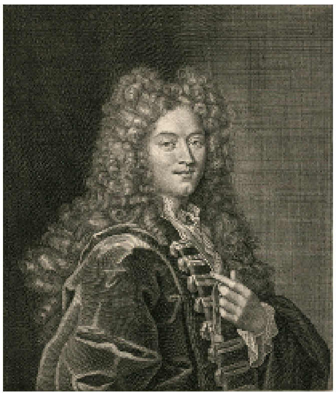
Calcul différentiel

La théorie exposée ici est de Leibniz, mais exposée (en français) par le marquis Guillaume de l'Hospital, dans un livre paru en 1696 et titré *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*.



Guillaume de l'Hospital (1661-1704)

I/ Notations

1) Convention

Comme le fera d'Alembert dans l'Encyclopédie par la suite, l'Hospital note les constantes par les premières lettres de l'alphabet et les variables par les dernières lettres :

AVERTISSEMENT.

On ſuppoſe ordinairement dans la ſuite que les dernieres lettres de l'alphabet, z, y, x, *&c. marquent des quantités variables; & au contraire que les premieres* a, b, c, *&c. marquent des quantités conſtantes : de ſorte que* x *devenant* x + dx; y, z, *&c. deviennent* y + dy, z + dz, *&c.* **Et* a, b, c, *&c. demeurent les meſmes* a, b, c, *&c.*

2) Notation de Leibniz

Leibniz appelle ***différentielle*** (l'Hospital préfère le mot *différence*), et note d, le résultat (infiniment petit) d'une soustraction effectuée sur des grandeurs infiniment proches :

DÉFINITION II.

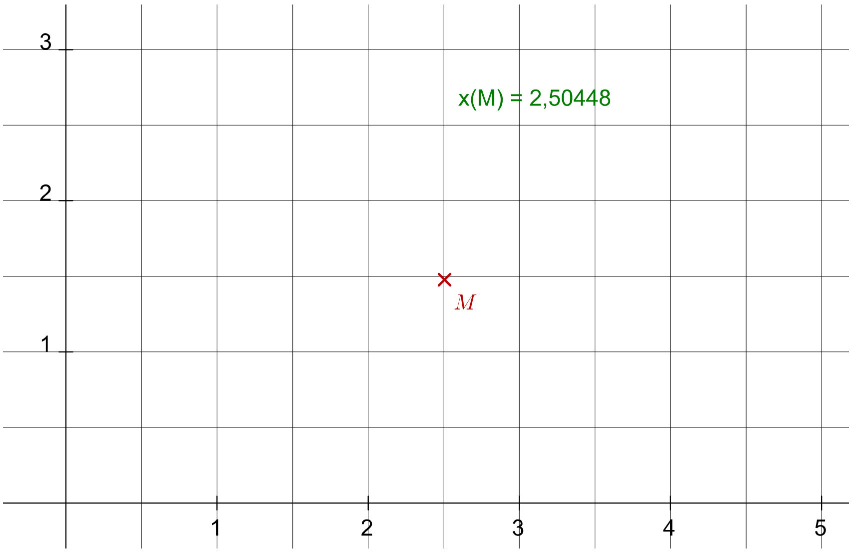
La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminuë continuellement, en eſt appellée la *Différence.*

pour marquer la difference d'une quantité variable que l'on exprime par une ſeule lettre; & pour éviter la confuſion, cette note d *n'aura point d'autre uſage dans la ſuite de ce calcul.*

