

LA DICTATURE ECLAIREE
SERAIT-ELLE PLUS
DEMOCRATIQUE QUE LA
DEMOCRATIE ?

Olivier SICARD

IREM de la REUNION

Décembre 2014

Table des matières

I	Introduction	3
II	Le problème du vote dans la Démocratie	5
III	Le paradoxe de Condorcet et de Borda	6
IV	Les quatre principes de rationalité	7
IV.1	Le principe d'unanimité-ou la souveraineté de l'opinion	7
IV.2	L'indifférence aux alternatives non pertinentes	7
IV.3	L'indépendance monotone binaire	7
IV.4	La dictature est interdite	8
IV.5	Un contre-exemple : retour sur le scrutin uninominal majoritaire à un tour	8
V	Le théorème d'impossibilité d'Arrow	8
V.1	Notion de groupe décisif	8
V.2	Lemme 1	9
V.3	Lemme 2	10
V.4	Le théorème d'impossibilité d'Arrow	10
VI	La dictature éclairée	11
VII	Conclusion	12
VIII	Bibliographie	12

I Introduction

La dictature éclairée serait-elle plus démocratique que la démocratie ? Voici une question bien étrange, sinon absurde : comment serait-ce possible puisque dictature et démocratie sont deux concepts totalement antagonistes. La démocratie, c'est le pouvoir aux mains du peuple tandis que dans une dictature le pouvoir n'est aux mains que d'un seul homme ! Pour nous tous, la démocratie est synonyme d'égalité et de liberté, car les lois auxquelles nous devons obéir sont des lois que nous avons nous mêmes (plus ou moins) rédigées et choisies grâce au vote. La dictature quant à elle est synonyme de despotisme et de tyrannie, la critique du pouvoir en place est interdite et tout le monde est l'esclave d'un seul et unique tyran, d'un seul et unique dictateur. Il n'y a plus de liberté.

Pourtant Aristote écrivait déjà dans *Les politiques* que : "*Le choix judicieux est l'affaire des gens de savoir : par exemple le choix d'un géomètre appartient à ceux qui sont versés dans la géométrie, et le choix d'un pilote à ceux qui connaissent l'art de gouverner un navire. Car, en admettant même que, dans certains travaux et certains arts, des profanes aient voix au chapitre, leur choix en tout cas n'est pas meilleur que celui des hommes compétents. Par conséquent, en vertu de ce raisonnement, on ne devrait pas abandonner à la masse des citoyens la haute main sur les élections de magistrats*"

Aristote était donc contre la démocratie comme nous l'entendons et sa conception de l'Etat se rapprochait plus d'une dictature que d'une démocratie, mais d'une dictature dirigée par des hommes de savoir : des dictateurs éclairés.

Une dictature éclairée, cela sonne comme un oxymore, au même titre que "l'obscur clarté" ou qu'un "silencieux tintamare". Pourtant, un dictateur éclairé ne serait-il pas un bon compromis ? Etre Dictateur signifierait prendre les décisions (et en assumer les conséquences) pour son peuple, et être éclairé signifierait à la fois avoir les capacités et les compétences lui permettant de faire les bons choix pour son peuple en toute connaissance de causes, mais aussi ne pas être obscurci par des intérêts plus personnels en contradiction avec les intérêts communs de son peuple ; en définitive un dictateur aurait les capacités, l'envie et le pouvoir de prendre les bonnes décisions pour son peuple (ou du moins les décisions que celui-ci pense bonnes). Si Galilée avait été un dictateur, la Terre aurait sûrement été ronde bien plus tôt dans l'Histoire de l'Homme.

Mais revenons à la démocratie. Pour « gouverner » tout d'abord, il faut à un moment ou à un autre faire des choix et trancher entre plusieurs alternatives. Comme dans une démocratie c'est le « peuple » qui dirige, ces choix devront être réalisés collectivement. Or ces choix collectifs ne sauraient être réalisés à partir d'autre chose que les choix des individus composant le peuple. Il va donc falloir, d'une manière ou d'une autre, agréger les choix individuels en un choix collectif. En effet, comment des choix collectifs pourraient-ils être établis autrement ?

