# Brevet de Technicien Supérieur
# Groupement D

## Mathématiques

Session 2021

Durée : 2 heures

| Spécialités | Coeff |
|---|---|
| Analyses de biologie médicale | 1 |
| Bio analyses et contrôles | 2 |
| Biotechnologies | 1 |
| europlastics et composites | 1,5 |
| Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries | 2 |

**Moyens de calcul autorisés**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.
La page 7 est une annexe à rendre avec la copie.

# EXERCICE 1 : 10 points

Une usine agroalimentaire produit de la viande de bœuf hachée. On souhaite évaluer la durée de conservation de la viande de bœuf une fois hachée et conservée dans une chambre froide réglée à 0 °C.

**Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.**

## Partie A

Voici le relevé du nombre de germes putréfiants par centimètre carré ($cm^2$) tous les cinq jours à la surface d'un échantillon de viande de bœuf hachée conservée dans la chambre froide :

| Nombre de jours de conservation $t_i$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre $N_i$ de germes putréfiants par $cm^2$ | 1 000 | 4 000 | 199 000 | 5 960 000 | 48 600 000 |

1. On effectue un changement de variable logarithmique : $z_i = \ln(N_i)$.
   Compléter le tableau donné en **annexe 1 à rendre avec la copie**. On arrondira les valeurs au dixième.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i(t_i\,;\,z_i)$ par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = at + b$. Les réels $a$ et $b$ seront arrondis au centième.
3. On considère que la droite $D$ est une droite d'ajustement du nuage de points $M_i(t_i\,;\,z_i)$ et que ce modèle reste valable jusqu'au 30$^{e}$ jour de conservation dans la chambre froide. Donner une estimation du nombre de germes putréfiants par $cm^2$ sur l'échantillon de viande hachée si celui-ci était stocké et conservé pendant 25 jours dans la chambre froide. Arrondir au million.

## Partie B

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 600e^{0,6t}$.

On admet que la fonction $f$ modélise le nombre de germes par $cm^2$ sur la surface de la viande hachée conservée en chambre froide. Plus précisément, $f(t)$ est le nombre de germes par $cm^2$ sur la viande hachée après $t$ jours de conservation dans la chambre froide à 0 °C.

1. Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. Calculer $f'(t)$ pour tout réel $t$ appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Déterminer le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On définit le réel $m$ par $m = \frac{1}{10-5}\int_5^{10} f(t)\mathrm{d}t$.
   a) Sans la calculer, interpréter la valeur du réel $m$ dans le contexte de l'exercice.
   b) Déterminer une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   c) En déduire que $m = 200\mathrm{e}^6 - 200\mathrm{e}^3$.
5. On admet que la viande hachée peut être commercialisée si, lorsqu'elle quitte l'usine, la concentration de germes putréfiants à sa surface est strictement inférieure à 3 000 germes par cm$^2$.
   a) Résoudre l'inéquation $f(t) < 3\,000$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   b) En déduire si l'usine peut conserver la viande de bœuf hachée produite en chambre froide plus de deux jours avant de la commercialiser.
6. La viande hachée pourra ensuite être vendue à des particuliers tant que le nombre de germes par cm$^2$ ne dépasse par 27 000. On appelle durée limite de consommation le nombre maximal de jours pendant lequel cette viande hachée peut être vendue à des particuliers.
   a) En précisant la démarche employée, donner la valeur numérique affichée par l'algorithme ci-dessous :

```
J ← 0
N ← 600
Tant Que N ≤ 27 000
        J ← J + 1
        N ← 600 * e^(0,6*J)
Fin Tant Que
Afficher J
```

   b) Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

# EXERCICE 2 : 10 points

**Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.**

Pour améliorer l'hygiène de baignade dans un spa, il est possible de traiter l'eau aux ultra-violets (UV). La lampe UV (Figure 1), placée dans une chambre de désinfection, diffuse des rayons ultra-violets en continu. En passant devant cette lampe, dans le système de filtration, l'eau est désinfectée et débarrassée des micro-organismes.

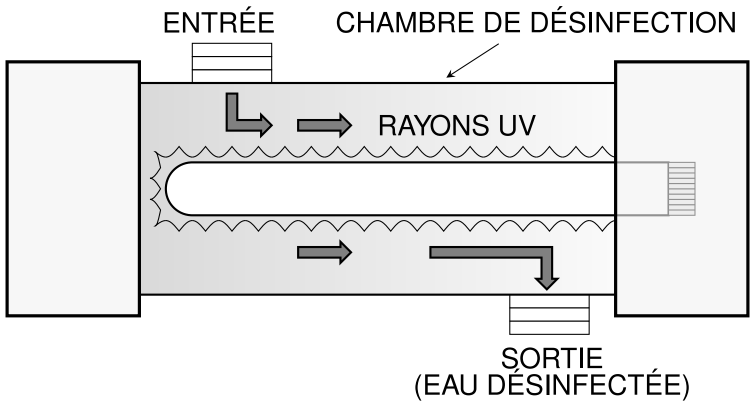



Figure 1. Schéma d'une chambre de désinfection équipée d'une lampe UV

## Partie A

*Les résultats seront donnés à* $10^{-3}$ *près.*

Une étude effectuée sur l'ensemble des spas installés par un fabricant indique que :

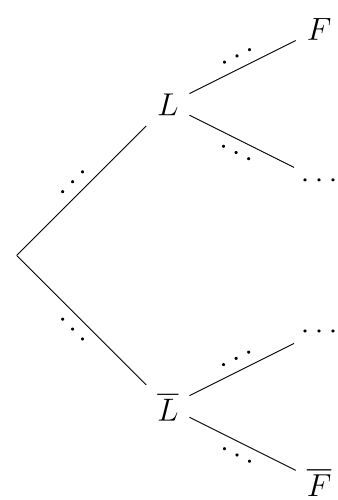
- 40 % des spas sont équipés de lampe UV et, parmi eux, 2 % présentent un problème de filtration ;
- Parmi les spas non-équipés de lampe UV, 15 % présentent un problème de filtration.

