Brevet de Technicien Supérieur
Groupement D

Mathématiques

Session 2016

Durée : 2 heures

Spécialités	**Coeff**
Analyses de biologie médicale	**1**
Bio analyses et contrôles	**2**
Biotechnologies	**1**
Industries plastiques « europlastic »	**1,5**
Métiers de l'eau	**1,5**
Peintures, encres et adhésifs	**2**
Qualité dans les industries alimentaires	**1**

Matériel autorisé

Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique sont autorisées à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Circulaire n° 99-186 du 16 novembre 19999

La page 7/7 est à rendre et à agrafer avec la copie

EXERCICE 1 (11 points)

Le **Ténébrion meunier** (***Tenebrio molitor***) est un insecte de l'ordre des coléoptères, de la famille des ténébrionidés. Il est capable de vivre dans des denrées stockées très sèches, notamment dans la farine, d'où son nom de meunier.

Wikipédia

De par la facilité de son élevage, cet insecte est très utilisé dans les laboratoires de recherche pour des études physiologiques sur son développement et sur son endocrinologie : Sa nymphe est très sensible à l'hormone juvénile par exemple. Le ver est également un très bon appât pour la pêche de la truite en étang.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Kévin, un apprenti boulanger, décide d'élever des vers de farine pour son club de pêche. Il commence son élevage 7 mois avant l'ouverture de la saison de pêche. Dans un large bac adapté qu'il entrepose à 27°C, il dispose de la farine et 500 vers, il laisse se faire les choses. Il suit l'évolution du nombre de vers et obtient les résultats suivants :

Nombre de quinzaines t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de vers N_i	500	749	1122	1681	2518	3772	5650	8464	12678	18992

1. Kévin se fait la remarque suivante : « chaque quinzaine la population augmente d'environ 50 % ». Expliquer cette modélisation. Est-elle réaliste sur le long terme ?
2. Kévin souhaite connaître le nombre de vers dont il disposera lors de l'ouverture de la prochaine saison. Il présente ses données à son professeur de mathématiques qui lui propose un nouveau modèle à partir du changement de variable suivant : $y_i = ln\left(\dfrac{33000}{N_i} - 1\right)$.
   (a) Compléter le tableau donné en annexe. Arrondir au centième.
   (b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement Δ de y en t par la méthode des moindres carrés. Arrondir les coefficients au centième.
   (c) Parmi les propositions suivantes quelle est celle qui estime le mieux le nombre de vers pour l'ouverture de la saison de pêche ? Justifier.

33000	146000	9200	30300

3. Maxime, un ami du club, affirme qu'à ce rythme là, le nombre de vers va dépasser 50 000. Kévin a déterminé que le nombre de vers en fonction du nombre de quinzaines t est donné approximativement par le nombre :

$$N(t) = \frac{33000}{1 + 75\mathrm{e}^{-0,48t}}.$$

   Kévin peut-il confirmer l'affirmation de Maxime ? Justifier votre réponse.

Partie B

De retour à l'école, Kévin apprend que la température de refroidissement du pain à la sortie du four dépend du type de pain et de la température ambiante supposée constante de la pièce dans laquelle il est entreposé.

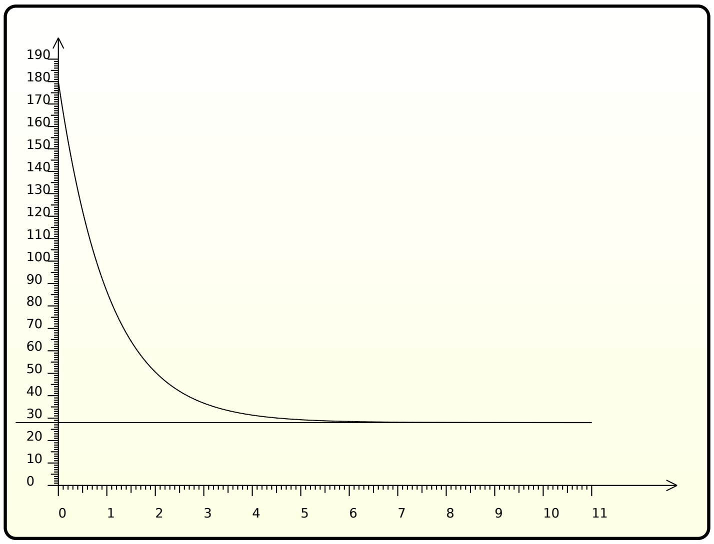
On note a cette température constante de la pièce, exprimée en degrés Celsius.