De nos jours, la démocratie assoit sa légitimité sur le fait que toute personne en âge de le faire puisse voter pour élire le candidat qui pour elle représente au mieux ses propres convictions. Le vote est le moyen d'agréger les convictions personnelles de chacun en un choix collectif unique. Il existe une multitude de façons de voter : vote à la majorité, scrutin à tour unique ou à double tour, droit de veto, élection des grands électeurs... Ces différentes façons de voter, qui fondent la démocratie, se valent-elles toutes ? Si oui

pourquoi en avoir plusieurs ? Et si non cela voudrait dire qu'il y en auraient certaines meilleures que d'autres, alors pourquoi quand même utiliser les moins bonnes ? Et y en aurait-il une meilleure que toutes les autres ? Encore faudrait-il définir ce que signifie ici meilleure...

II Le problème du vote dans la Démocratie

Un peuple est composé d'individus ayant chacun leurs préférences sur un ensemble de choix possibles. Le premier problème incontournable à résoudre pour pouvoir parler de démocratie est donc l'agrégation de ces préférences individuelles en un choix collectif.

Or les choses sont moins simples qu'il n'y paraît. En effet, l'agrégation ne peut pas se faire n'importe comment, sous peine de ne plus pouvoir être qualifiée de « démocratique ». Par exemple, elle ne peut pas consister à choisir une personne au hasard, à lui demander ses préférences et les appliquer à toute la collectivité : ce serait en quelque sorte une dictature. Il y a donc bien certains principes minimaux que l'agrégation doit respecter, faute de quoi nous ne pourrions évidemment pas parler de démocratie.

Lors d'un vote, ce sont des votants qui choisissent une alternative parmi un nombre fini d'autres alternatives. Nous noterons \mathcal{A} l'ensemble des alternatives possibles et $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ l'ensemble des votants, nous supposons par la suite qu'il existe au moins trois alternatives distinctes, autrement dit que $\text{card}(\mathcal{A}) \geq 3$.

Dès lors, définir une relation de surclassement S sur \mathcal{A} , c'est lui associer une relation binaire S . aSb signifiant que a surclasse b , c'est-à-dire que a est au moins aussi bon que b .

Une relation de surclassement est dite locale lorsqu'elle est construite sur la base d'un seul votant, en général les structures préférentielles locales sont complètes, c'est à dire que toutes les alternatives sont comparables ; nous supposons de plus qu'elles sont réflexives et transitives, ce qui fait alors de S un préordre total. Par contre, S n'est a priori pas un ordre car l'antisymétrie n'est pas vérifiée : pensons à deux alternatives différentes a et b au moins aussi bonnes l'une que l'autre, c'est à dire telles que aSb et bSa , mais évidemment a n'est pas égale à b .

Une relation de surclassement est dite globale quand elle est construite sur la base de l'ensemble \mathcal{V} de tous les votants. Nous noterons Θ l'ensemble de tous les préordres sur \mathcal{A} , et S_i le préordre associé au votant v_i sur \mathcal{A} . Remarque : $S_i \in \Theta$. Nous appellerons "profil" le n-uplet $P = (S_1, \dots, S_n) \in \theta^n$

Le challenge que doit relever la démocratie est de construire une relation de surclassement globale sur \mathcal{A} (qui sera aussi un préordre total) en agrégeant les n relations de surclassements locales relatives à chacun des votants. La méthode d'agrégation doit s'adapter à tout profil P , c'est-à-dire qu'il doit être toujours possible d'agréger les n relations de surclassement, de plus il faut absolument que cette méthode d'agrégation soit "démocratique" !

Autrement dit on cherche une fonction $f : \theta^n \rightarrow \theta$ telle que $f(P) = S$ soit un préordre total qui agrège démocratiquement le profil P .

III Le paradoxe de Condorcet et de Borda

Déjà dans les années 1780, dans son *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité de voix*, Nicolas de Condorcet mettait en évidence le fait que voter puisse permettre l'élection d'un candidat qui pourtant n'est pas désiré par une grande majorité des électeurs.