On choisit un spa au hasard parmi ceux installés par le fabricant.

On note :

- $L$ l'événement « le spa est équipé d'une lampe UV » ;
- $F$ l'événement « le spa présente un problème de filtration » ;
- $\overline{L}$ et $\overline{F}$ les événements contraires respectifs des événements $L$ et $F$.

1. Recopier sur la copie l'arbre pondéré ci-contre et compléter les pointillés.



2. Montrer que la probabilité de l'événement $F$ est égale à $0,098$.
3. Le spa choisi au hasard présente un problème de filtration. Calculer la probabilité que ce spa ne possède pas de lampe UV.
4. Lors d'une opération de maintenance sur un parc de 78 spas installés par la fabricant, un technicien comptabilise 12 spas présentant un problème de filtration.

   a) Donner une estimation ponctuelle $f$ de la proportion inconnue $p$ des spas installés par ce fabricant qui présentent un problème de filtration.

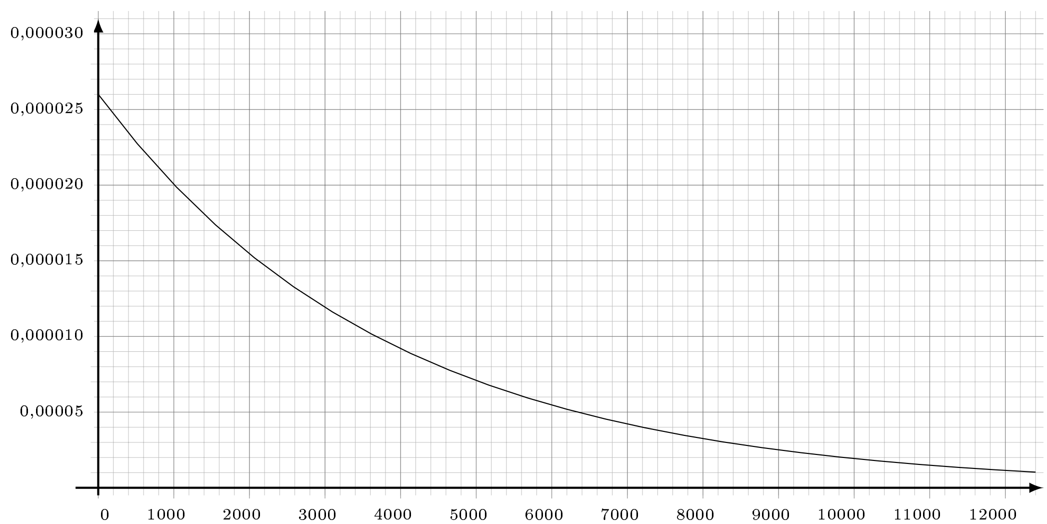
   b) Déterminer par un intervalle de confiance au seuil de 95 % cette proportion $p$.

**Partie B**

On s'intéresse désormais à la durée de vie des lampes UV. Celle-ci, exprimée en heures, est une variable aléatoire $X$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, où $\lambda$ est un réel strictement positif. On rappelle que la fonction de densité $f$ d'une telle variable aléatoire est donnée pour tout réel $t \geq 0$ par :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction de densité $f$.




1. À l'aide du graphique, justifier que : $\lambda = 0,00026$.
2. On considère la proposition suivante : « en moyenne, une lampe UV tombe en panne au bout de 1 000 heures ». Cette proposition est-elle vraie ? Justifier.
3. Montrer que la probabilité qu'une lampe n'ait pas eu de panne au cours des 500 premières heures est égale à $e^{-0,13}$.

**Partie C**

Lors de l'utilisation des lampes UV, on constate que la probabilité de la durée d'utilisation d'une lampe UV prise au hasard dépasse 1000 heures est $p = 0,77$.

On prélève au hasard un lot de 50 lampes dans la production, jugée suffisamment importante pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On appelle $Y$ la variable aléatoire qui, à un échantillon de 50 lampes UV de la production, associe le nombre de lampes UV dont la durée d'utilisation dépasse 1000 heures.

1. Justifier que la variable aléatoire $Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Déterminer l'arrondi à $10^{-3}$ de la probabilité $P(Y \geq 42)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

**Annexe 1 à rendre avec la copie : Exercice 1 - Partie A - Question 1**

| Nombre de jours de conservation $t_i$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre $N_i$ de germes putréfiants par $cm^2$ | 1 000 | 4 000 | 199 000 | 5 960 000 | 48 600 000 |
| $z_i = \ln N_i$ | | | | | |

**Annexe 2 à rendre avec la copie : Exercice 1 - Partie A - Question 3**