3) CaRMetal

a) Abscisse d'un point

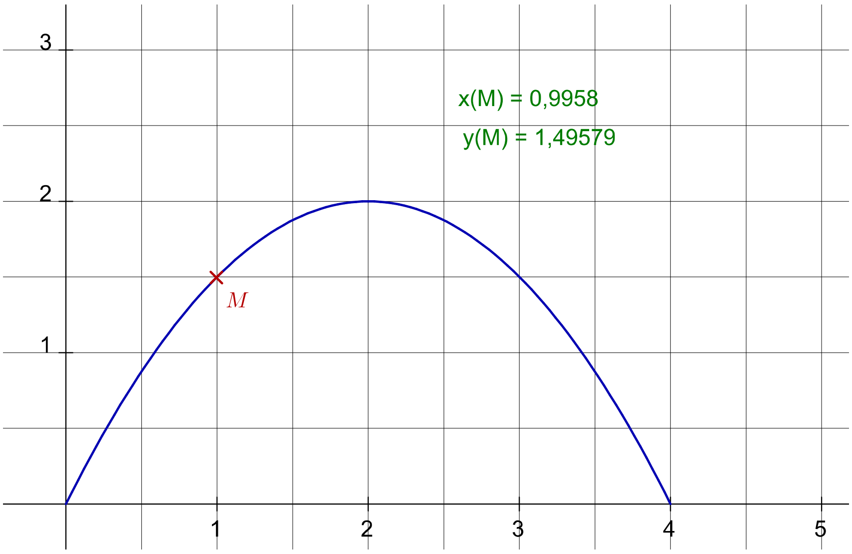
Dans CaRMetal (comme dans bien d'autres logiciels de géométrie dynamique), il existe une fonction *abscisse* notée x :



x(M) est l'abscisse de M (actuellement environ 2,5 comme on peut le voir sur le repère orthonormé).

b) Ordonnée d'un point

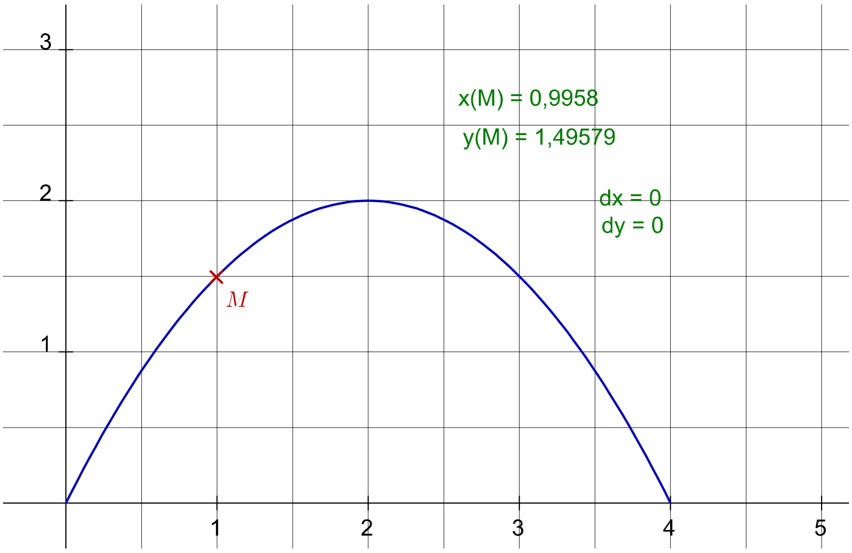
Il y a aussi une fonction *ordonnée* qui est notée y. L'ordonnée de M est donc y(M) :



Ci-dessus, M a été attaché à la parabole de telle sorte que si on le déplace à la souris, il reste sur la parabole. Ici M est proche des coordonnées (1 ; 1,5).

c) Le d de Leibniz

Pour CaRMetal, d est une fonction (qui à une expression variable associe une autre expression mais très petite). En ajoutant les expressions d(x(M)) et d(y(M)) on voit qu'elles valent 0 tant qu'on ne bouge pas M :



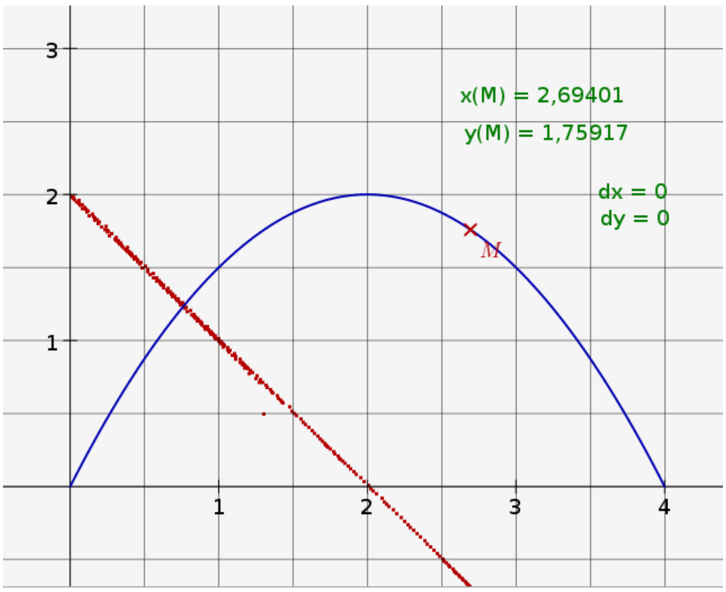
II/ Dérivée

1) Définition (Leibniz)