Considérons pour cela le scrutin uninominal majoritaire à un tour qui est, parmi les systèmes électoraux, le plus simple que nous puissions rencontrer. L'électeur doit choisir un candidat parmi plusieurs. On compte alors le nombre de voix obtenues par chaque candidat. Celui qui recueille le plus de voix (majorité relative) remporte les élections, les autres peuvent être comptés comme ex-aequo.

Dans l'exemple suivant, 15 électeurs, doivent élire un candidat parmi 3 que nous nomerons a, b, c .

- 6 électeurs préfèrent a puis b puis c .
- 5 électeurs préfèrent b puis c puis a .
- 4 électeurs préfèrent c puis b puis a .

Au final le candidat a est élu, tandis que les candidats b et c finissent ex-aequo à la deuxième place, et cela même si, paradoxalement, 9 des 15 votants pensent que a est le moins bon des trois candidats. En termes concrets : si la gauche (ou la droite) possède une majorité dans le pays, mais présente deux candidats plutôt qu'un, elle pourra perdre les élections face au candidat unique de l'autre camp.

Face à ce paradoxe, Nicolas de Condorcet propose sa propre méthode dite "Méthode de Condorcet". Celle-ci consiste à opposer tous les candidats en duel électoral ; s'il existe un candidat qui gagne contre tous les autres alors il est élu, on l'appelle "le vainqueur de Condorcet". Outre le fait que le nombre de duels peut s'avérer élevé car égal au nombre de combinaisons de 2 parmi n candidats, Condorcet remarque qu'il est tout à fait possible qu'il n'y ait pas de vainqueur de Condorcet : c'est ce que l'on appelle le paradoxe de Condorcet.

Revenons sur notre exemple et examinons chaque duel :

- b gagne contre a par 9 voix contre 6.
- c gagne contre a par 9 voix contre 6.
- b gagne contre c par 11 voix contre 4.

Le candidat b est le vainqueur de Condorcet, il serait donc élu à la place de a par la méthode de Condorcet.

Remarquons aussi que le candidat a gagne les élections alors qu'il a perdu tous ses duels ! Ce dernier paradoxe a été énoncé par un contemporain de Condorcet : Jean-Charles de Borda.

IV Les quatre principes de rationalité

C'est en 1951 que Kenneth ARROW (Prix Nobel d'Economie en 1972) proposa dans son livre *Social choice and individual values*, quatre principes que toute méthode d'agrégation devait vérifier pour pouvoir être qualifiée de "démocratique".

IV.1 Le principe d'unanimité-ou la souveraineté de l'opinion

Le principe d'unanimité établit deux règles :

- Premièrement les votants ne sont en aucun cas restreint dans le classement des alternatives, ce qui signifie que tous les préordres S_i sont autorisés.
- Deuxièmement si tous les votants sont d'accord pour classer l'alternative a avant l'alternative b alors a sera classée devant b au final après agrégation. Autrement dit si pour tout votant v_i on a $aS_i b$, alors $S = f(P)$ range obligatoirement a avant b (aSb).

Remarquons que puisque tous les préordres sont autorisés, le domaine de définition de la fonction d'agrégation f est θ^n tout entier et pas une restriction. De plus le principe d'unanimité assure la surjectivité de la fonction f . En effet soit $S \in \theta$, considérons le profil $P = (S, \dots, S)$, alors $f(P) = S$.

IV.2 L'indifférence aux alternatives non pertinentes

Ce principe permet de ne pas s'inquiéter des alternatives oubliées (car non pertinentes a priori) : Il ne faut pas que l'ajout d'une alternative change l'ordre des autres alternatives.

Autrement dit si l'on considère un sous ensemble d'alternatives la fonction f ne doit pas aboutir à un autre classement sur ce sous ensemble. C'est à dire que pour toute partie Z de \mathcal{A} , $f(P(Z)) = f(P(\mathcal{A}))_{restreint\ a\ Z}$.

