BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
SOUS-ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

GROUPEMENT D
Durée : 2 heures

Spécialité	Coefficient
Analyses de biologie médicale	1
Bio analyses et contrôles	2
Biotechnologie	1,5
Hygiène-propreté-environnement	2
Industrie plastiques-europlastie-à référentiel commun européen	1,5
Métiers de l'eau	1,5
Peintures, encres et adhésifs	2
Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries	2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.
Le formulaire de mathématiques est joint au sujet.
La calculatrice (conforme à la circulaire n°99-186 du 16-11-99) est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est fournie avec le sujet.
Ce sujet comporte 5 pages (y compris celle-ci).

EXERCICE 1 (10 points)

Les bordures d'autoroute possèdent parfois des bassins de décantation dont le rôle est de recueillir les eaux pluviales ruisselant sur l'asphalte et les éléments polluants qu'elles peuvent drainer.
À la suite d'un accident de la circulation, un camion-citerne déverse une partie de son contenu sur la chaussée d'une autoroute. La règlementation en vigueur impose l'isolation, par fermeture de vannes, du bassin de décantation proche de l'accident de façon à ce que la concentration en matières polluantes dans le bassin ne dépasse pas 15 μg/L. Cette concentration est de 1,3 μg/L au moment où les matières polluantes provenant du camion-citerne commencent à se déverser dans le bassin.
Dans cet exercice, on cherche à savoir au bout de combien de temps la concentration en matières polluantes dans le bassin atteindra 15μg/L si on n'isole pas le bassin et à quel moment les capteurs installés dans le bassin déclencheront la fermeture des vannes.
On mesure en minutes le temps t écoulé à partir de l'instant où les matières polluantes provenant du camion-citerne commencent à se déverser dans le bassin de décantation.
On admet que, tant que le bassin n'est pas isolé par fermeture des vannes, la concentration à l'instant t en matières polluantes dans le bassin, exprimée en μg/L, peut être modélisée par $f(t)$, où f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0,03y = 0,75$. On a donc $f(0) = 1,3$.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y' + 0,03y = 0,75$

1. On considère l'équation différentielle (E_0) : $y' + 0,03y = 0$, où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$, et y' la fonction dérivée de la fonction y.
   Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(t) = a$, où a est une constante réelle. Déterminer a pour que la fonction g soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Démontrer que la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1,3$ est la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(t) = 25 - 23,7\mathrm{e}^{-0,03t}$.

B. Étude de la fonction f

f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(t) = 25 - 23,7\mathrm{e}^{-0,03t}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f quand t tend vers $+\infty$.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(t)$ pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$.
   b) Expliquer le signe de $f'(t)$ pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

4. **a)** Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. Arrondir les résultats au dixième.

t	0	10	20	30	40	50	60
$f(t)$	1,3						

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ sur la feuille de papier millimétré jointe au sujet **ou** visualiser cette courbe sur l'écran de la calculatrice et indiquer sur la copie les caractéristiques de la fenêtre utilisée (valeurs de X min, X max, Y min, Y max et des « pas ») et l'allure de la courbe obtenue.

C. Traitement de la problématique

On rappelle que $f(t)$ modélise la concentration (exprimée en μg/L) en matières polluantes dans le bassin à l'instant t (exprimé en minutes) tant que le bassin n'est pas isolé par fermeture des vannes.

1. Si le bassin n'était pas équipé d'un dispositif d'isolation par fermeture de vannes, quelle serait la valeur autour de laquelle se stabiliserait la concentration en matières polluantes ? Justifier.

2. À l'aide de la courbe $\mathcal{C}$ obtenue à la question **B 4 b)**, sur papier millimétré **ou** sur écran de la calculatrice, déterminer graphiquement une valeur approchée à l'unité, du temps t_0 (exprimé en minutes) au bout duquel la concentration en matières polluantes dans le bassin atteindrait 15 μg/L si le bassin n'était pas isolé par fermeture des vannes. Expliquer la démarche.

