

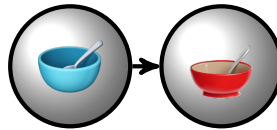
# La catégorie Deux

Alain Busser

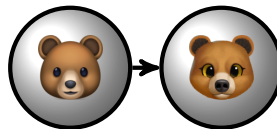
7 mai 2023

La catégorie Un pouvant être définie sans nombres (c'est la catégorie des graphes orientés connexes n'ayant aucune arête), on peut s'en servir pour définir la catégorie Deux : **la catégorie Deux est celle des graphes orientés connexes ayant exactement une arête**. Voici trois objets de cette catégorie :

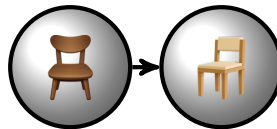
- Deux bols :



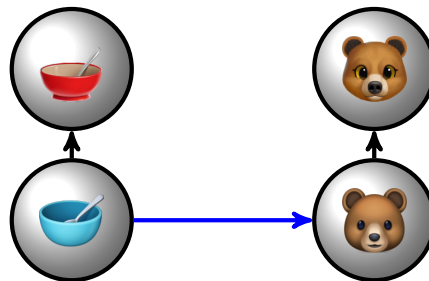
- Deux ours :



- Deux chaises :

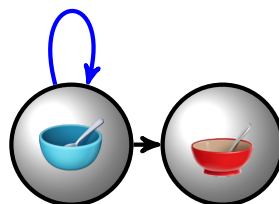


Voici un exemple de morphisme entre les deux premiers objets *deux bols* et *deux ours* :

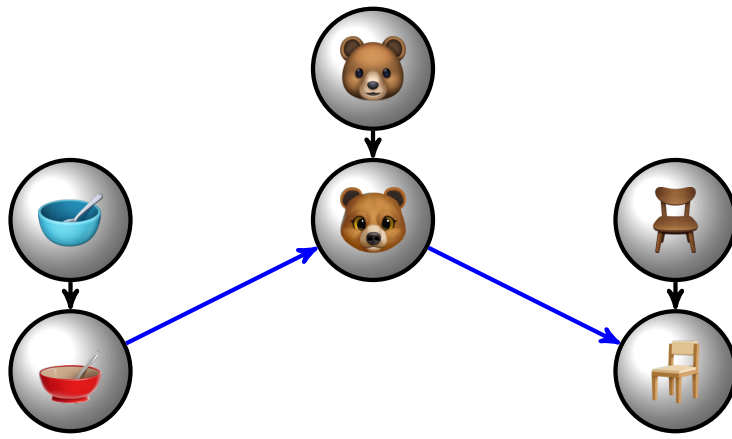


De haut en bas, les deux ours s'appellent respectivement Papa et Maman. Le morphisme dessiné ci-dessus revient à donner le bol bleu à Maman ours et le bol rouge à Papa ours. Comme, dès lors qu'on donne à Maman ours le bol bleu, il ne reste pour Papa ours que le bol rouge, il n'est pas nécessaire de dessiner plusieurs flèches bleues reliant chaque bol à chaque ours, et on se contentera de dessiner une seule flèche bleue pour chaque morphisme.

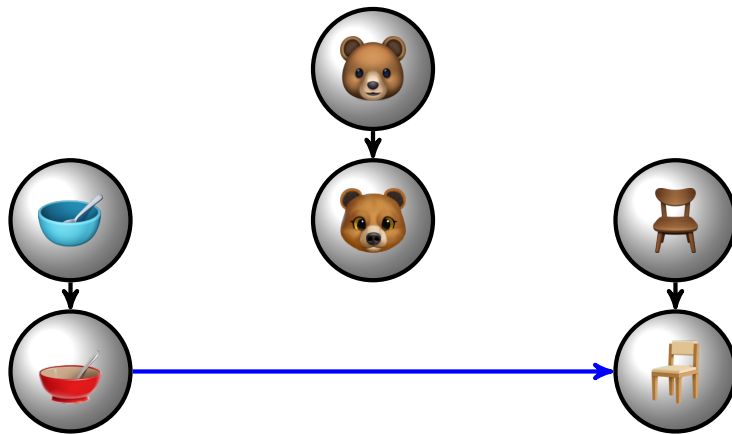
De même l'identité sur l'objet *deux bols* fait correspondre chaque bol avec lui-même, et ne se dessine que par une flèche :