IV.3 L'indépendance monotone binaire

Ce principe traduit le fait que plus les votants s'accordent à préférer x à y et plus il y a de chances que x soit effectivement préféré à y après agrégation. Si ce principe n'était pas respecté, un candidat pourrait perdre des élections parce que trop de votants auraient voulu qu'il gagne !

Plus précisément, soient deux profils P et P' , posons $S = f(P)$ et $S' = f(P')$.

Soient deux alternatives x et y telles que xSy . Notons A l'ensemble de tous les votants préférant x à y dans P , si dans P' les votants de A rangent également x avant y alors $xS'y$.

IV.4 La dictature est interdite

Tellement évident qu'on l'oublierait presque ! Comment créer une procédure de vote démocratique sans s'interdire la dictature.

Plus précisément, il ne doit pas exister de votant v_i pour lequel sa préférence sur un couple quelconque d'alternatives implique que la préférence agrégée pour ce couple soit la même. Autrement dit $Non(\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall (a, b) \in \mathcal{A}^2, aS_i b \Rightarrow aSb)$.

IV.5 Un contre-exemple : retour sur le scrutin uninominal majoritaire à un tour

Par définition même, le scrutin uninominal majoritaire à un tour vérifie le principe de non dictature, de même il vérifie le principe d'unanimité et le principe d'indépendance monotone binaire. Nous allons voir qu'il ne vérifie pas le principe d'indépendance aux alternatives non pertinentes.

Pour cela reprenons l'exemple vu plus haut. 15 électeurs, doivent élire un candidat parmi 3 que nous nomerons a, b, c .

- 6 électeurs préfèrent a puis b puis c .
- 5 électeurs préfèrent b puis c puis a .
- 4 électeurs préfèrent c puis b puis a .

Maintenant si le candidat c retire sa candidature, c'est le candidat b qui est élu devant le candidat a par 9 voix contre 6.

Ainsi, le scrutin uninominal majoritaire à un tour, pourtant largement utilisée à travers le monde car très simple à mettre en oeuvre et très peu coûteux, ne respecte pas le principe d'indépendance aux alternatives non pertinentes.

V Le théorème d'impossibilité d'Arrow

Toujours dans le même livre *Social choice and individual values*, Kenneth ARROW tenta de proposer une méthode d'agrégation f des préférences des votants démocratiquement acceptable, pour finalement aboutir à son théorème d'impossibilité.

Nous allons vous présenter une démonstration de ce théorème faisant appel à la notion de groupe décisif.

V.1 Notion de groupe décisif

Notre but est donc de fabriquer une fonction d'agrégation f démocratiquement acceptable, c'est à dire vérifiant au minimum les 4 principes de rationalité cités précédemment. Supposons qu'une telle fonction f existe ; cette fonction doit être démocratiquement acceptable pour tous les profils de θ^n .

Si en appliquant les 4 principes de rationalité sur des profils particuliers nous pouvions dégager des propriétés sur f cela permettrait de restreindre les possibilités d'agrégation.

Maintenant considérons a et b deux alternatives. Dans une tentative de construction de la fonction f et compte tenu du troisième principe de rationalité (indépendance monotone binaire), une question cruciale se pose assez rapidement : Combien de votants doivent être d'accord pour classer a avant b pour qu'au final, après agrégation, nous ayons bien aSb ? Cette question nous amène logiquement à poser la définition suivante de groupe décisif :

Considérons a et b deux alternatives, $K \subset \mathcal{V}$ est un groupe décisif K_f^{ab} si $(\forall v_i \in K, aS_i b) \Rightarrow aSb$.

Autrement dit, un groupe est dit décisif sur ces deux alternatives si son classement unanime correspond au classement agrégé.

Remarque 1 : Les groupes décisifs dépendent évidemment des alternatives a et b mais aussi de la méthode d'agrégation f .

Remarque 2 : Grâce au deuxième principe, les groupes décisifs ne dépendent pas des autres alternatives.

Remarque 3 : Si K est un groupe décisif K_f^{ab} , tout ensemble K' contenant K est aussi un K_f^{ab} .