La quantité dy/dx est appelée ***dérivée*** de y par rapport à x. Comme M est placé sur la représentation graphique d'une fonction, le quotient dy/dx ne dépend que de x.

2) Représentation graphique

Avec la figure ci-dessus, on peut créer un point P de coordonnées x(M) et dy/dx et activer sa trace. En déplaçant M sur la parabole, on constate que le point P décrit une courbe (en rouge) qui représente graphiquement une nouvelle fonction, appelée fonction dérivée :



3) Dérivée d'une constante

> COROLLAIRE.
>
> 1. Il eſt évident que la différence d'une quantité conſtante eſt nulle ou zero : ou (ce qui eſt la même choſe) que les quantités conſtantes n'ont point de différence.

Si a est une constante, da=0 donc da/dx=0/dx=0 : la dérivée d'une constante est la fonction nulle.

4) Dérivée et variations

Lorsque M bouge vers la droite, dx est positif et lorsque M bouge vers la gauche, dx est négatif.

a) fonctions croissantes

Si la fonction représentée graphiquement est croissante,

- M monte (dy positif) lorsqu'il va vers la droite (dx positif)
- M descend (dy négatif) lorsqu'il va vers la gauche (dx négatif)

Dans les deux cas, dx et dy sont de même signe (tous les deux positifs, ou tous les deux négatifs). Donc leur quotient est positif.

b) fonctions décroissantes

Si la fonction représentée graphiquement est décroissante,

- M descend (dy négatif) lorsqu'il va vers la droite (dx positif)
- M monte (dy positif) lorsqu'il va vers la gauche (dx négatif)

Dans les deux cas, dx et dy sont de signes contraires. Donc leur quotient est négatif.

c) Théorème (Newton, Leibniz)

> Une fonction est croissante si et seulement si sa dérivée est positive, et décroissante si et seulement si sa dérivée est négative.

On étudie les variations d'une fonction à l'aide du tableau de signes de sa dérivée.

III/ Calcul de dérivées

On sait qu'une table rectangulaire mesure entre x=2,4m et x+dx=2,43m de long, et entre y=1,8m et y+dy=1,82m de large.

1) Dérivée d'une somme

a) Précision des calculs

Avec quelle précision connaît-on le demi-périmètre de cette table ? Comme la longueur vaut au moins 2,4m et la largeur vaut au moins 1,8m alors le demi-périmètre vaut au moins 2,4m+1,8m=4,2m. Comme la longueur vaut au plus 2,43m et la largeur vaut au plus 1,82m alors le demi-périmètre vaut au plus 2,43m+1,82m=4,25m.

Alors que l'imprécision sur la longueur était dx=3cm et que l'imprécision sur la largeur était dy=2cm, l'imprécision sur le demi-périmètre est leur somme 5cm. Lorsqu'on mène des calculs, les erreurs d'approximation s'amplifient au cours du calcul et il est prudent de prendre des valeurs plus précises pour les données : ce n'est pas en arrondissant à 10^{-3} dès le début du calcul, qu'on a la garantie d'avoir le résultat aussi à 10^{-3}.

b) Dérivée d'une somme

(u+du) + (v+dv) = u+du+v+dv=u+v+du+dv=(u+v)+(du+dv) donc d(u+v)=du+dv.

En divisant les deux membres par dx on a d(u+v)/dx=du/dx+dv/dx ou (avec la notation de Lagrange) (u+v)'=u'+v'.

C'est ce qu'écrivait Guillaume de l'Hospital :

PROPOSITION I.

Problême.

