Françoise et Étienne TRABBIA, lycée de VINCENDO et IREM de la Réunion, 1999/2000

ACTIVITÉS SUR LES POLYNÔMES

Activité 3

Résolution algébrique d'une équation de degré 4 à coefficients réels (Méthode de Ferrari)

On veut résoudre l'équation (E) $x^4 + 3x^2 + 6x + 10 = 0$.
On pose $\mathrm{P}(x) = x^4 + 3x^2 + 6x + 10$.

1) On se propose d'exprimer $\mathrm{P}(x)$ sous la forme

$$\mathrm{P}(x) = (x^2 + \alpha)^2 + (ux^2 + vx + w).$$

a) Quelle condition doit satisfaire α pour que u soit différent de zéro ?
b) Soit α un nombre complexe différent de 3/2 , exprimer u, v et w en fonction de α.
c) Exprimer quelle condition doit satisfaire α pour que $ux^2 + vx + w$ possède une racine double (cette condition s'exprime sous la forme $\mathrm{Q}(\alpha) = 0$, avec Q polynôme du troisième degré).
d) Montrer que α=1 satisfait à la condition du c) ; et en déduire toutes les valeurs de α satisfaisant à cette condition.

2) Pour chacune des valeurs de α trouvées au 1) d), écrire $\mathrm{P}(x)$ sous la forme

$$\mathrm{P}(x) = (x^2 + \alpha)^2 + u\left(x + \frac{v}{2u}\right)^2.$$

3) On rappelle que dans $\mathbb{C}$, on a $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = (\mathrm{A} + i\mathrm{B})(\mathrm{A} - i\mathrm{B})$.
a) En choisissant α = 7/2, donner une forme factorisée de $\mathrm{P}(x)$ en produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients réels.
b) Résoudre l'équation (E).

Commentaires :

• Dans l'activité, chaque valeur de α = 1 ; –3, 7/2 donne une décomposition de P en produit de deux polynômes de degré 2 dans $\mathbb{C}$[X] permettant d'achever la résolution. Le regroupement des racines conjuguées donne la décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$[X] apparaissant au 3) a).

• Ici, on peut ensuite traiter le cas général $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ (après avoir montré que par translation, toute équation de degré 4 se ramène à cette forme).

• Dans l'équation générale $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$, le cas où $\alpha = a/2$ étant exclu, on est amené à déterminer une racine de

$$\mathrm{Q}(\alpha) = 8\alpha^3 - 4a\alpha^2 - 8c\alpha - (b^2 - 4ac),$$

donc à résoudre une équation du troisième degré à coefficients réels ($\mathrm{Q}(a/2) = -b^2$, or on suppose b différent de zéro, sinon l'on aurait une équation bicarrée que l'on sait résoudre directement).