Remarque 4 : Grâce au troisième principe, pour que K soit un K_f^{ab} il suffit qu'il existe un profil P pour lequel :

- chaque votant de K place a avant b
- chaque votant à l'extérieur de K place b avant a
- au final aSb

Remarque 5 : D'après le principe d'unanimité, pour tout couple (a, b) d'alternatives, \mathcal{V} est un K_f^{ab}

V.2 Lemme 1

Nous allons maintenant démontrer un premier lemme dont voici l'énoncer :

Tout ensemble décisif K_f^{ab} de cardinal supérieur ou égal à 2 contient un ensemble décisif strictement plus petit.

Preuve :

Soit K un tel K_f^{ab} , on partitionne K en deux sous ensembles non-vides K_1 et K_2 . On considère une nouvelle alternative c et on construit le nouveau profil P suivant :

- Les votants de K_1 rangent tous $cS_i aS_i b$
- Les votants de K_2 rangent tous $aS_i bS_i c$
- Les autres votants rangent tous $bS_i cS_i a$

Nous avons aSb puisque $aS_i b$ pour tous les votants de K et que K est un K_f^{ab} . En revanche on ne connaît pas la position de c par rapport à a et b .

- Si après agrégation, nous avons : $cSaSb$, alors puisque les votants de K_1 sont les seuls à ranger c avant b , K_1 est un K_f^{cb}
- Si après agrégation, nous avons : $aSbSc$, alors puisque les votants de K_2 sont les seuls à ranger a avant c , K_2 est un K_f^{ac}
- Si après agrégation, nous avons : $aScSb$, alors K_1 est un K_f^{cb} et K_2 est un K_f^{ac}

Conclusion dans tous les cas, K_1 ou K_2 est un groupe décisif plus petit que K ; ce qui clos la démonstration du Lemme 1.

V.3 Lemme 2

Comme nous l'avons remarqué un peu plus tôt, le principe d'unanimité nous assure que l'ensemble \mathcal{V} de tous les votants est un groupe décisif. En appliquant le Lemme 1 au maximum $n - 1$ fois on obtient un groupe décisif ne possédant qu'un seul caractère ; et ceci nous permet d'énoncer le lemme 2 :

Il existe au moins un ensemble décisif ne possédant qu'un seul votant.

V.4 Le théorème d'impossibilité d'Arrow

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer le Théorème d'impossibilité d'Arrow :

Il n'existe pas de méthode d'agrégation démocratiquement acceptable. Autrement dit, la dictature est la seule et unique méthode d'agrégation vérifiant à la fois "le principe d'unanimité", "le principe d'indifférence face aux alternatives non pertinentes" et "le principe d'indépendance monotone binaire" !

Preuve :

Nous allons montrer que si f vérifie les principes 1 , 2 et 3 alors f ne vérifie pas le quatrième principe c'est-à-dire qu'il existe un dictateur.

En appliquant les lemmes 1 et 2 nous savons déjà qu'il existe un votant δ qui est un groupe décisif. Disons que δ est un K_f^{ab} .

Pour montrer que δ est un dictateur il suffit de voir que δ est un K_f^{xy} pour un couple quelconque d'alternatives (x, y) .

Considérons le profil P_1 suivant :

- Le votant δ range x avant a avant b : $xS_\delta aS_\delta b$
- Les autres votants rangent b avant x avant a : $bS_i xS_i a$

L'ordre $S = f(P_1)$ vérifie aSb puisque δ est un K_f^{ab} , mais aussi xSa par unanimité (principe 1)

Par transitivité de S on a donc $xSaSb$.

Mais puisque δ est le seul votant à ranger x avant b , δ est un K_f^{xb}

Considérons maintenant le profil P_2 suivant :

- Le votant δ range x avant b avant y : $xS_\delta bS_\delta y$

– Les autres votants rangent b avant y avant x : bS_iyS_ix

L'ordre $S = f(P_2)$ vérifie xSb puisque δ est un K_f^{xb} , mais aussi bSy par unanimité.