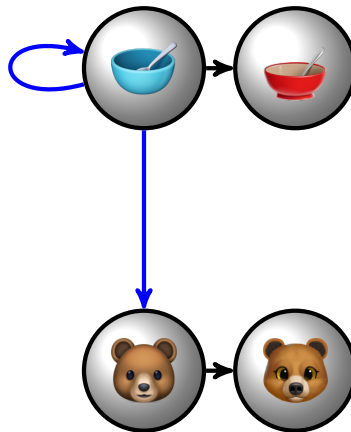
Les morphismes ainsi définis sur la catégorie Deux (faire correspondre le départ avec le départ et l'arrivée avec l'arrivée) sont bien des morphismes. En effet si on fait correspondre deux bols à deux ours (à chaque ours, son bol) et aussi deux chaises à deux ours (à chaque ours sa chaise) :



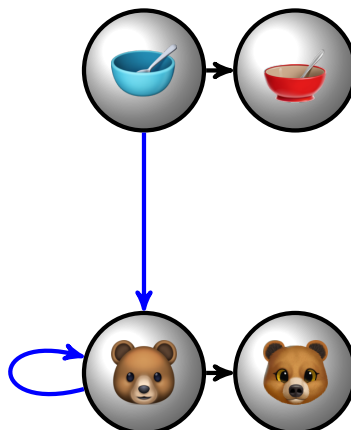
alors on en déduit une correspondance entre les deux bols et les deux chaises :



En composant une identité par un morphisme

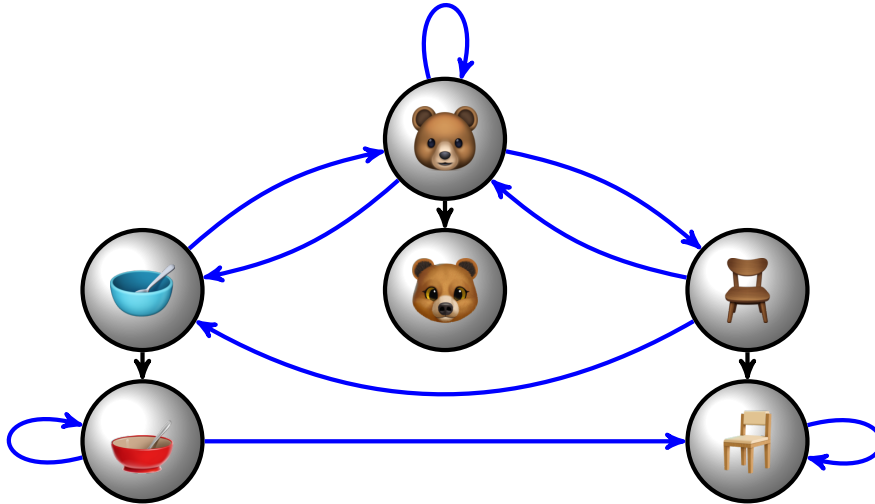


on a le même morphisme, et en composant le morphisme par une identité



on a aussi le même morphisme.