4. PRENDRE *la différence de pluſieurs quantités ajoûtées enſemble, ou ſouſtraites les unes des autres.*

Soit $a+x+y-z$ dont il faut prendre la différence. Si l'on ſuppoſe que x ſoit augmentée d'une portion infiniment petite ; c'eſt-à-dire qu'elle devienne $x+dx$; y deviendra alors $y+dy$; & z, $z+dz$; pour la conſtante a,* elle demeurera la même a : de ſorte que la quantité propoſée $a+x+y-z$ deviendra $a+x+dx+y+dy-z-dz$; & ſa différence, que l'on trouvera en la retranchant de cette derniere, ſera $dx+dy-dz$. Il en eſt ainſi des autres ; ce qui donne cette régle.

La règle en question est celle-ci :

REGLE I.

Pour les quantités ajoûtées, ou ſouſtraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité propoſée, & retenant les mêmes ſignes, on en compoſera une autre quantité qui ſera la différence cherchée.

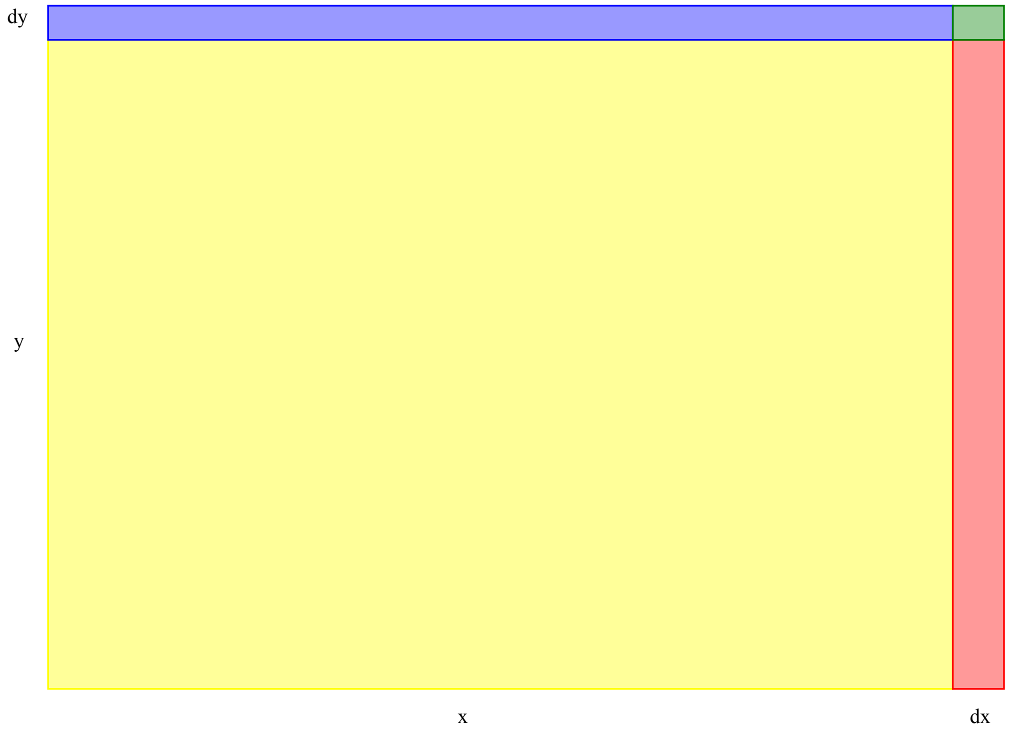
2) Dérivée d'une fonction composée

Selon Leibniz, si y=f(u(x)) alors df/dx = df/du × du/dx ou avec la notation de Lagrange f(u(x))'=f'(u)×u'(x)

3) Dérivée d'un produit

Avec quelle précision connaît-on l'aire de la table vue auparavant ? Elle est au moins égale à 2,4m×1,8m=4,32m² et au plus égale à 2,43m×1,82m=4,4226m². Ce qui fait une incertitude de 1026cm². Quel genre de calcul permet-il de trouver **0,1026** à partir de 0,03 et 0,02 ?