Par transitivité de S on a donc $xSbSy$

Mais puisque δ est le seul votant à ranger x avant y , δ est un K_f^{xy}

Nous venons de montrer qu'il existe forcément un votant δ qui est un K_f^{xy} pour tout couple x, y d'alternatives ; δ est donc bien un dictateur ce qui clos la démonstration.

VI La dictature éclairée

Le théorème d'impossibilité d'Arrow conclut donc l'impossible : la dictature est la méthode de vote la plus démocratique, puisque c'est la seule qui vérifie simultanément les trois premiers principes de rationalité, toutes les autres méthodes d'agrégation devant relaxer au moins un des trois premiers principes. De là à remplacer notre système démocratique moderne par une dictature, plusieurs siècles d'expérience nous ont montré que la nature de l'homme est ainsi faite que le pouvoir corrompt souvent celui qui le possède et obscurci son jugement.

Mais continuons à pousser le vice dans cette direction : pour être un bon dictateur, il faudrait que celui-ci n'ait aucun intérêt autre que le bien être de son peuple, ce qui en politique paraît fortement compromis. Un dictateur éclairé ne peut donc pas être humain, mais que penser alors d'un algorithme éclairé, capable de prendre les décisions cruciales à la place du peuple ?

Imaginons qu'un tel algorithme existe, le peuple lui soumettrait un éventail d'alternatives qu'il aurait à ordonner. Pour lui permettre de choisir l'alternative la plus adaptée, des critères de sélection seraient mis en place, permettant de classer ces alternatives. Nous pouvons penser à des critères classiques comme le prix, l'impact écologique, le temps de réalisation, la sécurité du pays, l'impact sur le chômage, sur l'inflation...

Les différentes alternatives seraient ordonnées du point de vue de chaque critère, et l'algorithme devrait agréger le tout en un ordre global prenant en compte l'ensemble des critères de sélection. Mais alors en remplaçant les votants par les critères, le théorème d'impossibilité d'Arrow s'applique encore et conclue que la seule façon de classer des alternatives en respectant les trois premiers principes de raisonnabilité et d'ordonner sur la base d'un unique critère (souvent le prix).

Au final, le système le plus démocratique consisterait à créer une machine se basant sur un unique critère de sélection pour prendre les décisions cruciales à la place de son peuple. Cette solution semble humainement inacceptable, puisque jusqu'à ce jour, aucun pays ni aucune institution n'a souhaité, ni même eu l'idée d'instaurer un tel système "démocratique" !

VII Conclusion

Nous venons de mettre en évidence que la démocratie comme nous l'idéalisons et l'apprenons à l'école a ses limites et qu'en fait les valeurs que porte la démocratie, à savoir liberté, égalité et pouvoir aux mains du peuple sont aussi des pieds d'argile sur lesquels elle s'appuie.

Le théorème d'impossibilité d'Arrow n'a en aucun cas arrêté la recherche en théorie du vote aujourd'hui. Depuis Kenneth ARROW, une multitude de travaux ont été menés pour mieux cerner les problèmes inhérents aux procédures de vote. Que ce soient des études sur la psychologie des votants ainsi que celle des candidats, sur des notions comme le vote utile et les méthodes de vote manipulables, sur le calcul des probabilités des paradoxes de vote ou bien des travaux sur la classification des différentes méthodes d'agrégation en relaxant l'un ou l'autre des quatre principes du théorème d'impossibilité d'Arrow, ou encore la définition d'indices de pouvoir de vote lorsque les votants ne disposent pas tous du même poids ; l'homme semble tout faire pour tendre vers "toujours plus de démocratie".

VIII Bibliographie

- Arrow K.(1963) *Social choice and individual values*. John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney.
- Pellegrin P. (1993), Aristote, *Les Politiques*. Paris, G. F. Traduction française.
- Badinter E. et Badinter R. (1988), *Condorcet : un intellectuel en politique*, Fayard, Paris.
- Marquis de Condorcet,(1785) *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralités des voix*, Paris