Brevet de Technicien Supérieur
Groupement D

Mathématiques

Session 2015

Durée : 2 heures

Spécialités	**Coeff**
Analyses de biologie médicale	**1**
Bio analyses et contrôles	**2**
Biotechnologies	**1**
Industries plastiques « europlastic »	**1,5**
Métiers de l'eau	**1,5**
Peintures, encres et adhésifs	**2**
Qualité dans les industries alimentaires	**1**

Matériel autorisé

Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique sont autorisées à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Circulaire n°99-186 du 16 novembre 19999

EXERCICE 1 (11 points)

Pharmacocinétique

On s'intéresse à une maladie dégénérative de l'œil qui occasionne des troubles de la vision. Afin de freiner son évolution, deux traitements sont possibles. Dans cet exercice, on étudie, pour ces deux traitements, l'évolution de la quantité des principes actifs présents dans le sang en fonction du temps.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A : Étude du premier traitement

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de façon indépendante.

Le premier traitement consiste à faire absorber au malade par voie orale un médicament qui libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. Il est efficace lorsque la quantité de principe actif est supérieure ou égale à 5 mg. On admet qu'à l'instant $t = 0$ la quantité de principe actif présente dans le sang est de 1 mg.

1. **Résolution d'une équation différentielle**

   L'évolution en fonction du temps (exprimé en heures), de la quantité de principe actif présente dans le sang après absorption (exprimée en mg) est modélisée par une fonction vérifiant l'équation différentielle :

   $$(E)\ :\ y' + 0,1y = 2e^{-0,1t}$$

   où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et y' la dérivée de la fonction y.

   a) Déterminer les solutions sur $[0; +\infty[$ de l'équation $(E_0)\ :\ y' + 0,1y = 0$.

   b) Soit h la solution définie sur $[0; +\infty[$ par $h(t) = 2te^{-0,1t}$. Vérifier que h est une solution particulière de (E).

   c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

   d) Déterminer la solution de (E) correspondant au problème posé.

2. **Étude d'une fonction**

   Soit la fonction f définie pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = (2t + 1)e^{-0,1t}$.

   a) On admet que la limite de f en $+\infty$ est 0.
   Interpréter graphiquement cette limite.

   b) On note f' la fonction dérivée de f et on admet que $f'(t) = (1,9 - 0,2t)e^{-0,1t}$.

      i. Étudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

      ii. Dresser le tableau des variations de f sur $[0; +\infty[$.

3. **Application**

   a) Au bout de combien de temps la quantité de principe actif dans le sang sera-t-elle maximale ?

   b) Sur quel intervalle de temps le médicament sera-t-il efficace ?
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   c) On donne :

   $$\int_0^{24} f(t)\mathrm{d}t = 210 - 690e^{-2,4}.$$

   Déterminer la quantité moyenne de principe actif présente dans le sang entre 0 et 24 h. On arrondira le résultat au dixième.

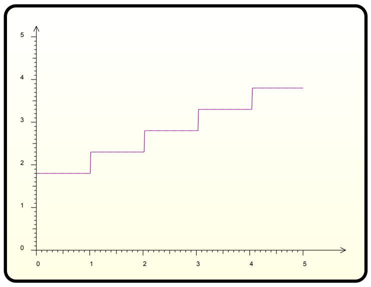
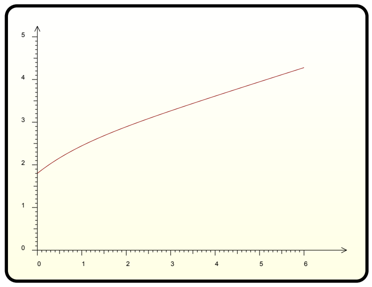
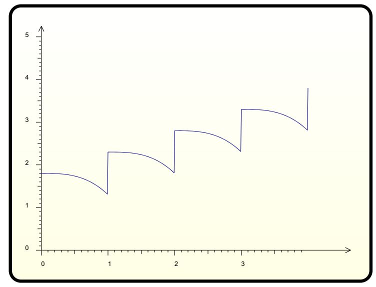
Partie B : Étude statistique du second traitement

Le second traitement consiste à injecter par intraveineuse un médicament qui permet une meilleure vascularisation des vaisseaux sanguins de la rétine. À l'instant $t = 0$, on injecte une dose de 1,8 mg de médicament, appelée dose de charge. On suppose que ce procédé diffuse instantanément dans le sang le principe actif qui est ensuite progressivement éliminé par les reins.

1. Administrations répétées du médicament

On décide de réinjecter une dose de 1,8 mg toutes les heures, dose supportable par le patient.

Parmi les trois courbes suivantes, quelle est celle qui représente le mieux l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang ? Argumenter votre choix.

2. Administration continue du médicament : recherche de la courbe de tendance

Après avoir injecté la dose de charge de 1,8 mg, on décide d'administrer ce médicament à l'aide d'une pompe, de manière continue, afin de réduire le plus possible les oscillations de la quantité de principe actif dans le sang.

L'étude consiste à déterminer *l'état stationnaire* (steady state) pour ce médicament. On considère que l'état stationnaire est atteint lorsque la différence entre la quantité limite et la quantité dans le sang est inférieure ou égale à 1 mg.

