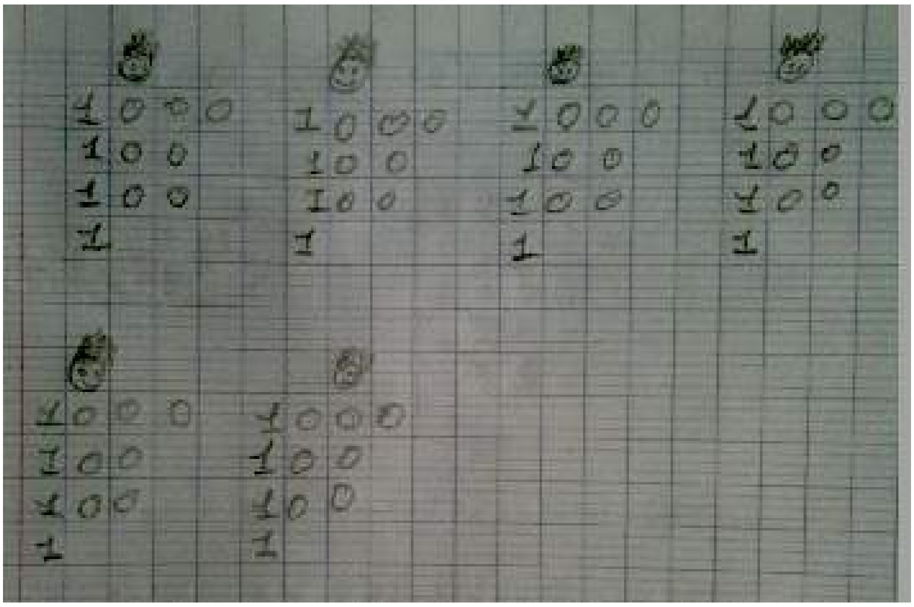
Demander aux élèves de vérifier les résultats et de trouver le bon...
Cette séance permet de « casser » le schéma du partage en 4 : désormais il faudra faire attention en combien on partage !!!

Application : 1273 : 6 ? (q = 212, r = 1)

Séance 5 : Sans les billets...

On écrit le problème « 7 208 : 6 ? » mais on précise que cette fois ci on n'a plus les billets. On invite les élèves à résoudre le problème d'une autre manière.
Si certains n'ont pas d'idée, on peut les guider vers une schématisation, illustrant le partage des billets (on les « barre » quand on les donne ») et les échanges (on barre un billet de 100€ et on dessine 10 billets de 10€ par exemple). Il est aussi judicieux de dessiner le bon nombre de petits « bonhommes »...
Exemples de productions d'élèves :



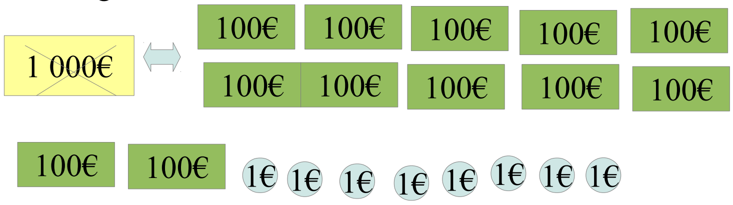

1000
100
100
1
1000
100
100
1
1000
100
100
1
1000
100
100
1
1000
100
100
1
1000
100
100
1

Séance 6 : vers l'algorithme de la division euclidienne posée...

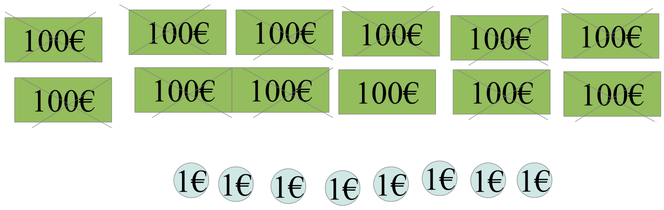
À ce stade, certains élèves sont tout à fait capables de comprendre la division posée.
Nous préconisons d'écrire au dividende « MCDU » au dessus des chiffres pour indiquer leur valeur.
L'idéal est de traiter en parallèle la division en dessinant les billets, et en posant l'opération.

Exemple pour 7 208 : 6 ?