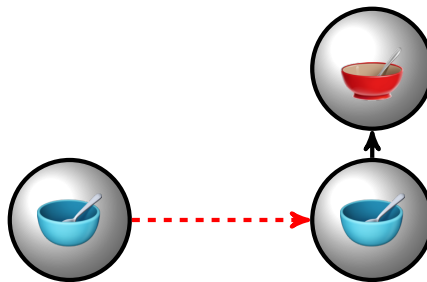
En comptant les identités, il y a 9 morphismes entre les 3 objets de la catégorie Deux ci-dessus :



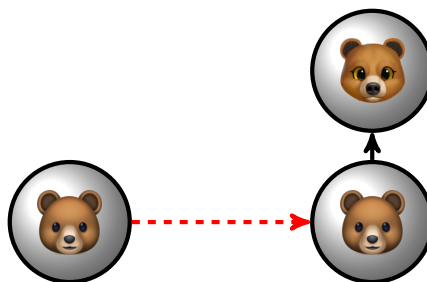
Dans la suite, on évitera de dessiner tous les morphismes...

Puisqu'elle est équipée de morphismes, la catégorie Deux est donc bel et bien une catégorie.

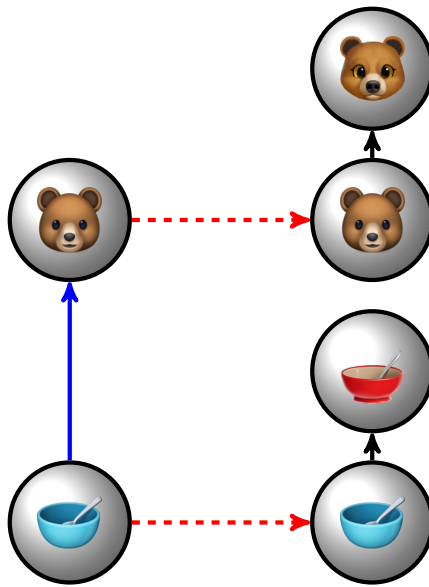
Il n'y a pas de morphisme entre un objet de la catégorie Un et un objet de la catégorie Deux, mais on peut transformer un morphisme de la catégorie Un en un morphisme de la catégorie Deux. L'idée est d'ajouter un deuxième élément à un objet de la catégorie Un pour obtenir un objet de la catégorie Deux. Par exemple, si on a un bol bleu, en le liant à un bol rouge, on a deux bols :



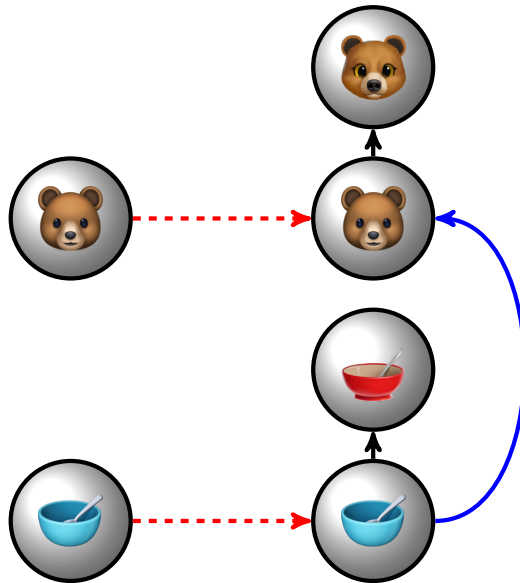
Cette liaison est dessinée en rouge pour montrer qu'il ne s'agit pas d'un morphisme (les morphismes restent dessinés en bleu). On peut bien entendu faire pareil avec tout objet de la catégorie Un. Par exemple le mariage de Maman ours avec Papa ours produit un objet de la catégorie Deux :