On effectue sept mesures régulières pendant 24 h et on obtient les relevés suivants, où q_i désigne la quantité en mg de principe actif dans le sang à l'instant t_i.

t_i (en heures)	0	4	8	12	16	20	24
q_i (en mg)	1,8	9,5	15,5	20,2	23,7	26,8	28,7

On cherche à modéliser l'expression de la quantité de principe actif dans le sang en fonction du temps. Un ajustement affine n'étant pas judicieux, on décide de procéder à un changement de variable.

a) On pose $y_i = \ln(36 - q_i)$.

i. Donner les 3 valeurs manquantes de ce tableau. Arrondir au centième.

t_i	0	4	8	12	16	20	24
q_i	1,8	9,5	15,5	20,2	23,7	26,8	28,7
q_i	3,53	3,28			2,51	2,22	

ii. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de D la droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés. Arrondir les coefficients au centième.

b) Donner une expression de la quantité q en fonction de t déduite de cet ajustement.

Dans la question suivante, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

c) Un médecin affirme que l'état stationnaire est atteint en moins de trois jours. En admettant que la quantité limite est de 36 mg, quel argument peut-il fournir pour justifier cette affirmation ?

EXERCICE 2 (9 points)

Industrie agroalimentaire
L'entreprise agroalimentaire Flavornuts fabrique des arômes naturels servant à l'amélioration des préparations culinaires pour la pâtisserie ou la cuisine. Elle les conditionne dans des flacons de 58 ml qu'elle achète à l'entreprise Verremballage, qui conçoit, développe et commercialise des solutions d'emballages primaires composées de flacons standards.

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : Étiquetage

> *L'étiquetage des denrées alimentaires préemballées est obligatoire (articles R. 112-1 et suivants du code de la consommation). Certaines mentions sont imposées par la législation, d'autres sont facultatives. Toutes sont fournies par les fabricants, sous leur responsabilité. L'étiquetage des constitué par « les mentions, indications, marques de fabrique ou de commerce, images ou signes se rapportant à une denrée alimentaire et figurant sur tout emballage, document, écriteau, étiquette, bague ou collerette accompagnant ou se référant à cette denrée alimentaire »*
>
> *Article R. 112-1 du code de la consommation*

Une fois fabriquées, les étiquettes peuvent présenter deux défauts : Un défaut du visuel (graphisme, photo, couleur ...) ou l'absence de la date limite de consommation.
On considère les évènements suivants :

- A : « la date limite de consommation n'apparaît pas sur l'étiquette ».
- D : « l'étiquette comporte un défaut du visuel » ;

On suppose que les évènements A et D sont indépendants.
On admet que les probabilités des évènements sont : $p(A) = 0,01$ et $p(D) = 0,03$.

1. Calculer la probabilité qu'une étiquette prélevée au hasard dans la production présente les deux défauts.
2. Calculer la probabilité qu'une étiquette prélevée au hasard dans la production ne présente aucun de ces deux défauts.

Partie B : Étude de la contenance

Dans cette partie, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-2} près.
On définit une variable aléatoire V associant à chaque flacon son volume utile exprimé en mL.
On suppose que V suit la loi normale de moyenne $m = 58$ (valeur annoncée par le fournisseur) et d'écart type $\sigma = 0,04$.
Le cahier des charges indique que le flacon est conforme lorsque ce volume appartient à intervalle [57,90 ; 58,10].
On choisit un flacon au hasard dans la production.

1. Déterminer la probabilité pour qu'il soit non conforme.
2. Donner une valeur arrondie au centième du réel h tel que : $p(58 - h \leqslant V \leqslant 58 + h) = 0,95$.
   Toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation.

Partie C : Test d'hypothèse.

À l'occasion d'une commande, le service contrôle du laboratoire reçoit un lot de flacons. Il effectue un prélèvement aléatoire de 80 flacons. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Volume	[57,93 ; 57,97[	[57,97 ; 58,01[	[58,01 ; 58,05[	[58,05 ; 58,09[	[58,09 ; 58,13]
Effectif	2	10	39	21	8

1. Calculer la moyenne $\bar{v}$ et l'écart type s de cet échantillon (arrondir le résultat à 10^{-3} près) en faisant l'hypothèse que les valeurs observées sont respectivement celles du centre de chaque classe.

2. Construction du test

Le volume des flacons doit être de 58 mL. On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral au seuil de signification de 5 % pour contrôler, au moment de la livraison, la moyenne μ de l'ensembles des volumes (en mL) des flacons. On note $\bar{V}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 80 flacons prélevés au hasard dans l'ensemble de la production, associe la moyenne des volumes.

On considère :

- L'hypothèse nulle $H_0 : \mu = 58$
- L'hypothèse alternative $H_1 : \mu \neq 58$

Le seuil de signification est fixé à 0,05.

On admet que, sous l'hypothèse H_0, $\bar{V}$ suit la loi normale $N\left(58; \dfrac{0,04}{\sqrt{80}}\right)$.

a) Parmi les quatre intervalles proposés, lequel utiliseriez-vous pour effectuer le test ?
Justifier votre choix.

$$I = \left[58,04 - 1,65 \times \frac{0,04}{\sqrt{80}}; 58,04 + 1,65 \times \frac{0,04}{\sqrt{80}}\right]$$

$$J = \left[58,04 - 1,96 \times \frac{0,04}{\sqrt{80}}; 58,04 + 1,96 \times \frac{0,04}{\sqrt{80}}\right]$$

$$K = \left[58 - 1,65 \times \frac{0,04}{\sqrt{80}}; 58 + 1,65 \times \frac{0,04}{\sqrt{80}}\right]$$

$$L = \left[58 - 1,96 \times \frac{0,04}{\sqrt{80}}; 58 + 1,96 \times \frac{0,04}{\sqrt{80}}\right]$$

b) Énoncer la règle de décision du test.

3. Utilisation du test

En utilisant les informations recueillies sur l'échantillon de 80 flacons, le service de contrôle acceptera-t-il cette livraison ? Justifier.