On dessine les billets : 1 000€ 1 000€ 1 000€ 1 000€ 1 000€ 1 000€ 1 000€ 100€ 100€ 1€ 1€ 1€ 1€ 1€ 1€ 1€ 1€	On dessine la potence et on indique la valeur des chiffres : M C D U 7 2 0 8 | 6
On dessine 6 bonhommes et on partage les billets de 1 000€ : ~~1 000€~~ ~~1 000€~~ ~~1 000€~~ ~~1 000€~~ ~~1 000€~~ ~~1 000€~~ 1 000€ 100€ 100€ 1€ 1€ 1€ 1€ 1€ 1€ 1€ 1€  MCDU MCDU MCDU MCDU MCDU MCDU 1 1 1 1 1 1	Il y a 7 milliers à partager en 6, donc chacun aura 1 millier, donc on écrit « M » au quotient (et donc on écrit aussi CDU). Puis on fait le partage : dans 7 combien de fois 6 ? (ici on notera que l'on passe de la partition à la quotition, pour plus d'explication voir le manuel du maître « J'apprends les Maths » CM de R. Brissiaud. On écrit 1 dans le chiffre des milliers du quotient, on soustrait 6 à 7, il reste 1 millier. M C D U 7 2 0 8 | 6 -6 | M C D U 1 | 1

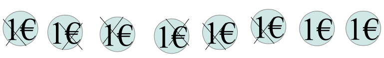
<table>
<tr>
<td>
On échange le billet de 1 000€ qui reste contre 10 billets de 100€ : on a donc maintenant 12 billets de 100€ : les deux qui étaient là au départ, plus ceux que l'on vient d'échanger...


</td>
<td>
On dit que 1 millier c'est comme 10 centaines, on a donc maintenant 12 centaines : les deux qui étaient là au départ, et les 10 centaines représentant un millier...
On peut aussi dire « on abaisse le 2... »

M C D U
7 2 0 8 | 6
-6 ↓ | M C D U
1 2 | 1
</td>
</tr>
<tr>
<td>
On partage les centaines... On en donne 2 à chaque bonhomme.



MCDU MCDU MCDU MCDU MCDU MCDU
1 2   1 2   1 2   1 2   1 2   1 2
</td>
<td>
Dans 12 combien de fois 6 centaines ?
2, donc on écrit 2 sous C...

M C D U
7 2 0 8 | 6
-6 ↓ | M C D U
1 2 | 1 2
-1 2
0
</td>
</tr>
<tr>
<td>
On partage les billets de 10€ : il n'y en a pas, donc chaque bonhomme reçoit 0 billets de 10€...

MCDU MCDU MCDU MCDU MCDU MCDU
1 2 0   1 2 0   1 2 0   1 2 0   1 2 0   1 2 0
</td>
<td>
On abaisse le chiffre des dizaines, il y a 0 dizaines, donc on écrit 0 sous D au quotient.
M C D U
7 2 0 8 | 6
-6 ↓ ↓ | M C D U
1 2 ↓ | 1 2 0
-1 2 ↓
0 0
C'est là que réside tout l'intérêt d'écrire « MCDU » au quotient : on n'oublie aucun chiffre !
</td>
</tr>
<tr>
<td>
On partage les pièces de 1€ : chacun en reçoit 1, et il en reste 2. On obtient le résultat : chacun reçoit 1 201€ et il reste 2, soit q=1 201 et r=2.



MCDU MCDU MCDU MCDU MCDU MCDU
1 2 0 1   1 2 0 1   1 2 0 1   1 2 0 1   1 2 0 1   1 2 0 1
</td>
<td>
On partage les unités : dans 8 combien de fois 6 ? 1 fois et il reste 2...
On a donc q = 1 201 et r = 2.
M C D U
7 2 0 8 | 6
-6 ↓ ↓ ↓ | M C D U
1 2 ↓ ↓ | 1 2 0 1
-1 2 ↓ ↓
0 0 8
- 6
2
</td>
</tr>
</table>

Nous avons laissé le choix aux élèves, lorsqu'ils rencontraient des divisions, de les traiter de la manière qu'ils le souhaitaient, en incitant ceux qui le pouvaient à utiliser la potence... Mais parfois il fallait reprendre les dessins, voire les billets !