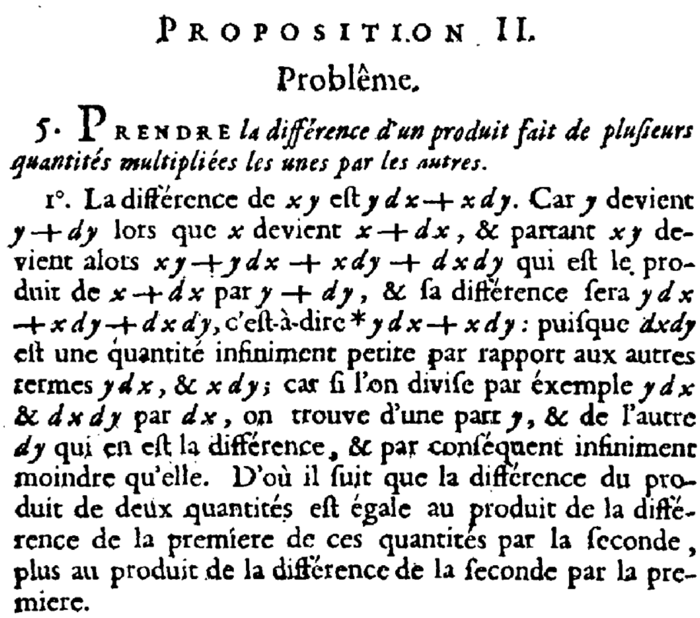
Ci-dessous une table de dimensions x+dx et y+dy a été dessinée :



La « différence » s'obtient en enlevant le rectangle jaune de dimensions x et y :

Si dx et dy sont infiniment petits, le rectangle vert d'aire dx × dy est infiniment petit par rapport à eux, on peut donc l'enlever :

Le rectangle bleu a pour aire x × dy et le rectangle rouge a pour aire y × dx. Donc d(x+y)=x×dy+y×dx :



PROPOSITION II.

Problême.

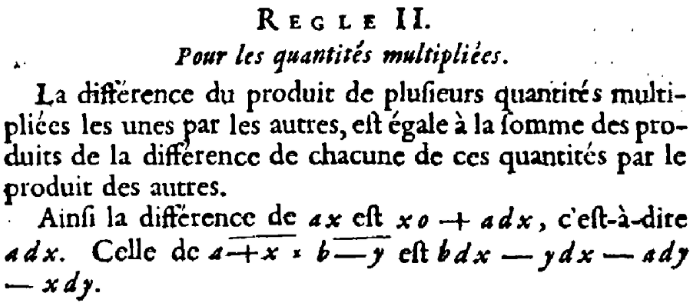
5. PRENDRE *la différence d'un produit fait de pluſieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

1°. La différence de xy eſt $ydx + xdy$. Car y devient $y + dy$ lors que x devient $x + dx$, & partant xy devient alors $xy + ydx + xdy + dxdy$ qui eſt le produit de $x + dx$ par $y + dy$, & ſa différence ſera $ydx + xdy + dxdy$, c'eſt-à-dire * $ydx + xdy$: puiſque $dxdy$ eſt une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy ; car ſi l'on diviſe par exemple ydx & $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en eſt la différence, & par conſéquent infiniment moindre qu'elle. D'où il ſuit que la différence du produit de deux quantités eſt égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la ſeconde, plus au produit de la différence de la ſeconde par la premiere.

Par exemple, 2,4 × 0,02 + 1,8 × 0,03 = 0,048+0,054=**0,102** qui est proche des 0,1026 vus auparavant.

Comme d(u×v)=u×dv+v×du, en divisant les deux membres de cette égalité par dx, on a d(u×v)/dx=u×dv/dx+v×du/dx ou avec la notation de Lagrange, (u×v)'=u×v'+v×u'.

Énoncée par Guillaume de l'Hospital, la règle devient


REGLE II.

Pour les quantités multipliées.

La différence du produit de pluſieurs quantités multipliées les unes par les autres, eſt égale à la ſomme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainſi la différence de ax eſt $x0 + adx$, c'eſt-à-dire adx. Celle de $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ eſt $bdx - ydx - ady - xdy$.

Par exemple $d(a \times x) = x \times da + a \times dx = x \times 0 + a \times dx = a \times dx$ d'où par division par dt, $d(a \times x)/dt = a \times dx/dt$ soit avec la notation de Lagrange $(a \times x)' = a \times x'$.