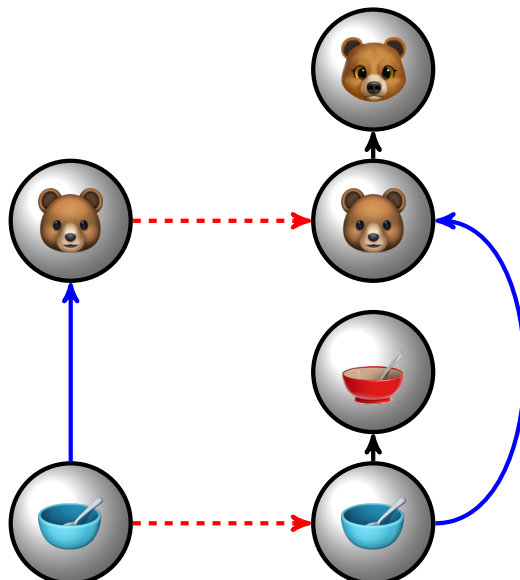
Mais ce n'est pas tout : tout morphisme de la catégorie Un



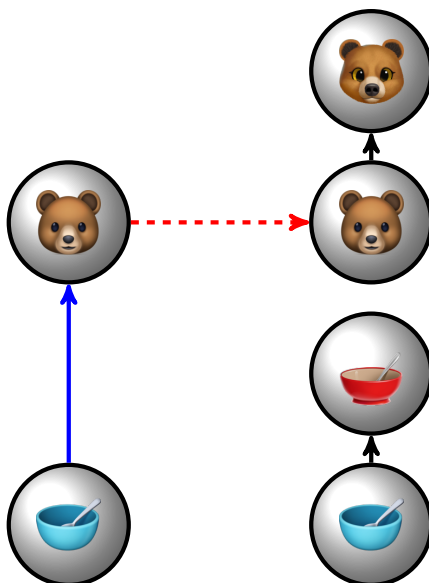
est transformé par les flèches rouges, en un morphisme de la catégorie Deux :



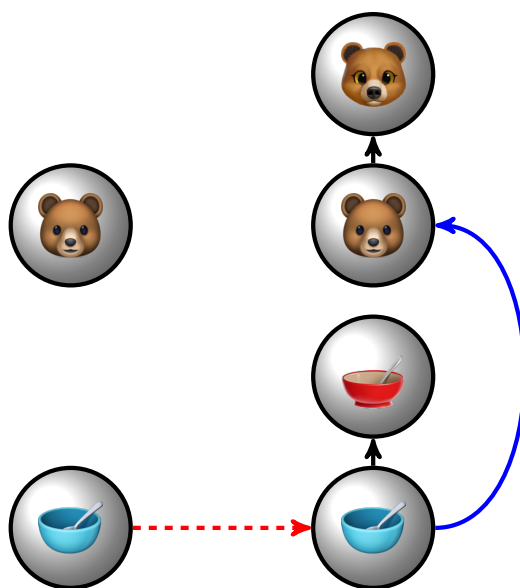
On considère que ci-dessous il n'y a qu'une seule flèche rouge, mais les deux flèches bleues représentent des morphismes différents (celle de gauche est un morphisme de la catégorie Un, celle de droite est un morphisme de la catégorie Deux) :



Ces trois flèches (on rappelle qu'il n'y en a qu'une qui est rouge, même si elle est dessinée en deux exemplaires) forment une sorte de carré. Ce qui mène à un constat : le chemin formé par le morphisme de gauche suivi de la flèche rouge

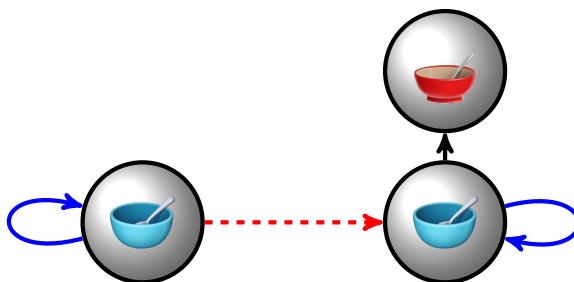


aboutit au même objet de la catégorie Deux (le couple ours) que le chemin commençant par la flèche rouge et continuant par le second morphisme :