Pour $t \geqslant 0$, on désigne par $y(t)$ la température du pain au bout d'un temps t après sa sortie du four.

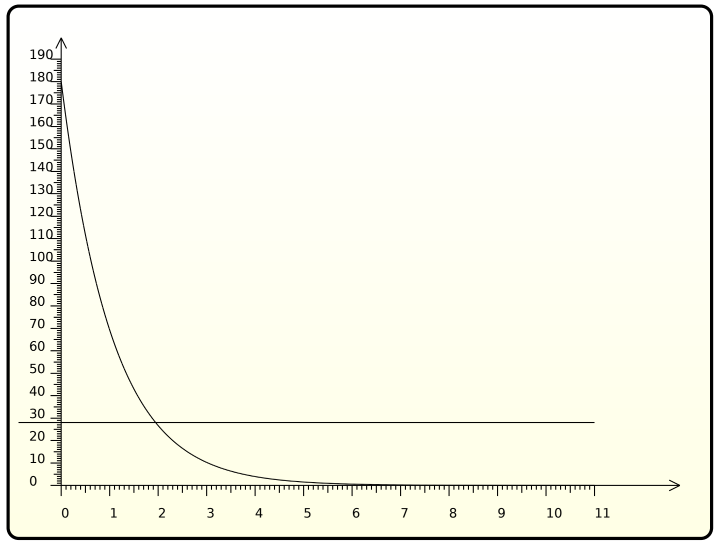
La durée t est exprimée en heures et la température $y(t)$ est exprimée en degrés Celsius.

Question préliminaire : Parmi les trois courbes suivantes, quelle est celle qui correspond à l'évolution de la température du pain à la sortie du four en fonction du temps ? Argumenter votre réponse.

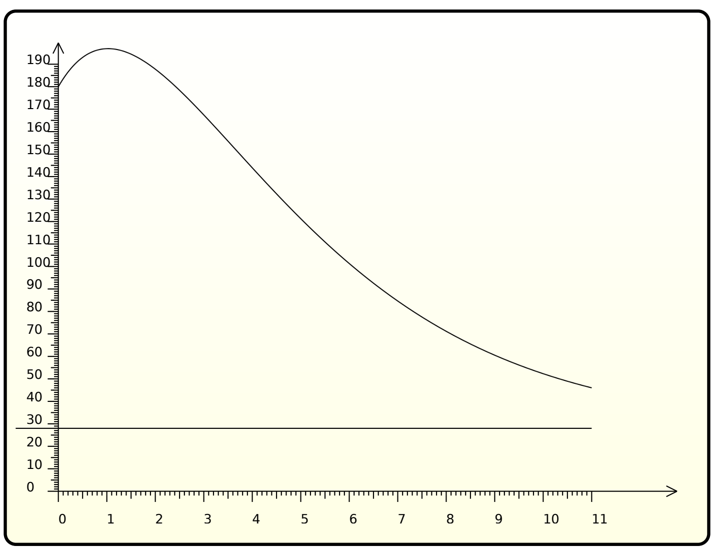
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



La fonction y vérifie l'équation différentielle : $(E) \quad : \quad y'(t) + 6y(t) = 6a$.

I Résolution d'une équation différentielle

Dans cette partie on considère que le pain est entreposé dans une pièce dont la température constante est a. À la sortie du four, c'est-à-dire à l'instant $t = 0$, le pain est à une température de 180°C.

1. Déterminer les solutions sur $[0; +\infty[$ de l'équation $(E_0) \quad : \quad y' + 6y = 0$.

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(t) = k$, où k est une constante réelle dépendant de a. Déterminer k pour que la fonction g soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Démontrer que la fonction h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $h(t) = (180 - a)\mathrm{e}^{-6t} + a$ est la solution de (E) correspondant à la condition initiale donnée.