3. La concentration en matières polluantes dans le bassin est relevée par un capteur dont les mesures sont légèrement instables.
Pour prendre en compte cette instabilité, on met en place un dispositif associant la fermeture des vannes à l'instant t ($t \geq 2$) à la valeur moyenne de la concentration en matières polluantes mesurée par le capteur entre les instants $t-2$ et t.
La fermeture des vannes est déclenchée lorsque cette valeur moyenne atteint **14 μg/L**.
La valeur moyenne de la concentration (exprimée en μg/L) en matières polluantes entre les instants $t-2$ et t est modélisée par : $V(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t-2}^{t} f(u)\,du = \dfrac{1}{2}(F(t) - F(t-2))$, où F est une primitive de la fonction f.

a) Donner une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b) Calculer $V(t)$ et vérifier que : $V(t) = 25 + A\mathrm{e}^{-0,03t}$ avec $A \approx -24,4$.

c) Résoudre l'équation : $25 - 24,4\mathrm{e}^{-0,03t} = 14$. Donner une valeur approchée au dixième de la solution T de cette équation.

d) Que représente T dans le contexte de l'exercice ?

EXERCICE 2 (10 points)

Une coopérative est spécialisée dans la récolte de fleur de sel.
Elle utilise une machine automatique pour remplir des sachets de fleur de sel dont la masse théorique doit être de 250 grammes.
Un sachet est dit conforme si sa masse m, exprimée en grammes, vérifie : $240 \leq m \leq 260$.
Les probabilités demandées dans cet exercice peuvent être calculées en utilisant le formulaire joint au sujet ou la calculatrice. Qulle que soit l'option retenue on fera figurer sur la copie quelques étapes de la démarche suivie.
Les résultats des calculs de probabilités seront arrondis au millième.

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. loi normale

L'étude statistique de la production permet d'admettre que la variable aléatoire M qui mesure, en grammes, la masse d'un sachet, suit une loi normale de moyenne $\mu = 250$ et d'écart-type $\sigma = 5,3$.

1. On choisit au hasard un sachet dans la production.
Calculer la probabilité que le sachet soit conforme.

2. **a)** Calculer $P(M \geq 245)$.

b) Un gros client exigeant souhaite qu'au moins trois quarts des sachets qu'il achète aient une masse supérieure à 245 grammes. Sera-t-il satisfait ? Justifier.

B. Loi binomiale et loi de Poisson

On considère dans cette partie que la probabilité qu'un sachet ne soit pas conforme est :

$$p = 0,06$$

La coopérative constitue des lots de 50 sachets pour la vente et étudie le nombre de sachets non conformes contenus dans un lot.
La production de la coopérative est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler la constitution d'un lot à un tirage au hasard et avec remise de 50 sachets.
On note X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de 50 sachets le nombre de sachets non conformes de ce lot.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

2. Que représente la probabilité $P(X = 1)$ dans le contexte de l'exercice ? Calculer $P(X = 1)$.

3. On approche la loi de probabilité de X par une loi de Poisson.

a) Justifier que cette loi de Poisson a pour paramètre $\lambda = 3$.

b) On note Y une variable aléatoire qui suit une loi de de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.
En utilisant la variable aléatoire Y, estimer la probabilité qu'il y ait au plus cinq sachets non conformes dans un lot de 50 sachets.

C. Test d'hypothèse

Après la révision annuelle de la machine utilisée pour remplir les sachets de fleur de sel, le responsable qualité de la coopérative veut contrôler la valeur de la masse moyenne m (exprimée en grammes) d'un sachet de fleur de sel.
Il construit pour cela un test d'hypothèse bilatéral au seuil de signification de 5 %.
L'hypothèse nulle H_0 est : $m = 250$.
L'hypothèse alternative H_1 est : $m \neq 250$.

On note $\overline{M}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 50 sachets prélevés dans la production de la coopérative, associe la masse moyenne (en grammes) d'un sachet de l'échantillon. La production est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler la constitution d'un échantillon à un tirage au hasard et avec remise de 50 sachets.
On suppose que la variable aléatoire $\overline{M}$ suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\dfrac{5,3}{\sqrt{50}}$.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer le nombre réel positif a tel que

$$P(250 - a \leq \overline{M} \leq 250 + a) = 0,95.$$

Arrondir au centième.

2. Énoncer la règle de décision du test.

3. On prélève au hasard 50 sachets dans la production.
Les masses en grammes de ces sachets se répartissent de la façon suivante :

Masse en grammes	[236 ;240[	[240 ;244[	[244 ;248[	[248 ;252[	[252 ;256[	[256 ;260[	[260 ;264[
Nombre de sachets	5	6	9	13	8	7	2

a) En utilisant les centres des intervalles, calculer une valeur approchée de la masse moyenne d'un sachet de cet échantillon.

b) Quelle va être la conclusion du responsable qualité ?