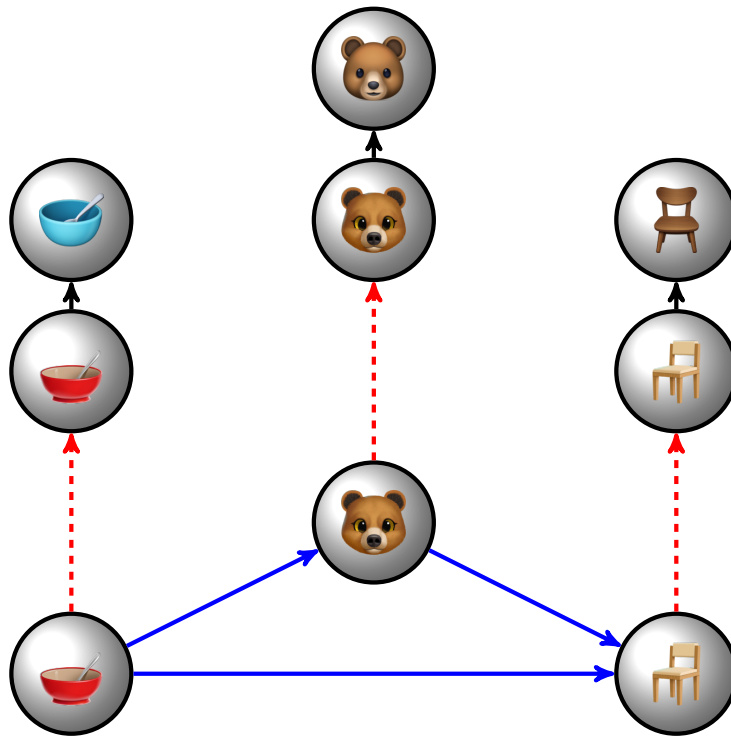


On résume ceci en disant que la flèche rouge est un *foncteur*. Plus précisément

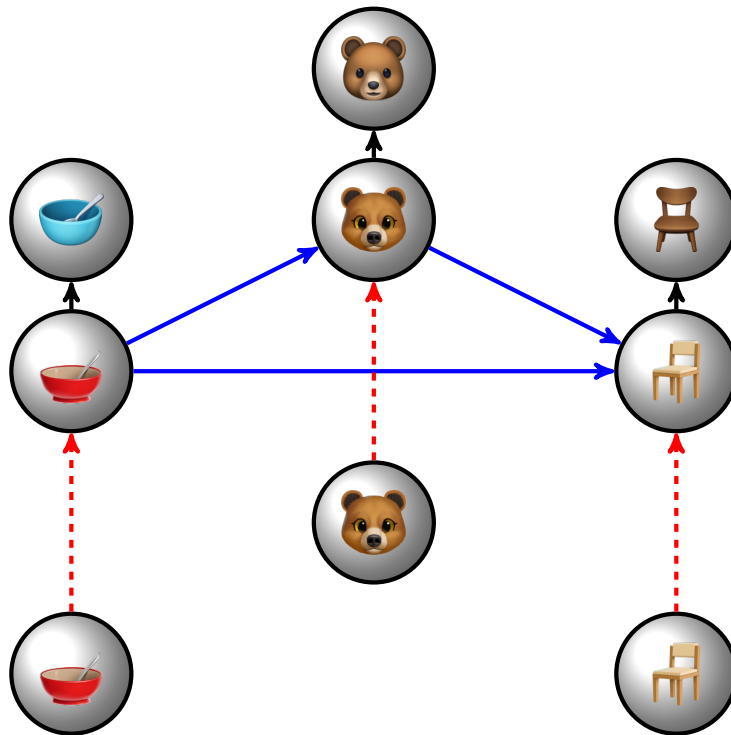
1. Elle transforme des identités en identités :



2. Elle transporte deux morphismes qui se composent



en deux morphismes qui se composent :



Remarque : il y a un autre foncteur de la catégorie Un vers la catégorie Deux :