4) Dérivée d'un inverse

On sait qu'une longueur est comprise entre 1,5625m et 1,6m (donc avec une précision de 0,0375). Avec quelle précision connaît-on son inverse ?

La longueur vaut au moins 1,5625m donc son inverse vaut au plus $1/1{,}5625 = 0{,}64\text{m}^{-1}$. Mais la longueur valant au plus 1,6m, son inverse vaut au minimum $1/1{,}6 = 0{,}625\text{m}^{-1}$. L'inverse de la longueur est donc compris entre $0{,}625\text{m}^{-1}$ et $0{,}64\text{m}^{-1}$. On connaît donc l'inverse avec une précision de $0{,}64\text{m}^{-1} - 0{,}625\text{m}^{-1} =$ **$0{,}015\text{m}^{-1}$**.

Si une longueur est comprise entre x et x+dx alors son inverse est compris entre $1/(x+dx)$ et $1/x$. Mais $1/(x+dx) = (x-dx)/(x^2-dx^2) = (x-dx)/x^2$. Donc $d(1/x) = (x-dx)/x^2 - 1/x = (x-dx)/x^2 - x/x^2 = -dx/x^2$.

Par exemple $-0{,}0375/1{,}5625^2 =$ **$0{,}01536\text{m}^{-1}$** qui est proche de la valeur $0{,}015\text{m}^{-1}$.

En divisant les deux membres par dx on obtient $d(1/x)/dx = -1/x^2$ soit avec la notation de Lagrange, $(1/x)' = -1/x^2$.

1/u est composée de u par la fonction inverse, donc la dérivée de 1/u est $d(1/u)/dx = d(1/u)/du \times du/dx = -1/u^2 \times du/dx$ soit avec la notation de Lagrange $(1/u)' = -u'/u^2$.

5) Dérivée d'un quotient

Il résulte de ce qui précède, que la dérivée de 1/v est $-v'/v^2$. Or u/v est le produit de u par 1/v donc, par dérivation d'un produit, $(u/v)' = (u \times 1/v)' = u' \times 1/v + u \times (-v'/v^2) = u' \times v/v^2 - u \times v'/v^2 = (u' \times v - u \times v')/v^2$.

Guillaume de l'Hospital propose une autre preuve de cette formule, directement à partir du produit : en posant $z = u/v$ on a $u = v \times z$ que l'on différentie : $du = d(v \times z) = dv \times z + v \times dz$ d'où $du - dv \times z = v \times dz$ et finalement $dz = (du - dv \times z)/v = du/v - dv \times z/v = du/v - dv \times u/v/v = du/v - dv \times u/v^2 = du \times v/v^2 - dv \times u/v^2$

$dz = (du \times v - dv \times u)/v^2$:

Proposition III.

Problême.

6. Prendre *la différence d'une fraction quelconque.*

La différence de $\frac{x}{y}$ eſt $\frac{ydx - xdy}{yy}$. Car ſuppoſant $\frac{x}{y} = z$, on aura $x = yz$, & comme ces deux quantitez variables x & yz doivent toûjours être égales entr'elles, ſoit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'enſuit que leur différence, c'eſt-à-dire leurs accroiſſemens ou diminutions ſeront auſſi égales entr'elles; & partant* on aura $dx = ydz + zdy$, & $dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$ en mettant pour z ſa valeur $\frac{x}{y}$. Ce qu'il falloit, &c. d'où l'on forme cette regle.

En divisant les deux membres par dx on a d(u/v)/dx=(du/dx×v-dv/dx×u)/v² ou avec la notation de Lagrange, (u/v)'=(u'×v-u×v')/v². La règle énoncée par Guillaume de l'Hospital est :

Regle III.

Pour les quantités diviſées, ou pour les fractions.

La différence d'une fraction quelconque eſt égale au produit de la différence du numérateur par le dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur : le tout diviſé par le quarré du dénominateur.

Ainſi la différence de $\frac{a}{x}$ ſera $\frac{-adx}{xx}$, celle de $\frac{x}{a+x}$ ſera $\frac{adx}{aa + 2ax + xx}$.

Par exemple (a étant une constante) la dérivée de a/x est -a/x² et celle de x/(a+x) est a/(a²+2ax+x²).