II Étude d'une fonction

1. Dans cette question, le pain est entreposé à une température de 28°C.

(a) Soit f définie pour tout $t \geqslant 0$ par $f(t) = 152\ \mathrm{e}^{-6t} + 28$.
Vérifier que f est la solution de l'équation (E) dans le contexte proposé.

(b) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

(c) Déterminer la température θ du pain une demi-heure après la sortie du four. On donnera une valeur approchée de θ à un degré près.

(d) Le boulanger sort une fournée de pains du four. Déterminer par la méthode de votre choix au bout de quelle durée D le pain sera à une température de 62°C. On donnera une valeur approchée de D à une minute près.

2. Quelle devrait être la température, au degré près, de la pièce dans laquelle est entreposé le pain afin que ce pain, sorti du four à 16h, soit à une température de 30°C à 16h30 ?

EXERCICE 2 (9 points)

La mesure précise des volumes est d'une grande importance au laboratoire. Elle peut être effectuée à l'aide d'une pipette jaugée ou graduée. Une pipette sert à prélever un volume précis d'un liquide (de 1 à 100 ml). Elles sont utilisées pour réaliser des dosages.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A Défauts de fabrication et conformité

On rappelle que la probabilité qu'un évènement E se réalise sachant que l'évènement F (de probabilité non nulle) est réalisé se note $P_F(E)$ et vérifie : $P_F(E) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)}$.

L'entreprise AGOREX fabrique et distribue des pipettes jaugées en verre. Deux chaînes de production (A et B) permettent de répondre à la demande journalière.

- 55 % des pipettes viennent de la chaîne de production A et 2,6 % des pipettes de cette chaîne sont inutilisables ;
- 3,6 % des pipettes provenant de la chaîne de production B sont inutilisables.

On choisit au hasard une pipette dans le stock journalier de l'entreprise et on note :

- A l'évènement : « La pipette est sortie de la chaîne de production A » ;
- B l'évènement : « La pipette est sortie de la chaîne de production B » ;
- I l'évènement : « La pipette est inutilisable »

Les questions 1, 2 et 3 peuvent être traitées de façon indépendante.

1. Calculer à 10^{-3} près la probabilité qu'une pipette soit inutilisable.
2. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'une pipette soit inutilisable est égale à 0,03.

   On prélève au hasard un échantillon de 100 pipettes dans le stock de l'entreprise. Le nombre de pipettes produites est suffisamment important pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 pipettes. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 pipettes, associe le nombre de pipettes inutilisables.

   (a) Déterminer la loi suivie par X en précisant ses paramètres.

   (b) Quelle est la probabilité de l'évènement : « au moins une des pipettes est inutilisable » ? On arrondira cette probabilité au millième.
3. Pour répondre au cahier des charges de certains laboratoires, l'entreprise AGOREX est amenée à effetuer des tests de conformité. Une pipette utilisable est dite conforme si sa contenance est comprise entre 98 ml et 102 ml. On note C la variable aléatoire qui à chaque pipette prise au hasard dans le stock d'un laboratoire associe sa contenance (en millilitres). On admet que C suit une loi normale de moyenne 100 et d'écart type $\sigma = 1,021$. On prélève au hasard une pipette dans la production.

   (a) Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près, pour que cette pipette soit conforme ?

   (b) Au final sur un lot de 1 000 pipettes produites combien seraient conformes ?

Partie B Estimation

Le laboratoire BIOMATOP effectuant des analyses se fournit en pipettes auprès de l'entreprise AGOREX.
Dans cette partie on considère une grande quantité de pipettes livrées au laboratoire. On considère un échantillon de 200 pièces prélevées au hasard dans cette livraison. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise. Dans cet échantillon, on constate que 5 pipettes sont cassées.

1. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p_c des pipettes cassées de cette livraison.
2. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p_c avec le coefficient de confiance de 95 %.

ANNEXE

Exercice 1

Nombre de quinzaines t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de vers N_i	500	749	1122	1681	2518	3772	5650	8464	12678	18992
y_i	4,17	3,76			2,49			1,06	0,47	